 Normat **51**:1, 2–14 (2003)

Lineær uafhængighed i funktionsrum

***Khadija Laghrida Christensen*† og *Ole Christensen*‡**

† Danmarksvej 15B
DK–2800 Kgs. Lyngby

‡ Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
Bygning 303
DK–2800 Kgs. Lyngby
Ole.Christensen@mat.dtu.dk

1 Introduktion

Begrebet *lineær uafhængighed* spiller en central rolle i teorien for vektorrum, og dets historie er lige så gammel som vektorrummene selv. Lineær uafhængighed er den ene af de to betingelser der definerer en *basis* $\{v_k\}_{k=1}^n$ for et vektorrum V: mens den ene betingelse er at $\{v_k\}_{k=1}^n$ udspænder V, d.v.s. at ethvert $v \in V$ har en fremstilling $v = \sum_{k=1}^n c_k v_k$ for passende koefficienter $\{c_k\}_{k=1}^n$, så sikrer betingelsen om lineær uafhængighed at fremstillingen er *entydig*.

I denne artikel betragter vi vektorrum frembragt af nogle specielle funktioner og undersøger hvorvidt deres linearkombinationer har entydige fremstillinger. Vi begynder med de mest elementære tilfælde, nemlig vektorrum bestående af henholdsvis polynomier og trigonometriske funktioner. Herefter ser vi på komplekse eksponentialfunktioner og nogle mere komplicerede funktionssystemer, der har spillet en stor rolle i såvel ren matematik som dens anvendelser i de seneste år. I forbindelse med disse funktionssystemer nævner vi et åbent problem, der er nemt at formulere, men tilsyneladende meget svært at løse.

Lad os minde om de basale begreber fra lineær algebra, formuleret for vektorrum bestående af funktioner. Vi begynder med en familie af funktioner $\{f_k\}_{k=1}^n$, der er definerede på et interval $I \subseteq \mathbb{R}$. En *linearkombination* af $\{f_k\}_{k=1}^n$ er en funktion g på I der kan skrives på formen

$$g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x), \qquad x \in I, \tag{1}$$

for passende koefficienter $\{c_k\}_{k=1}^n$. Vi siger at g har en *fremstilling* eller *repræsentation* via funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$. Det kan forekomme at g har forskellige fremstillinger via $\{f_k\}_{k=1}^n$, d.v.s. at forskellige valg af koefficienterne $\{c_k\}_{k=1}^n$ i (1) er mulige. Betragt for eksempel funktionerne

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = 2x + x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Så har funktionen $g(x) = 3x + x^2$ fremstillingerne

$$g = 3f_1 + f_2 = f_1 + f_3.$$

Vi ved fra lineær algebra at spørgsmålet om entydighed af fremstillingen kan formuleres via begrebet lineær uafhængighed:

Definition 1.1 *Lad $\{f_k\}_{k=1}^n$ være en familie af funktioner, definerede på intervallet I. Hvis*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_n(x) = 0 \ \forall x \in I \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

så siges funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$ at være lineært uafhængige; hvis ikke, er funktionerne lineært afhængige.

Lemma 1.2 *Lad g være en linearkombination af funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$. Så har g en entydig repræsentation via funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$ hvis og kun hvis funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige.*

Beviset for lemma 1.2 kan findes i enhver bog om lineær algebra.

Vi har allerede set at lineært afhængige familier af polynomier eksisterer. Der findes imidlertid andre familier af polynomier som er lineært uafhængige. Vi vil nu betragte de mest fundamentale polynomier, nemlig funktionerne

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots.$$

Ethvert polynomium er en linearkombination af disse specielle polynomier, og de er lineært uafhængige på et vilkårligt interval:

Lemma 1.3 *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ være et vilkårligt egentligt interval. Hvis*

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0, \qquad \forall x \in I, \tag{2}$$

så er $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

Man kan bevise dette resultat ved at differentiere funktionen på venstreside af (2) n gange: dette leder til et sæt ligninger, der kun har løsningen $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$.

