Ormeproblemet

H. C. Hansen
Møllevej 15
DK-6600 Vejen

De orm, der refereres til i "ormeproblemet" er plane kurver af længde 1. Problemet drejer sig da om at finde en plan konveks figur, der kan dække enhver orm. Vi skal kalde en sådan figur for et dæksel. I en udgave af problemet drejer det sig om at finde dækslet med minimalt areal [1]. En halv ellipse med storakse 1 og lilleakse $\sqrt{3}/4$ har været foreslået [1], men måtte senere forkastes, da man fandt orm, den ikke kunne dække.

Problemet med problemet er, at man søger en konveks figur med mindst muligt areal. Det mindste areal er nemlig ikke naturligt konvekst, ofte vil man kunne lave små hak ind i foreslåede dæksler, hvilket vil stride mod konveksitetsbetingelsen.

Det ekstreme lignende resultat så man i forbindelse med "nåleproblemet", hvor man søger det mindste areal inden for hvilket en nål kan drejes rundt. Og det viste sig, at processen kan foregå inden for et vilkårligt lille areal [2] i en ret patologisk udseende figur. Også problemet med at finde det mindste dæksel for figurer med diameter 1 har udviklet sig i tilsvarende ikke-konveks retning som jeg har beskrevet tidligere i Normat [3]. Problemet er stadig uløst både i sin konvekse og i sin frie formulering. Det nyeste fremskridt er rapporteret i [5].

Jeg vil altså påstå, at grunden til at ormeproblemet ikke er løst, er at der ikke findes en pæn løsning. Man kan altså ikke hive en løsningskandidat frem fra matematikerens arsenal af pæne og velkendte former.

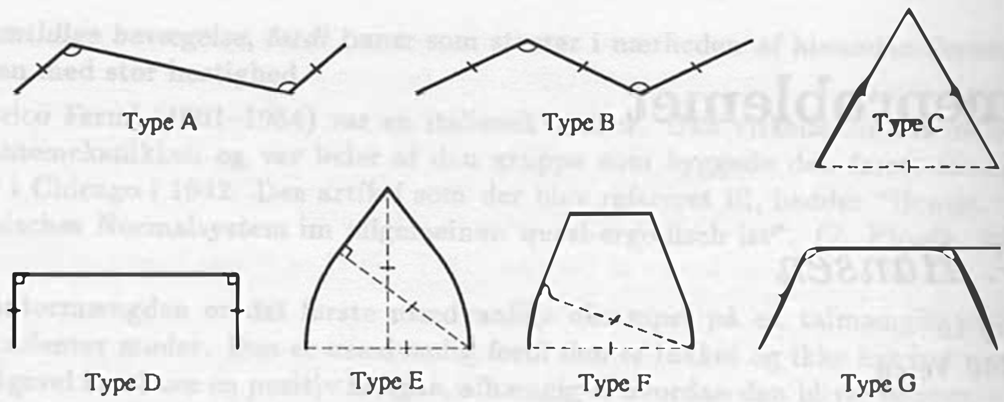
I denne lille artikel vil jeg prøve at begrunde denne påstand og som plaster på såret alligevel fremvise et simpelt pænt dæksel, hvis areal kun overstiger det minimales med få procent.

I. En empirisk undersøgelse

Empirisk kan man gå til værks som følger: Man tegner et ret liniestykke af længde 1, som jo skal være inde i dækslet. Så går man ellers igang med et udvalg af kurver af længde 1 på pergamentpapir, en datamat og elementær matematik – og arbejder sig frem mod det mindste areal, der kan dække disse figurer. Efter en tid vil man opdage, at visse typer orm udspænder randen af dækslet. De er vist i figur 1. Figuren E ville man nok ikke lige komme på, hvis ikke man kendte den. Det er ormen med maksimal bredde, en anelse bredere end C, 0.4373 mod 0.4330 [4].

