Normat **51**:1, 1001–1010 (2003)

Hvor mange bankoplader er der?

Nils Andersen

Datalogisk Institut
Københavns Universitet
Universitetsparken 1
DK–2100 København Ø
nils@diku.dk

Indledning

Banko er et umådelig populært spil i Danmark. Beregning af, hvor mange forskellige bankoplader der kan konstrueres[1], er en interessant anledning til at komme ind på en række grundlæggende kombinatoriske principper.

Nærmere beskrevet er spillet et lotteri, hvor deltagerne køber spilleplader med fortrykte numre. Lederen af spillet udtrækker i tilfældig rækkefølge numrene, som råbes op, og spillerne markerer de udtrukne numre på deres plader. Den første, som får en vandret række eller alle en plades numre markeret, har gevinst og råber »banko!«.

Specifikation

I en meget udbredt version af spillet gælder om spillepladerne:

1. Der benyttes numrene fra og med 1 til og med 90.

2. En spilleplade er rektangulær, med 3 (vandrette) rækker og 9 (lodrette) søjler, og hver spilleplade rummer 15 forskellige numre. Hver plade har derfor ud over numrene 12 blanke felter.

[1] Spørgsmålet blev stillet i et brev til en af eksperterne bag den elektroniske brevkasse »Spørg Naturvidenskaben« `http://www.formidling.dk/sn/`.

3. Numrene er sådan fordelt på pladen, at der mindst er et tal i hver søjle og netop 5 tal i hver række.
4. Idet søjlerne benævnes $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_7, s_8$, skal et encifret nummer stå i s_0 og et tocifret nummer i søjlen svarende til nummerets forreste ciffer (tier-cifferet); også nummer 90 placeres i s_8. De tal, hver søjle kan rumme, er med andre ord s_0: 1 til 9, s_1: 10 til 19, s_2: 20 til 29 og så fremdeles op til s_7: 70 til 79 og s_8: 80 til 90.
5. I den enkelte søjle placeres numrene i stigende orden læst ovenfra og ned.

Eksempel på en banko-plade:

(1)

2	10			42		61		86
	14		30		53		70	87
7		21	32			65		90

Opgaven er nu at bestemme, hvor mange forskellige plader der kan konstrueres, som opfylder kravene 1.–5. Spørgeren har en formodning om, at antallet er så stort, at hvert menneske på jorden kunne få adskillige plader at spille på, uden at der blev brug for dubletter.

Analyse

Det er vigtigt at bemærke, at numrenes placering på pladen har betydning. Nedenstående plade (med en anden placering af 42 og 53) er således forskellig fra (1):

(2)

2	10				53	61		86
	14		30	42			70	87
7		21	32			65		90

Grunden er naturligvis, at de to plader kan give forskellig gevinst, når der spilles på rækker, men forholdet betyder, at selv om hver plade angiver en delmængde på 15 elementer fra mængden $\{1, 2, 3, \ldots, 89, 90\}$, så er korrespondancen mellem delmængder og plader meget mangelfuld: På den ene side betyder krav 4, at ikke alle delmængder svarer til en bankoplade (for der skal være mindst et tal med hvert tierciffer og højst tre tal med samme tierciffer), på den anden side kan samme delmængde svare til flere plader (som for eksempel (1) og (2), der har de samme 15 numre).

Som det ofte er tilfældet med problemer hentet fra den virkelige verden, er der ikke nogen af kombinatorikkens skabeloner, som lige passer i det aktuelle tilfælde, men vi kan nærme os et svar på spørgsmålet ved at begynde med grove forenklinger og gradvis inddrage flere og flere af kravene 1–5.