2 Sinusfunktioner og cosinusfunktioner

I dette afsnit betragter vi lineær uafhængighed for familier af trigonometriske funktioner. Først betragter vi familier $\{f_k\}_{k=1}^n$ af formen

$$f_k(x) = \cos \lambda_k x, \qquad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Et øjebliks eftertanke viser at vi må stille betingelser på tallene λ_k for at sikre at funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige:

Eksempel 2.1 Betragt nogle tal $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ for hvilke $\lambda_1 = -\lambda_2$. Da $\cos x = \cos(-x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ følger det at

$$1 \cdot \cos \lambda_1 x - 1 \cdot \cos \lambda_2 x + 0 \cdot \cos \lambda_3 x + \cdots + 0 \cdot \cos \lambda_n x = 0.$$

Dette viser at funktionerne $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ er lineært afhængige på et vilkårligt interval.

Ovenstående eksempel viser at vi må antage at $|\lambda_k| \neq |\lambda_j|$ for alle $k \neq j$ hvis vi ønsker at funktionerne $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige. Interessant nok viser det sig at denne betingelse er tilstrækkelig for lineær uafhængighed på et *vilkårligt interval.* Vi vil bevise dette resultat; af tekniske grunde betragter vi først et interval der er symmetrisk omkring origo:

Lemma 2.2 *Lad $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ være en følge af reelle tal for hvilke $|\lambda_k| \neq |\lambda_j|$ for $k \neq j$. Så er funktionerne $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ lineært uafhængige på ethvert interval $[-a, a],\ a > 0$.*

Bevis: Lad $a > 0$ være givet, og lad $\{c_k\}_{k=1}^n$ være nogle koefficienter for hvilke

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \lambda_k x = 0, \qquad \forall x \in [-a, a]; \tag{3}$$

vi vil vise at $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Ideen er at differentiere funktionen på venstresiden af (3) j gange, $j = 0, 1, \ldots, 2(n-1)$; ved herefter at sætte $x = 0$ for $j = 0, 2, \ldots, 2(n-1)$ opnår vi et lineært ligningssystem med n ligninger og n

ubekendte,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k^2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k^{2(n-1)} = 0.$$

På matrixform har ligningssystemet formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{2(n-1)} & \lambda_2^{2(n-1)} & \cdots & \lambda_n^{2(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Systemmatricen er en Vandermonde matrix med determinant

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \neq 0;$$

derfor er $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Altså er funktionerne $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ lineært uafhængige. □

Vi udvider nu resultatet til et vilkårligt interval:

Lemma 2.3 *Lad* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ *være en følge af reelle tal for hvilke* $|\lambda_k| \neq |\lambda_j|$ *for* $k \neq j$. *Så er funktionerne* $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ *lineært uafhængige på et vilkårligt egentligt interval.*

Bevis: Det er nok at vise at $\{\cos \lambda_k x\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige, betragtet som funktioner på et vilkårligt begrænset interval af formen $]a, b[$, hvor $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Vi kan antage (eventuelt ved at vælge en mindre værdi for b) at

$$\lambda_k \frac{a+b}{2} \neq h \frac{\pi}{2}, \qquad \forall h \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

for alle k for hvilke $\lambda_k \neq 0$. Vi skal senere se grunden til dette valg. Antag nu at der for nogle koefficienter $\{c_k\}_{k=1}^n$ gælder at

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \lambda_k x = 0, \qquad \forall x \in]a, b[.$$

Når variablen x gennemløber intervallet $\left]\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right[$ vil variablen $x+\frac{a+b}{2}$ gennemløbe $]a,b[$; det følger at

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cos\lambda_k\Big(x+\frac{a+b}{2}\Big) = 0, \qquad \forall x \in \Big]\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\Big[.$$