Beskrivelsen af dækslet

Resultatet af min undersøgelse blev, at figuren $\mathcal{D}$ i figur 2 er dækslet af mindst muligt areal. Hvis vi indlægger $\mathcal{D}$ i et koordinatsystem med A i (0,0) og B i

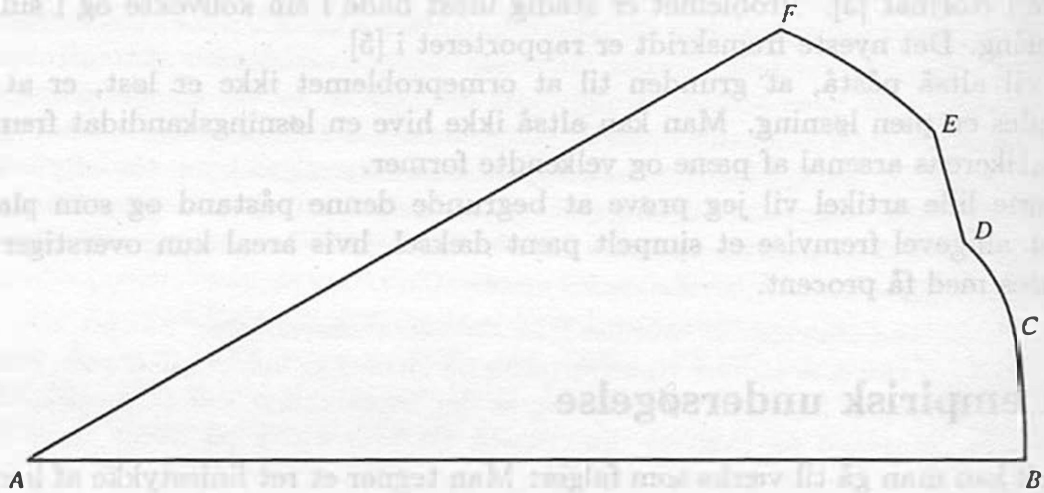


Figur 1. Ekspansive "orm".

(1,0), er en nærmere beskrivelse mulig, idet nøjagtigheden i beskrivelsen angives ved antallet af decimaler, dog er $\angle BAF$ eksakt 30°:

$$C = (0.9915, 0.1300), \quad D = (0.9404, 0.2223), \quad E = (0.9107, 0.3333),$$
$$F = (0.7574, 0.4373)$$

BC er en cirkelbue med centrum i $(0,0)$ og radius 1.000. BC er udspændt af kurver af type A, figur 1. CD er en cirkelbue med centrum i $(0.825, 0.098)$ og radius 0.170, udspændt af figurer af type A. DE er den rette linie $y = (1-x)\cdot\tan(75°)$, eksakt, udspændt af figurer af type D. EF er en cirkelbue med centrum i $(0.573, 0.000)$ og radius 0.475 udspændt af figurer af type F og G. AB og AF er eksakt rette liniestykker. Arealet af dækslet $\mathcal{D}$ bliver herefter 0.246.



Figur 2. Dækslet $\mathcal{D}$ med areal 0.246.

Beviset for at $\mathcal{D}$ er et dæksel overlades i den empiriske ånd til læseren: Gang alle ovenstående koordinater med 10 cm og tegn $\mathcal{D}$. Prøv så at finde kurver (på pergament eller transparenter) af længde 10 cm der ikke lader sig dække af $\mathcal{D}$. Undervejs vil der så også opstå en indsigt i, hvorfor arealet ikke kan reduceres, hvis vi holder AB fast som bund på dækslet. F.eks. vil en symmetrisering ikke nedbringe arealet, idet en større vinkel A ikke vil ændre på, at kurven BC skal have lodret tangent ved B; kurver af typen B, figur 1, sikrer dette. Modsat vil en mindre vinkel ved A give dækslet en diameter større end 1.

Den vigtigste erfaring man opnår ved et sådant empirisk arbejde er, udover et skøn over det mindste areal, at det mindste areal ikke kan forventes at være konvekst. Dette skyldes, at de forskellige typer orme som A, D, F fra figur 1 stiller krav til dækslets rand helt uafhængigt af hinanden.

II. Et pænt dæksel

Sætning 1. Rhomben med side $\sqrt{3}/3$, sammensat af to ligesidede trekanter af højde 0.5, er et dæksel for mængden af kurver af længde 1.