Femten udvalgt blandt halvfemsindstyve

Selvom vi lige har indset, det ikke fører til det rigtige svar, kunne det måske alligevel være interessant at overveje, på hvor mange måder man kan vælge 15 forskellige af tallene 1–90. I det mindste kan kombinatorikken her levere en færdig formel, for det er jo den velkendte *binomialkoefficient* $\binom{90}{15}$, der kan beregnes som

$$\frac{90!}{15!\cdot 75!}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86\cdot 85\cdot 84\cdot 83\cdot 82\cdot 81\cdot 80\cdot 79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

og har værdien 45795 673964 460816, altså mere end 45 billiarder.

Signatur

Lad os et øjeblik se bort fra kravet om, at der netop skal være fem numre i hver række, og blot overveje, hvilke begrænsninger der ligger i at placere femten numre på en plade, hvor ingen af de ni søjler må være tomme. Lad os for en forelagt bankoplade bruge henholdsvis a, b og c som betegnelse for antallet af søjler med netop 1 talplads (2 blanke felter), 2 talpladser (1 blankt felt) og 3 talpladser (ingen blanke felter), og lad os kalde triplet (a,b,c) for pladens *signatur.*

Signaturen for (1) er for eksempel $(4,4,1)$.

Det oprindelige krav 2 betyder, at signaturer må opfylde

$$\begin{aligned} a+2b+3c&=15,\\ a+b+c&=9. \end{aligned}$$

Ved subtraktion fås $b+2c=6$, og da antallene skal være ikke-negative heltal, bliver der kun fire muligheder: $c=0$, 1, 2 eller 3. Ved indsættelse findes fire mulige signaturer $(a,b,c)=(3,6,0)$, $(4,4,1)$, $(5,2,2)$ eller $(6,0,3)$. Det er let at se, at der faktisk også findes bankoplader med hver af de fire signaturer.

Mulige nummermængder

De delmængder af 15 numre, som kan komme på tale, skal have 1, 2 eller 3 numre i hver søjle. Indføres betegnelserne $h_0=9$, $h_1=h_2=\ldots=h_7=10$ og $h_8=11$, kan man i søjlen s_m vælge 1, 2 og 3 numre på henholdsvis $\binom{h_m}{1}$, $\binom{h_m}{2}$ og $\binom{h_m}{3}$ måder. Det kunne være interessant at vide, hvor mange delmængder der fremkommer på den måde. Ved at tage søjlerne i betragtning efter tur og generalisere problemet til et varierende antal numre kan man nå frem til en *rekursionsformel* for antallet af delmængder.

Lad $d_{m;n}$ betegne antallet af delmængder med n numre, som har mellem 1 og 3 numre med fra hvert af de m første af de intervaller, der er beskrevet i krav 4 i den indledende specifikation.

Da gælder

$$(3)\quad d_{m;n} = \begin{cases} 0 & \text{med mindre } m \le n \le 3m, \\ 1 & \text{hvis } m = n = 0, \\ \binom{h_{m-1}}{1} d_{m-1;n-1} + \binom{h_{m-1}}{2} d_{m-1;n-2} & \\ \quad + \binom{h_{m-1}}{3} d_{m-1;n-3} & \text{for } 1 \le m \le 9. \end{cases}$$

Antallet $d_{9;15}$ af mulige nummermængder på en bankoplade beregnes heraf til 6080 082602 343750, så det er kun cirka 13% af alle delmængder med 15 numre, som faktisk kan forekomme på en plade.

Dynamisk programmering

Rekursionsligningerne (3) har en form, så de direkte lader sig indtaste i et computerprogram, men gør man bare det uden videre, vil programmet beregne de samme værdier flere gange. Grunden hertil er illustreret i figur 1, der viser de indbyrdes afhængigheder af de 46 værdier $d_{m;n} \neq 0$, som skal bruges under beregning af $d_{9;15}$ i henhold til (3).

$d_{7;10}$ ville for eksempel blive beregnet to gange, da den både skal bruges i udtrykket for $d_{6;12}$ og for $d_{6;13}$, og i almindelighed ville $d_{m;n}$ blive beregnet lige så mange gange som antallet af stier, der i grafen på figur 1 forbinder knuden $d_{m;n}$ med roden $d_{9;15}$; specielt ville $d_{0;0}$ blive beregnet 1554 gange.