Ved at bruge additionsformlen for cosinus får vi at

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \Big(\cos\lambda_k x \cos\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - \sin\lambda_k x \sin\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big) = 0, \qquad \forall x \in \Big]\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\Big[.$$

For at simplificere notationen sætter vi nu

$$d_k := c_k \cos\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \text{ og } e_k := c_k \sin\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big).$$

Det følger at

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \cos\lambda_k x - \sum_{k=1}^{n} e_k \sin\lambda_k x = 0, \qquad \forall x \in \Big]\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\Big[. \tag{5}$$

Man kan nu gentage beviset for lemma 2.2, d.v.s. differentiere funktionen på venstresiden og sætte $x = 0$; det følger at $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$. Via valget af tallet b i (4) ved vi at

$$\cos\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \neq 0 \text{ og } \sin\lambda_k\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \neq 0,$$

så vi slutter at $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Så funktionerne $\{\cos\lambda_k x\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige. $\square$

Med nogle få modifikationer gælder et tilsvarende resultat for sinusfunktioner. Bemærk dog $\sin(0\cdot x) = 0$ for alle x: derfor bliver vi i det mindste nødt til at tilføje antagelsen $\lambda_k \neq 0$ for alle k hvis vi ønsker at opnå et lineært uafhængigt system. Denne ekstra betingelse er tilstrækkelig, som læseren kan verificere ved at gentage ovenstående argumenter:

Lemma 2.4 *Lad $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ være en følge af reelle tal for hvilke $\lambda_k \neq 0$ for $k = 1, 2, \ldots, n$ og $|\lambda_k| \neq |\lambda_j|$ for $k \neq j$. Så er funktionerne $\{\sin\lambda_k x\}_{k=1}^n$ lineært uafhængige på ethvert egentligt interval.*

Vi betragter nu det mere komplicerede tilfælde hvor vi har at gøre med en samling af funktioner indeholdende både sinusfunktioner og cosinusfunktioner. Det mest generelle tilfælde er at betragte cosinusfunktioner med nogle parametre λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ og sinusfunktioner med parametre μ_k, $k = 1, \ldots, m$, for passende $m, n \in \mathbb{N}$. Vi betragter altså funktionerne

$$\big\{\cos\lambda_k x\big\}_{k=1}^n \cup \big\{\sin\mu_k x\big\}_{k=1}^m. \tag{6}$$

Sætning 2.5 *Lad* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ *og* $\{\mu_k\}_{k=1}^m$ *være følger af reelle tal for hvilke*

$$\mu_k \neq 0 \text{ for alle } k \text{ og } |\lambda_k| \neq |\lambda_j|, \ |\mu_k| \neq |\mu_j| \text{ for } k \neq j.$$

Så er funktionerne

$$\left\{\cos \lambda_k x\right\}_{k=1}^n \cup \left\{\sin \mu_k x\right\}_{k=1}^m$$

lineært uafhængige på ethvert egentligt interval.

Sætning 2.5 bevises ved hjælp af de teknikker vi allerede har diskuteret. Vi bemærker at sætningen ikke indeholder ekstra antagelser sammenlignet med dem som optræder allerede for systemer bestående af cosinus- og sinusfunktioner betragtet separat.

Lad os relatere dette resultat til teorien for Fourierrækker. Husk at Fourierrækker er et redskab til at udvikle f.eks. 2π-periodiske funktioner via trigonometriske funktioner

$$1, \ \cos x, \ \cos 2x, \ \ldots, \ \cos nx, \ \ldots, \ \sin x, \ \sin 2x, \ \ldots, \ \sin nx, \ \ldots \tag{7}$$

Som et specialtilfælde af vores resultat ser vi at enhver endelig familie af funktioner fra (7) er lineært uafhængig. Vi vender tilbage til Fourierrækker på kompleks form i det næste afsnit.

