Normat **51**:1, 15–21 (2003)

Når har fjerdegradsligningen konstruerbare røtter?

Kent Holing

Statoil Forskningssenter
Arkitekt Ebbels veg 10
NO–7005 Trondheim
kho@statoil.com

Innledning

Hvor mange konstruerbare røtter har en fjerdegradsligning? Spørsmålet besvares presist når ligningen har rasjonale koeffisienter, og ved bruk av enkle kriterier gitt av ligningens koeffisienter.

Fremstillingen i artikkelen er selvstendig, men lesere med behov for bakgrunnsstoff om geometriske konstruksjoner kan utfylle sine kunnskaper ved å lese websiden `http://mathworld.wolfram.com/GeometricConstruction.html`. Artikkelen Čabrić [1] fra Normat gir også en kort introduksjon til temaet geometriske konstruksjoner, som kan være nyttig å lese i den forbindelse.

To former for konstruerbarhet diskuteres i artikkelen: 1) Klassisk konstruksjon med bare bruk av passer og en *umerket* linjal – som vi kjenner fra skolen – og 2) konstruksjon med bare bruk av en *merket* linjal. Klassisk konstruerbarhet er elementært og greit beskrevet i boka Bold [2], som i tillegg til det ovenfor, kan anbefales som innføring i temaet geometriske konstruksjoner. Også klassikeren Courant & Robbins [3] har en god diskusjon på konstruerbarhet (kapittel 3). Endelig er konstruksjonsmetodene 1) og 2) definert presist i boka Martin [4], som gir en velskrevet og grundig gjennomgang av de forskjellige geometriske konstruksjonsmetoder utviklet gjennom tidene.

Hva som er konstruerbart avhenger (naturligvis) av konstruksjonsreglene som gjelder. Det er velkjent at tredeling av vinkelen generelt ikke er mulig med klassisk konstruksjon. Lemper vi på spillereglene for lovlige konstruksjoner i forhold til de klassiske reglene, vil flere problemer kunne løses geometrisk – også tredeling av vinkelen. Arkimedes' metode for tredeling av vinkelen ved hjelp av innskyting av et linjestykke med en gitt lengde er velkjent, og kan gjennomføres ved bruk av passer og en merket linjal. Tredeling kan utføres ved bruk av en merket linjal alene, fordi konstruksjon av kubikkrøtter er mulig med dette konstruksjonsverktøyet. Tredeling kan utføres med bare bruk av en merket linjal da slik konstruksjon av kubikkrøtter er mulig. At en merket linjal alene er et så kraftig konstruksjonsverktøy i forhold til klassisk konstruksjon, skyldes nettopp at kubikkrotutdragning kan utføres.

Klassisk konstruksjon av reelle størrelser kjennetegnes ved bruk av et endelig antall rasjonale operasjoner og (reelle) kvadratrotutdragninger (presiseres senere), mens konstruksjon med bare bruk av en merket linjal kjennetegnes i tillegg – som nevnt ovenfor – ved bruk av et endelig antall (reelle) kubikkrotutdragninger. En kompleks størrelse er konstruerbar hvis og bare hvis både dens real- og imaginærdel er konstruerbar.

Konstruerbare røtter til fjerdegradsligningen

En setning om antall klassisk konstruerbare røtter til en gitt fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter formuleres nedenfor ved hjelp av ligningens resolvent. (Begrepet resolvent defineres nedenfor.)

For å bevise setningen bruker vi en velkjent betingelse for klassisk konstruerbarhet (se [2]–[4] eller `http://mathworld.wolfram.com/ConstructibleNumber.html`). Beviset krever også noe elementær kjennskap til tredjegrads- og fjerdegradsligningen. Det en trenger finnes i appendikset i Holing [5], i eldre bøker om ligningsteori – som Dickson [6][1] – eller igjen, på Internett.[2]

Bruker vi bare en merket linjal vil røttene til polynomligninger av grad opp til og med 4 være konstruerbare. (Vi antar at koeffisientene til ligningene er konstruerbare eller kan tolkes som lengden av gitte linjestykker.) Det er velkjent at dette ikke gjelder for ligninger med grad større eller lik 5. Generelt kan ikke en gang slike ligninger løses algebraisk. For femtegradsligningen er det jo dette Abel nå er allment mest kjent for. (Se også Sluttord, side 20.)