For at undgå dette ressourcespild kan man sideløbende med beregningerne ajourføre en tabel over tidligere beregnede par af argument og funktionsværdi. En metode, som på den måde ud over de rent funktionelle sammenhænge også benytter en løbende *tilstand*, siges at bruge *dynamisk programmering* — et nyttigt princip, der ofte anvendes i operationsanalyse.[2]

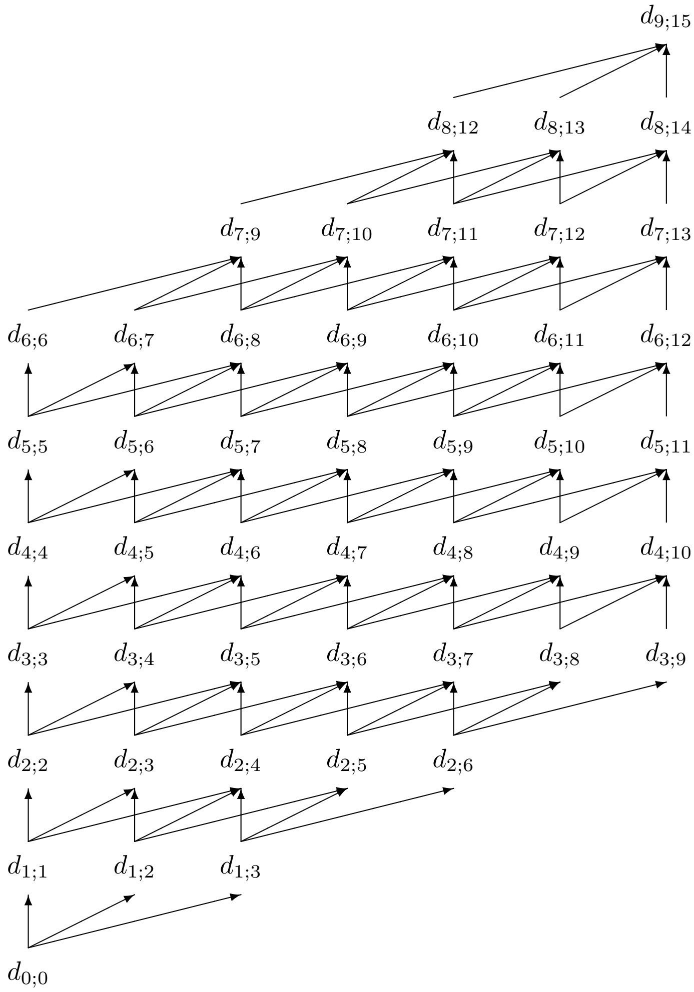
Frembringerfunktion

Mange kombinatoriske problemer er knyttet til en talfølge $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$; vi kan her specielt forstå »problem« som »udvalgte kombinationer af elementer«, og a_n er da antallet af den slags kombinationer med netop n elementer.

Hvis A og B er to sådanne problemer, knyttet til henholdsvis $(a_n)_{n=0,1,\ldots}$ og $(b_n)_{n=0,1,\ldots}$, og man forbinder A og B til et nyt problem C ved, at en C-kombination skal være foreningen af en A- og en B-kombination, knyttes det nye problem til en talfølge $(c_n)_{n=0,1,\ldots}$, hvor

$$(4)\qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

[2] Tak til den anonyme referent for forslaget om at inddrage rekursionsligninger og dynamisk programmering.



Figur 1: Sammenhænge ved beregning af $d_{9;15}$ i henhold til (3).