3 Komplekse eksponentialfunktioner

Dette afsnit kræver kendskab til komplekse tal og Fourierrækker. Vi betegner den komplekse enhed med i. Husk at den *komplekse eksponentialfunktion* $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, er defineret ved

$$e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x.$$

De metoder vi har diskuteret indtil nu kan også bruges til at vise at en familie af komplekse eksponentialfunktioner er lineært uafhængig hvis ingen λ-værdi er gentaget:

Lemma 3.1 *Lad* $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ *være en følge af reelle tal for hvilke* $\lambda_k \neq \lambda_j$ *for* $k \neq j$. *Så er funktionerne* $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k=1}^n$ *lineært uafhængige på et vilkårligt egentligt interval.*

De komplekse eksponentialfunktioner optræder i Fourierrækker på kompleks form: Fourierrækken for en 2π-periodisk funktion kan skrives

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \qquad \text{hvor } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Et hovedresultat i Fourierrækketeorien er at funktionerne $\{1/\sqrt{2\pi} e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ udgør en ortonormal basis for Hilbertrummet

$$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{C} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}.$$

De komplekse eksponentialfunktioner $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er alle 2π-periodiske. Men et generelt system af komplekse eksponentialfunktioner $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, behøver ikke at have en fælles periode. Den matematiske disciplin der beskæftiger sig med egenskaber for funktionerne $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ kaldes *ikke-harmonisk Fourieranalyse.* Ofte kræves en dyb forståelse for kompleks analyse for at kunne begå sig her, og vi vil ikke være i stand til at gå nærmere ind på dette fascinerende emne i denne artikel (vi henviser til bogen [13] for en fremragende præsentation). Der er dog nogle få tilfælde hvor interessante resultater kan opnås med forholdsvis enkle teknikker. Dette er undertiden tilfældet hvis tallene λ_k kan betragtes som små perturbationer af k, d.v.s., hvis $|k-\lambda_k|$ er lille for alle $k\in\mathbb{Z}$. Et vigtigt eksempel på et sådant resultat er den berømte *Kadec's* $1/4$-*sætning:* den siger at hvis $\sup|k-\lambda_k| < 1/4$, så er $\{e^{i\lambda_k x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en basis for $L^2(-\pi,\pi)$. Kadec viste dette resultat i 1963, og et elementært bevis kan findes i [13].

4 Gaborsystemer og wavelets

I dette afsnit betragtes funktionsrummet

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}\colon \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}.$$

De komplekse eksponentialfunktioner betragtet i afsnit 3 tilhører ikke $L^2(\mathbb{R})$. For et vilkårligt $\lambda\in\mathbb{R}$ har vi nemlig at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty.$$

Men hvis $g\in L^2(\mathbb{R})$, så vil funktionen $x\mapsto e^{i\lambda x}g(x-\mu)$ tilhøre $L^2(\mathbb{R})$ for alle $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ fordi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda x}g(x-\mu)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-\mu)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx < \infty.$$

Bemærk at grafen for funktionen $x\mapsto g(x-\mu)$ fås ved at translatere grafen for $g(x)$ med μ enheder. Man kan vise at operationen »multiplikation med $e^{i\lambda x}$« svarer til at translatere den Fouriertransformerede af g, som er defineret ved

$$\hat{g}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi i\gamma x}\,dx.$$

Lad nu $a,b>0$ være givne tal og $g\in L^2(\mathbb{R})$ en given funktion. Vi vil betragte familier af funktioner på formen

$$\left\{e^{2\pi imbx}g(x-na)\right\}_{|m|,|n|\le N}, \tag{8}$$

hvor N er et naturligt tal. Et system af funktioner på formen (8) kaldes et *regulært Gaborsystem.* Hvis $\{(\lambda_m, \mu_n)\}_{|m|,|n|\leq N}$ er en vilkårlig samling punkter i $\mathbb{R}^2$ siges

$$\left\{e^{2\pi i\lambda_m x} g(x-\mu_n)\right\}_{|m|,|n|\leq N}$$

at være et *irregulært Gaborsystem.*

Spørgsmålet om lineært uafhængighed af Gaborsystemer er meget kompliceret. Heil, Ramanathan and Topiwala betragtede det i 1994 og var i stand til at opstille betingelser der sikrer at et Gaborsystem er lineært uafhængigt. Baseret på de opnåede resultater opstillede de tre forfattere følgende