Bevis: Lad $ABCD$ være rhomben sammensat af to ligesidede trekanter af højde 0.5, dvs. $AC = 1$ og $\angle BAD = 60°$ som på figur 3. Vi skal bevise, at enhver kurve af længde 1 kan indlejres i rhomben. Lad derfor en kurve af længde 1 og med midtpunkt O være givet.

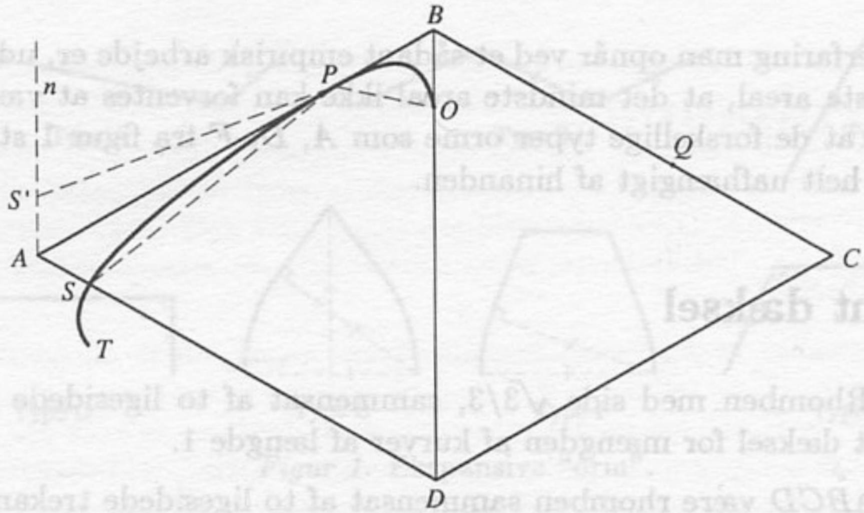
Først skal vi have placeret kurven på passende vis inde i vinkel ABC. Med O på BD drejes kurven rundt, idet den hele tiden har kontakt med mindst et af de to vinkelben BA og BC uden at bryde gennem nogen af dem. Der er nu to muligheder.

I: Hvis begge kurvehalvdele opnår at komme i kontakt med vinkelbenene under en sådan omdrejning, så findes der en drejning, hvor begge har kontakt samtidig. Thi de retninger for hvilke den ene halvdel har kontakt, svarer til en lukket mængde F_1 på enhedscirklen, og de retninger hvor den anden har kontakt, svarer til en lukket mængde F_2. Da foreningsmængden af F_1 og F_2 udgør enhedscirklen, og da denne er sammenhængende, er fællesmængden af F_1 og F_2 ikke tom. Vi vælger en retning fra fællesmængden for at sikre, at begge kurvehalvdele har kontakt samtidig.

I det følgende skal vi bevise, at hvis en kurvehalvdel berører AB i et punkt P, så ligger den inde i den lukkede rhombe. Et ganske symmetrisk argument kan føres for en kurvehalvdel, der berører BC, og sætning 1 vil således være bevist. Antag derfor, at halvkurven fra O over P skærer siden AD i punktet S og har et punkt T uden for AD. Da vil kurven $OPST$ få en længde større end 0.5 i modstrid med, at O var midtpunktet: Længden af kurven $OPST$ > længden af kurven $OPS \geq OP + PS = OP + PS'$, hvor S' er spejlbilledet af S i siden AB. S' ligger på linien n, det tilsvarende spejlbillede af AD. Da vinkel DAB er 60° og BAC er 30°, er n normal til AC i punktet A. Da O ligger på linien BD, der er parallel med n i afstanden 0.5, må $OP + PS'$ være større end eller lig med 0.5. Den herved fremkomne modstrid viser, at kurven $OPST$ ikke løber uden for AD. Beviset holder med mindre modifikation, hvis halvkurven løber $OSTP$. At kurven ikke løber uden for DC følger umiddelbart af, at P's afstand til DC er 0.5.

II: Hvis I ikke er tilfældet, da vil kun den ene kurvehalvdel opnå kontakt med vinkelbenene under en hel omdrejning, og derfor ifølge argumentet fra I være inde i rhomben under hele omdrejningen. Den anden kurvehalvdel vil da aldrig stikke ud af rhomben, for hvis den f.eks. går ud gennem AD eller DC, så ville den jo have kontakt med BC eller AB efter en omdrejning på 180°. Hele kurven vil altså være dækket af rhomben og det endog for enhver drejningsvinkel.