Udtrykket for c_n er netop koefficienten til x^n i potensrækkeproduktet $\sum_{i=0} a_i x^i \cdot \sum_{j=0} b_j x^j$. Hvis man derfor til et kombinatorisk problem A med tilknyttet talfølge $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ danner[3] dets såkaldte *frembringerfunktion*, som er den formelle potensrække $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, vil multiplikation af frembringerfunktionerne svare til den beskrevne forbindelse af de tilsvarende problemer.

Rekursionsligningen (3) har netop formen (4). Frembringerfunktionen for valg af numre fra søjle s_g er $\binom{h_g}{1} x + \binom{h_g}{2} x^2 + \binom{h_g}{3} x^3$, og for numre i de første m søjler

[3] Med x forstået som talfølgen $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ og passende definition af addition og multiplikation af talfølger kan potensrækken identificeres med talfølgen.

bliver

$$\sum_{n=m}^{3m} d_{m;n}x^n = \prod_{g=0}^{m-1}\left(\binom{h_g}{1}x + \binom{h_g}{2}x^2 + \binom{h_g}{3}x^3\right).$$

Vi søger $d_{9;15}$ i hele pladens frembringerfunktion

$$\sum_{n=9}^{27} d_{9;n}x^n = \left(\binom{9}{1}x + \binom{9}{2}x^2 + \binom{9}{3}x^3\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\binom{10}{1}x + \binom{10}{2}x^2 + \binom{10}{3}x^3\right)^7\cdot\left(\binom{11}{1}x + \binom{11}{2}x^2 + \binom{11}{3}x^3\right)$$

Til computere findes færdige programsystemer, som kan regne formelt med polynomier. Med lidt omhu er det dog ikke umuligt at foretage beregningerne uden computer. Udtrykket har værdien $(9x+36x^2+84x^3)(10x+45x^2+120x^3)^7(11x+55x^2+165x^3) = 3x\cdot(5x)^7\cdot{}^{11}x(3+12x+28x^2)(2+9x+24x^2)^7(1+5x+15x^2)$, og koefficienten til x^{15} er beregnet i tabel 1, hvor f_n er koefficienterne defineret ved $(3+12x+28x^2)(1+5x+15x^2) = \sum_{n=0}^{4} f_n x^n$. Her benyttes også *multinomialformlen*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}.$$

Værdien af *multinomialkoefficienterne* udregnes af $\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

Vi genfinder værdien beregnet ved dynamisk programmering.

koefficient f_n	p	q	r	$f_n\cdot 2^p9^q24^r\binom{7}{p\ q\ r}$
$f_0 = 3\cdot 1$	1	6	0	22 320522
	2	4	1	198 404640
	3	2	2	235 146240
	4	0	3	23 224320
$f_1 = 12\cdot 1 + 3\cdot 5$	2	5	0	133 923132
	3	3	1	529 079040
	4	1	2	235 146240
$f_2 = 28\cdot 1 + 12\cdot 5 + 3\cdot 15$	3	4	0	244 331640
	4	2	1	434 367360
	5	0	2	51 480576
$f_3 = 28\cdot 5 + 12\cdot 15$	4	3	0	130 636800
	5	1	1	92 897280
$f_4 = 28\cdot 15$	5	2	0	22 861440
	6	0	1	4 515840
				2358 335070
			$\cdot 3\cdot 5^7\cdot 11 =$	*6080 082602 343750*

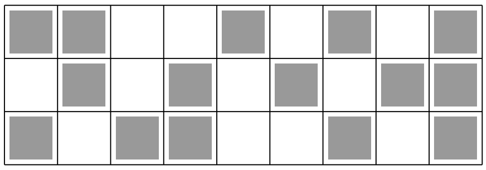
Tabel 1: Antallet af delmængder med 15 numre, der er mulige på en bankoplade.

Belægninger

En bankoplade kan ikke entydigt fastlægges ud fra sine 15 numre, men det er klart, at hvis man tillige bestemmer, hvor de blanke felter skal være, så betyder krav 5, at numrene kun kan fyldes i på én måde. Det kunne derfor være nyttigt at se på fordelingen af de blanke felter og udfyldningen med numre hver for sig.