Formodning: Et *vilkårligt* Gaborsystem $\{e^{2\pi i\lambda_m x} g(x-\mu_n)\}_{|m|,|n|\leq N}$ med $g \neq 0$ er lineært uafhængigt hvis punkterne $\{(\lambda_m, \mu_n)\}_{|m|,|n|\leq N}$ alle er forskellige.

Linnell var i 1996 i stand til at vise denne formodning for regulære Gaborsystemer, men hans metoder virker ikke i det irregulære tilfælde. Adskillige forskere har siden da forsøgt at vise/modbevise formodningen, men det er endnu ikke lykkedes.

Gaborsystemer bruges hyppigt i forbindelse med signalanalyse. Et andet, og endnu mere populært system i denne sammenhæng, er waveletsystemer. Givet en funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ og et naturligt tal N består det tilhørende *waveletsystem* af funktionerne

$$\left\{2^{j/2}\psi(2^j x-k)\right\}_{|j|,|k|\leq N}. \tag{9}$$

For simpelheds skyld skrives

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x-k), \qquad j,k\in\mathbb{Z};$$

så kan waveletsystemet i (9) skrives på formen $\{\psi_{j,k}\}_{|j|,|k|\leq N}$.

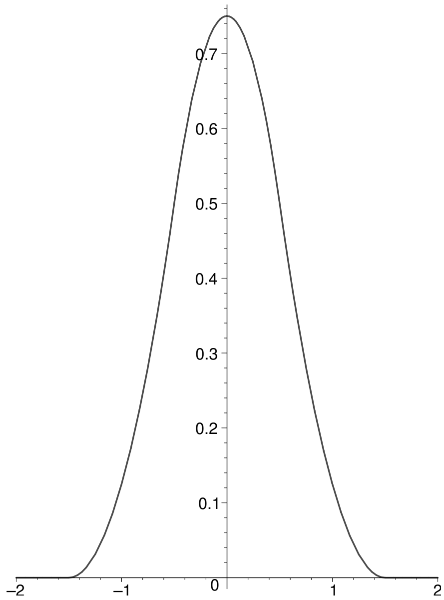
Lineært afhængige waveletsystemer findes. Sæt for eksempel $\psi := \chi_{[0,1[}$, altså den karakteristiske funktion for intervallet $[0,1[$; så er

$$\psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{2,0}+\psi_{2,1}).$$

Et mere avanceret eksempel på en funktion der genererer et lineært afhængigt waveletsystem er givet ved (vi springer beregningen over og henviser til [4])

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{8} & \text{for } x\in[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}],\\ -x^2+\frac{3}{4} & \text{for } x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}],\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{8} & \text{for } x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}],\\ 0 & \text{ellers.}\end{cases} \tag{10}$$

Se figur 1. Funktionen i (10) er et eksempel på en *spline af grad* 2, d.v.s. en funktion der er stykkevist polynomial, og hvor den højeste grad af de indgående polynomier er 2. Man kan vise at der findes lineært afhængige waveletsystemer frembragt af splines af vilkårlig høj orden.



Figur 1: Funktionen ψ i (10).

5 *Frames i* $L^2(\mathbb{R})$

Dette sidste afsnit er mere avanceret end de foregående, og skal forklare den rolle som Gaborsystemer og wavelets har i forbindelse med repræsentationer af funktioner. For at kunne gøre dette er vi nødt til at forlade rammen af endeligdimensionale vektorrum og betragte uendelige systemer af funktioner.