Beviset giver os indblik i, hvorledes de ekstreme kurver, der når frem til AD og DC, ser ud. De er skitseret i figur 4.

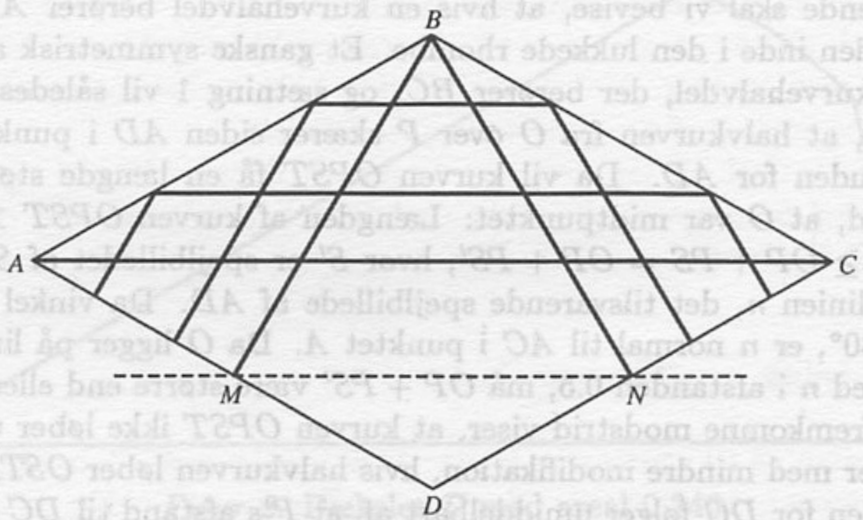


Figur 3. Bevis for at rhomben er et dæksel.

Diskussion af rhombens minimalitet

Med et areal på $\sqrt{3}/6$ eller 0.2887 ligger dette dæksel 17% over det empirisk bestemte dæksel. Vi vender os derfor mod muligheden af at reducere det. Ser man på figur 4, hvor en række kurver er indlejret i rhomben, er det klart, at det meste vi kan gøre os håb om at skære fra, er trekanten MND i bunden, hvorved arealet reduceres med en ottendedel til 0.2526, hvilket står sig pænt mod det empirisk bestemte 0.245.

Desværre er figuren $ABCNM$ ikke et dæksel. Refererende til figur 1 så er kurve E en anelse bredere end kurve C, der er indlejret som NBM i dækslet i figur 4. Den vil altså presse sig gennem bunden MN, men kun med et stykke på 0.004. Vi får altså sandsynligvis et dæksel med et areal på 0.255 efter at MN er sænket 0.004.



Figur 4. $ABCNM$ et dæksel?

Det er dog svært at bevise præcis hvor meget af trekant DNM vi kan skære bort. I forlængelse af argumentationen illustreret i figur 3 er det klart, at vi ikke behøver den del der ligger uden for cirkelbuen med centrum i B og radius 0.5. Vi kan altså med sikkerhed skære bort et stykke på $\sqrt{3}/12 - \pi/24 = 0.0134$, så det resterende dæksel får et areal på 0.2752.

Hvordan det så endeligt viser sig dækslets rand forløber mellem M og N, så tyder en sammenligning med den empiriske kandidat ikke på, at vi når frem til det minimale areal gennem beskæringer af rhomben. Til gengæld kunne den således beskårne rhombe godt vise sig at være dækslet med mindst omkreds, da de i figur 4 viste kurver faktisk ikke kan dækkes af en mindre omkreds end *MNCBA*.

Litteratur

[1] Kelly, L.M. *The geometry of metric and linear spaces. Problem-section.* Springer-Verlag, 1975.

[2] Vestergaard, P.D. *Kakeyaproblemet.* Normat **30** (1982).

[3] Hansen, H.C. *På vej mod det minimale universelle dæksel.* Normat **29** (1981), 115–119.

[4] Yaglom, I.M. og V.G. Boltyanskii. *Convex Figures.* New York, 1961.

[5] Hansen, H.C. *Small universal covers of sets of unit diameter.* Geometriae Dedicata **42** (1992), 205–213.