Lad os kalde en plade, hvor det er besluttet, hvor der skal være numre, og hvor der skal være blanke felter, men hvor der endnu ikke er fyldt numre i, for en *belægning*. Her er for eksempel belægningen svarende til (1):

(5)



Selv om dette heller ikke besvarer vores hovedopgave, kunne man spørge, hvor mange forskellige belægninger der egentlig findes?

Også her kan man skaffe sig en rekursionsformel ved at tage søjlerne i betragtning efter tur, men da vi skal nå frem til netop fem numre i hver række, er det nødvendigt at holde styr på rækkerne hver for sig.

Lad $b_{m;i,j,k}$ betegne antallet af belægninger af en $(3 \times m)$-matrix, hvor der er henholdsvis i, j og k nummerfelter i hver af de tre rækker og mindst et nummerfelt i hver søjle. Da gælder

$$b_{m;i,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{med mindre } 0 \le i,j,k \le m \le i+j+k, \\ 1 & \text{hvis } m=i=j=k=0, \\ b_{m-1;i-1,j,k} + b_{m-1;i,j-1,k} + b_{m-1;i,j,k-1} & \\ \quad + b_{m-1;i-1,j-1,k} + b_{m-1;i-1,j,k-1} + b_{m-1;i,j-1,k-1} & \\ \quad + b_{m-1;i-1,j-1,k-1} & \text{for } 1 \le m. \end{cases}$$

Den søgte værdi $b_{9;5,5,5}$ kan nu let beregnes ved dynamisk programmering, men frembringerfunktioner (som nu må generaliseres til flere variable) er et elegant alternativ. Et enkelt felt på pladen kan enten lades blankt eller vælges som nummerfelt og har frembringerfunktionen $1+x$; de tre felter i en søjle ville så have frembringerfunktionen $(1+x)^3$, hvis man kunne vælge frit, men da søjlen ikke må lades helt blank, skal vi her bruge $(1+x)^3-1$. Da vi tillige ønsker at holde styr på de tre rækker hver for sig, kan vi bruge henholdsvis x, y og z og lade frembringerfunktionen for en søjle være

$$(1+x)(1+y)(1+z)-1 = x+y+z+xy+xz+yz+xyz.$$

Leddene svarer på oplagt måde til de syv muligheder for en søjle: y betyder kun et nummer i midterste række, xz to numre, hvor det ene står i øverste og det andet i nederste række, og så videre.

Frembringerfunktionen for en plade med m søjler bliver

$$\sum_{i,j,k=0,\ldots,m} b_{m;i,j,k} x^i y^j z^k = \big((1+x)(1+y)(1+z)-1\big)^m.$$

Koefficienten $b_{9;5,5,5}$ er det efterspurgte antal lovlige belægninger. Ved at bruge binomialformlen et par gange finder man denne koefficient til

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{9}{i} \binom{9-i}{5}^3$$
$$= \binom{9}{0} \cdot \binom{9}{5}^3 - \binom{9}{1} \cdot \binom{8}{5}^3 + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{5}^3 - \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{5}^3 + \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5}^3$$
$$= 735210.$$

Samme formel kunne man i øvrigt være nået frem til ved at benytte princippet med »at medregne og udelukke«, som kan findes beskrevet i enhver lærebog i kombinatorik.

Bankoplader

For en given belægning er det let at beregne antallet af måder, hvorpå den kan udfyldes til en bankoplade. Antallet af plader med belægningen (5) er for eksempel

$$\binom{9}{2}\binom{10}{1}^4\binom{10}{2}^3\binom{10}{3}^0\binom{11}{3} = 36 \cdot 10^4 \cdot 45^3 \cdot 120^0 \cdot 165 = 5\,412825\,000000$$

og (1) er altså en af disse mange muligheder.

På samme måde kunne man i princippet gå de øvrige 735209 belægninger igennem og finde antallet af plader for hver af dem – men i praksis er det naturligvis uoverkommeligt.