$L^2(\mathbb{R})$ er et meget stort funktionsrum, i den forstand at man kan finde vilkårligt store familier af lineært uafhængige funktioner i $L^2(\mathbb{R})$. Betragt for eksempel funktionerne $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ givet ved

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k & \text{for } |x| < 1, \\ 0 & \text{ellers;} \end{cases}$$

de tilhører alle $L^2(\mathbb{R})$, og ifølge lemma 1.3 er enhver endelig delfamilie lineært uafhængig.

Størrelsen af vektorrummet $L^2(\mathbb{R})$ gør det kompliceret at arbejde med $L^2(\mathbb{R})$. For eksempel kan vi ikke vælge en endelig samling af funktioner $\{f_k\}_{k=1}^{n}$ således at enhver funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ har en fremstilling på formen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x).$$

Men der findes uendelige familier $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ således at ethvert $f \in L^2(\mathbb{R})$ har en repræsentation

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x) \tag{11}$$

for passende valgte koefficienter $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Hvis f.eks. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en ortonormal basis for $L^2(\mathbb{R})$, så holder (11) i $L^2(\mathbb{R})$-forstand med

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f_k(x)}\,dx.$$

Elementerne i en ortonormal basis er lineært uafhængige, men fremstillinger af typen (11) kan meget vel holde for lineært afhængige familier $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. En general måde at opnå sådanne repræsentationer på er at betragte *frames*:

Definition 5.1 *En familie af funktioner $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $L^2(\mathbb{R})$ er en frame for $L^2(\mathbb{R})$ hvis der findes konstanter $A, B > 0$ således at*

$$A\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f_k(x)}\,dx \right|^2 \le B\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \tag{12}$$

for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$.

En ortonormal basis er automatisk en frame; på den anden side er en frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ en ortonormal basis hvis (12) holder med $A = B = 1$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x)|^2 dx = 1, \qquad \forall k.$$

Mere generelt gælder at en frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en basis hvis

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k = 0 \implies c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Bemærk at (13) kan betragtes som en uendeligdimensional udgave af betingelsen for lineær uafhængighed.

Man kan vise at en frame $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ leder til en repræsentation af typen (11), hvor koefficienterne $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ i udviklingen af $f \in L^2(\mathbb{R})$ har formen

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{h_k(x)}\,dx$$

for en vis familie af funktioner $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $L^2(\mathbb{R})$. Men i modsætning til situationen for en basis kan der meget vel eksistere andre mulige valg af koefficienterne $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Betragt f.eks. en ortonormal basis $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$: så er $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{f_1\}$ en frame, og alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ has adskillige repræsentationer af type (11).

Vi er nu klar til at relatere Gaborsystemer og frames. Hvis et uendeligt Gaborsystem $\{e^{2\pi imbx}g(x-na)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ er en frame kalder vi den simpelthen for en *Gaborframe*.

Eksempel 5.2 Lad $\chi_{[0,1]}$ betegne den karakteristiske funktion for intervallet $[0,1]$. Man kan vise at hvis $b=1$ og $a \in]0,1]$, så er

$$\left\{e^{2\pi imbx}\chi_{[0,1[}(x-na)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$$

en Gaborframe for $L^2(\mathbb{R})$.

For en vilkårlig Gaborframe $\{e^{2\pi imbx}g(x-na)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ fortæller den generelle frameteori at enhver funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ har en fremstilling af typen (11). Der gælder endda mere: man kan vise at der findes en funktion $h \in L^2(\mathbb{R})$ således at enhver funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ har fremstillingen

$$f(x) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}(f)e^{2\pi imbx}g(x-na), \tag{14}$$

hvor

$$c_{m,n}(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi imbx}\overline{h(x-na)}\,dx. \tag{15}$$