Man kunne godt komme igennem ved at gruppere belægningerne i ækvivalensklasser med samme antal udfyldninger. Man kunne for eksempel regne to belægninger for ækvivalente, hvis den ene kunne føres over i den anden ved en permutation af rækkerne og af de midterste søjler s_1 til s_7, men der ville blive 146 forskellige klasser, og beregningerne ville blive lidt omstændelige.

Det er smartere endnu en gang at benytte frembringerfunktioner eller rekursionsligninger. Lad $a_{m;i,j,k}$ være antallet af $(3 \times m)$-matricer, hvis søjler er udfyldt i overensstemmelse med krav 4 i den indledende specifikation, og hvor der er henholdsvis i, j og k numre i hver af de tre rækker.

Frembringerfunktionen for sådanne (3×9)-matricer bliver

$$\sum_{i,j,k=0,\ldots,9} a_{9;i,j,k} x^i y^j z^k = \left(\binom{9}{1}(x+y+z) + \binom{9}{2}(xy+xz+yz) + \binom{9}{3}xyz\right)$$
$$\cdot \left(\binom{10}{1}(x+y+z) + \binom{10}{2}(xy+xz+yz) + \binom{10}{3}xyz\right)^7$$
$$\cdot \left(\binom{11}{1}(x+y+z) + \binom{11}{2}(xy+xz+yz) + \binom{11}{3}xyz\right),$$

og det søgte antal lovlige bankoplader er koefficienten $a_{9;5,5,5}$ i dette udtryk.

signatur a, b, c	koefficient til $x^5y^5z^5$ i $u^av^bw^c$	faktor f	p	q	r	$f \cdot 2^p 9^q 24^r \binom{7}{p\ q\ r}$
$(3, 6, 0)$	1710	$12 \cdot 5$	3	4	0	110 224800
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	2	5	0	133 923132
		$3 \cdot 1$	1	6	0	22 320522
						266 468454
					$\cdot 1710 =$	*455661 056340*
$(4, 4, 1)$	639	$28 \cdot 5 + 12 \cdot 15$	4	3	0	130 636800
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	3	4	0	134 106840
		$12 \cdot 5$	4	2	1	195 955200
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	3	3	1	529 079040
		$3 \cdot 1$	2	4	1	198 404640
						1188 182520
					$\cdot 639 =$	*759248 630280*
$(5, 2, 2)$	240	$28 \cdot 15$	5	2	0	22 861440
		$28 \cdot 5 + 12 \cdot 15$	5	1	1	92 897280
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	4	2	1	238 412160
		$12 \cdot 5$	5	0	2	23 224320
		$12 \cdot 1 + 3 \cdot 5$	4	1	2	235 146240
		$3 \cdot 1$	3	2	2	235 146240
						847 687680
					$\cdot 240 =$	*203445 043200*
$(6, 0, 3)$	90	$28 \cdot 15$	6	0	1	4 515840
		$28 \cdot 1 + 3 \cdot 15$	5	0	2	28 256256
		$3 \cdot 1$	4	0	3	23 224320
						55 996416
					$\cdot 90 =$	*5039 677440*
						1 423394 407260
					$\cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 11 =$	**3 669688 706217 187500**

Tabel 2: Antallet af lovlige bankoplader.

Med et programsystem til symbolsk regning aflæses denne koefficient til tallet 3 669688 706217 187500; tabel 2 viser, hvordan man med lidt tålmodighed også kan finde værdien uden brug af EDB. Lad os indføre betegnelserne u, v og w for[4] $u = x + y + z$, $v = xy + xz + yz$ og $w = xyz$. En fuldstændig beregning af $3 \cdot 5^7 \cdot 11(3u + 12v + 28w)(2u + 9v + 24w)^7(u + 5v + 15w)$ er ikke nødvendig, for kun produkter af formen $u^av^bw^c$, hvor (a, b, c) er en af de fire signaturer, kan indeholde led af formen $x^5y^5z^5$.

[4]Disse udtryk kaldes de tre første *elementarsymmetriske polynomier*

Rekursionsformel

De tilsvarende rekursionsligninger er

$$a_{m;i,j,k} = \begin{cases} 0 & \text{med mindre } 0 \leq i, j, k \leq m \leq i+j+k, \\ 1 & \text{hvis } m = i = j = k = 0, \\ \binom{h_{m-1}}{1}(a_{m-1;i-1,j,k} + a_{m-1;i,j-1,k} + a_{m-1;i,j,k-1}) \\ \quad + \binom{h_{m-1}}{2}(a_{m-1;i-1,j-1,k} + a_{m-1;i-1,j,k-1} + a_{m-1;i,j-1,k-1}) \\ \quad + \binom{h_{m-1}}{3} a_{m-1;i-1,j-1,k-1} \\ & \text{for } 1 \leq m \leq 9. \end{cases}$$

Beregnes $a_{9;5,5,5}$ efter disse ligninger, fører det undervejs til 372 forskellige argumentsæt $(m; i, j, k)$, hvor $a_{m;i,j,k} \neq 0$. Ved udnyttelse af symmetrien i problemet kan dette tal nedbringes væsentligt: Hvis (i', j', k') er en permutation af (i, j, k), må $a_{m;i',j',k'} = a_{m;i,j,k}$; det er derfor tilstrækkeligt at bestemme $a_{m;i,j,k}$ for $i \leq j \leq k$. Bemærk, at selv om $i \leq j \leq k$, behøver der ikke at gælde $i \leq j \leq k-1$, så rekursionen må omformuleres.

Lad $\{i, j, k\}$ betegne *multimængden* bestående af disse tre elementer, det vil sige: Rækkefølge er uden betydning, men forekomster regnes med multiplicitet. For $i = 1$ og $j = k = 2$ har vi for eksempel $\{i, j, k-1\} = \{1, 2, 2-1\} = \{1, 2, 1\} = \{1, 1, 2\}$, hvilket ikke er samme multimængde som $\{i, j, k\} = \{1, 2, 2\}$.

For de nye størrelser $a'_{m;\{i,j,k\}}$ er rekursionsformlen

$$a'_{m;\{i,j,k\}} = \begin{cases} 0 & \text{med mindre } 0 \leq i, j, k \leq m \leq i+j+k \\ 1 & \text{hvis } m = i = j = k = 0 \\ \binom{h_{m-1}}{1}(a'_{m-1;\{i-1,j,k\}} + a'_{m-1;\{i,j-1,k\}} + a'_{m-1;\{i,j,k-1\}}) \\ \quad + \binom{h_{m-1}}{2}(a'_{m-1;\{i-1,j-1,k\}} + a'_{m-1;\{i-1,j,k-1\}} + a'_{m-1;\{i,j-1,k-1\}}) \\ \quad + \binom{h_{m-1}}{3} a'_{m-1;\{i-1,j-1,k-1\}} \\ & \text{for } 1 \leq m \leq 9 \end{cases}$$

Her fører udregning af $a'_{9;\{5,5,5\}}$ kun igennem i alt 108 forskellige $a'_{m;\{i,j,k\}} \neq 0$. Beregning (efter princippet for dynamisk programmering) lader sig eventuelt gennemføre med papir og blyant. Man genfinder resultatet

$$a'_{9;\{5,5,5\}} = 3\,669688\,706217\,187500$$

At færre end hver syvende delmængde med 15 elementer kunne bruges, opvejes altså langt af, at hver af de delmængder, som kan forekomme, i gennemsnit kan udformes til en bankoplade på mere end 600 måder. Med mellem 6 og 7 milliarder mennesker på jorden kan der blive flere end 500 millioner plader til hver, selv om de alle skal være forskellige.