Et overraskende resultat om Gaborframes siger at koefficienterne $c_{m,n}(f)$ in (14) *aldrig* er entydige hvis $ab<1$: vi kan altid vælge koefficienterne som i (15), men der eksisterer andre valgmuligheder. Sammenlign dette med Linnell's resultat, der viser at en funktion f *højst har een repræsentation som en endelig sum*

$$f(x) = \sum_{|m|,|n|\le N} c_{m,n}(f)e^{2\pi imbx}g(x-na).$$

Der er således en fundamental forskel mellem endelige og uendelige Gaborsystemer. Specielt garanterer den lineære uafhængighed af de endelige delsystemer altså *ikke* entydigheden af repræsentationen i (14). Forklaringen er at det korrekte begreb for lineær uafhængighed i $L^2(\mathbb{R})$ er givet ved (13), som er en stærkere betingelse end bare lineær uafhængighed af *endelige* delmængder $\{f_k\}_{k=1}^n$. Det vides hvorledes de to begreber er relaterede for en generel frame $\{f_k\}_{k=1}^\infty$: (13) gælder hvis og kun hvis $\{f_k\}_{k=1}^n$ er lineært uafhængige for alle $n\in\mathbb{N}$ og

$$\inf_n \min_f \left\{\sum_{k=1}^n \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f_k(x)}\,dx\right|^2 : f\in \operatorname{span}\{f_k\}_{k=1}^n, \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = 1\right\} > 0.$$

Lad os for et øjeblik vende tilbage til eksempel 5.2. Man kan vise at det betragtede Gaborsystem med $g=\chi_{[0,1]}$ er en ortonormal basis hvis $a=b=1$. Det er derfor ikke umiddelbart klart hvorfor vi har brug for det mere komplicerede framebegreb. Forklaringen er at frames er mere fleksible end ortonormalbaser: selvom der eksisterer ortonormalbaser med Gaborstruktur kan vi ikke være sikre på at der findes ortonormalbaser der tilfredsstiller ekstra krav der måtte være relevante i en given sammenhæng. Men måske findes frames der tilfredsstiller dem! Dette er ikke bare en tænkt situation, men forekommer i praksis. Et konkret eksempel optræder i forbindelse med den såkaldte *Balian–Lows sætning:* den siger, at hvis en funktion g genererer en ortonormalbasis med Gaborstruktur, så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma \hat{g}(\gamma)|^2 \, d\gamma = \infty. \tag{16}$$

I ord siger dette resultat at det er umuligt at både g og $\hat{g}$ aftager hurtigt; dette er meget ubekvemt i forbindelse med signalanalyse, og tvinger bl. a. computerbaserede metoder til at arbejde med store intervaller. Den gode nyhed er at Gaborframes ikke lider under denne begrænsning: der findes funktioner g som genererer en Gaborframe, og for hvilke produktet i (16) er endeligt. Et konkret eksempel er funktionen $g(x) = e^{-x^2}$, som frembringer en frame hvis $ab < 1$. For denne funktion er $\hat{g}(\gamma) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \gamma^2}$, så produktet i (16) er endeligt. Læsere der vil vide mere om Gaborsystemer henvises til bogen [8].

Visse uendelige waveletsystemer leder også til repræsentationer af alle funktioner i $L^2(\mathbb{R})$. D.v.s., der findes funktioner $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ for hvilke ethvert $f \in L^2(\mathbb{R})$ har en repræsentation

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \tag{17}$$

Eksistensen af lineært afhængige waveletsystemer er af fundamental betydning i waveletteori: de fleste konstruktioner af funktioner ψ for hvilke repræsentationer af type (17) eksisterer for alle $f \in L^2(\mathbb{R})$, er baseret på en funktion φ der tilfredsstiller en ligning af formen

$$\varphi(x) = \sum_{|k| \leq N} c_k \varphi(2x - k). \tag{18}$$

Betingelsen (18) betyder at waveletsystemet $\{\varphi_{j,k}\}_{|j| \leq 1, |k| \leq N}$ er lineært afhængigt.

Waveletanalyse er i øjeblikket et af de mest aktive forskningsområder indenfor matematikken, fordi emnet er matematisk fascinerende og vigtigt for anvendelser på samme tid. En stor del af waveletteorien har som formål at konstruere funktioner ψ således at $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ er en ortonormalbasis for $L^2(\mathbb{R})$. Disse undersøgelser blev indledt af Mallat og Meyer i 1989, som udviklede den såkaldte *multiresolution analyse*. Videre studier af Daubechies viste hvorledes man kan konstruere en ortonormalbasis $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ baseret på en funktion φ der tilfredsstiller (18) samt et par andre betingelser. Det er interessant at notere at de første framekonstruktioner med waveletstruktur fandt sted tidligere, nemlig i 1985; forfatterne var Daubechies, Grossmann og Meyer [6]. Frames er også attraktive i forbindelse med wavelets på grund af deres fleksibilitet: man kan undertiden konstruere waveletframes med egenskaber som en ortonormalbasis ikke kan have. (Eksempel: man kan finde en frame $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ for hvilken ψ er uendeligt ofte differentiabel og aftager eksponentielt. Der findes ingen basis af denne type.) Mere information om wavelets kan findes i bøgerne [5] af Daubechies (en klassiker indenfor området) og [12] af Walnut (der er teknisk lettere tilgængelig). Mere intuitive fremstillinger beregnet for lægfolk findes i [2] og [3].

Framebegrebet blev faktisk introduceret meget tidligere, nemlig i artiklen [7] af Duffin og Schaeffer, publiceret i 1952. Tilsyneladende var denne artikel langt forud for sin tid, og det tog næsten 30 år før frames optrådte på tryk igen. Duffin og Schaeffer indførte frames som et redskab i forbindelse med ikke-harmoniske Fourierrækker, men gav alligevel en framedefinition der er gyldig i et vilkårligt separabelt Hilbertrum. For yderligere information om frames henvises til [4].

Acknowledgment: Khadija Laghrida Christensen takker *Rejselegat for Matematikere* for støtte og Dr. Alexander Lindner for interessante diskussioner og forslag. Begge forfattere takker en anonym referee for mange gode forslag til forbedring af fremstillingen.

Bibliografi

1 Brislawn, C. M: *Fingerprints go digital.* Notices of the Amer. Math. Soc. **42**, 1278–1283 (1995).

2 Hubbard, B. B.: *The world according to wavelets: The story of a mathematical technique in the making.* AK Peters, Ltd, Wellesley, MA, 1996.

3 Christensen, K. L. and Christensen, O.: *Fra Taylorpolynomier til wavelets.* Den Private Ingeniørfond ved Danmarks Tekniske Universitet, 2003.

4 Christensen, O.: *An introduction to frames and Riesz bases.* Birkhäuser 2003.

5 Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets.* SIAM, Philadelphia, 1992.

6 Daubechies, I., Grossmann, A. and Meyer, Y.: *Painless nonorthogonal expansions.* J. Math. Phys. **27**, 1271–1283 (1986).

7 Duffin, R.J. and Schaeffer, A.C.: *A class of nonharmonic Fourier series.* Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 341–366 (1952).

8 Gröchenig, K.: *Foundations of time-frequency analysis.* Birkhäuser, Boston, 2001.

9 Heil, C., Ramanathan, J. and Topiwala, P.: *Linear independence of time-frequency translates.* Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 2787–2795 (1996).

10 Hirsch, M. and Smale, S.: *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Academic Press, 1974.

11 Linnell, P.: *Von Neumann algebras and linear independence of translates.* Proc. Amer. Math. Soc. **127**, 3269–3277 (1999).

12 Walnut, D.: *An introduction to wavelet analysis.* Birkhäuser, Boston, 2002.

13 Young, R. M.: *An introduction to nonharmonic Fourier series.* Academic Press, New York, 1980 (revised first edition 2001).