Det er allerede kjent i skolematematikken at for første- og annengradsligninger er spørsmålet om klassisk konstruerbare (reelle) røtter trivielt. Røttene til første- og annengradsligninger kan alle alltid konstrueres ved bare bruk av passer og en umerket linjal. Når det gjelder røttene til tredjegradsligningen er situasjonen en annen. Røttene kan ikke alltid konstrueres. Følgende resultat er velkjent:

Lemma. *Om en tredjegradsligning med rasjonale koeffisienter har kun irrasjonale røtter, kan ingen av dem konstrueres på klassisk vis.*

Noe tilsvarende gjelder ikke for fjerdegradsligningen: Ligningen $(x^2-2)^2=0$ er en fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter, og dens røtter $\pm\sqrt{2}$ kan konstrueres på klassisk vis.

Vi viser nå setningen som besvarer artikkelens tittelspørsmål. Setningen gir en kompakt og elegant karakterisering av klassisk konstruerbarhet av røttene til fjerdegradsligningen. Vi har ikke klart å finne setningen i litteraturen, selv om resultatet nok må være kjent fra før. Uansett fortjener det å bli bedre kjent!

[1] Selv om boka Dickson er en relativt gammel referanse (fra 1947), er førsteutgaven fra 1914 lett tilgjengelig på Internett: `http://encompass.library.cornell.edu/math/math_D.html`.

[2] `http://mathworld.wolfram.com/CubicEquation.html` og `http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html`.

Setning. *La* $Q(x) = 0$ *være en monisk*[3] *fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter. La videre* n *være lik antall klassisk konstruerbare røtter til ligningen, der antall røtter telles med multiplisitet og inkluderer komplekse røtter.*

La $R(t) = 0$ *være resolventen til ligningen* $Q(x) = 0$*. Da gjelder:*

a) $n = 0$ *hvis og bare hvis verken* $Q(x) = 0$ *eller* $R(t) = 0$ *har heltallsrøtter,*

b) $n = 1$ *hvis og bare hvis* $Q(x) = 0$ *har én og bare én heltallsrot,*

c) $n = 2$ *eller* $n = 3$ *kan aldri inntre og*

d) $n = 4$ *hvis og bare hvis* $R(t) = 0$ *har minst én heltallsrot.*

Bevis: Vi starter med litt bakgrunnsteori for å gjøre beviset selvstendig.

Resolventen til fjerdegradsligningen $Q(x) = 0$ er en hjelpeligning $R(t) = 0$ av tredje grad som brukes i løsningen av ligningen $Q(x) = 0$ til å faktorisere fjerdegradspolynomet $Q(x)$ i et produkt av to annengradspolynomer. Fjerdegradsligningen kan altså løses ved å løse en tredjegradsligning og to annengradsligninger.

$R(t) = 0$ er den såkalte Lagrange-resolventen i Ferraris løsningsmetode for fjerdegradsligningen. For

$$Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

omskrives $Q(x) = 0$ ved hjelp av en rot t av $R(t) = 0$ som $(x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}t)^2 = (px+q)^2$ der p og q er gitt fra fjerdegradsligningens koeffisienter og t. Vi bestemmer t ut fra at en slik faktorisering av $Q(x)$ blir mulig. Dette krever at t må være en rot av $R(t) = 0$, en tredjegradsligning. Det er ikke vanskelig å vise at

$$R(t) = t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t - a^2d + 4bd - c^2 = 0.$$

Velg nå en rot t_0 av $R(t) = 0$. Da er altså røttene til $Q(x) = 0$ uttrykt ved t_0 og kvadratrøtter. Siden t_0 er en rot av en tredjegradsligning, kan uttrykket for t_0 inneholde kubikkrøtter – ellers opptrer høyst kvadratrøtter. Det er bare i t_0 at kubikkrøtter opptrer i uttrykkene for røttene til $Q(x) = 0$. Vi kan velge t_0 reell da en tredjegradsligning med reelle koeffisienter alltid har minst én reell rot.

Vi vil også bruke en velkjent sammenheng av Lagrange mellom røttene til fjerdegradsligningen $Q(x) = 0$ og resolventen $R(t) = 0$: Med henholdsvis x_1, x_2, x_3 og x_4, og t_1, t_2 og t_3 røttene til $Q(x) = 0$ og $R(t) = 0$, er

$$t_1 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad t_2 = x_1x_3 + x_2x_4 \quad \text{og } t_3 = x_1x_4 + x_2x_3.$$

Bevis for d): Anta at $R(t) = 0$ har minst én heltallsrot t_0. Ligningen $Q(x) = 0$ har i følge det ovenfor røtter som alle kan uttrykkes med bruk av bare kvadratrøtter og t_0. Da t_0 er heltallig ser vi at vi får med høyst kvadratrøtter å gjøre. Men da er, som kjent, alle røttene til $Q(x) = 0$ konstruerbare – og $n = 4$.

Omvendt, anta at $n = 4$. Sammenhengen til Lagrange ovenfor viser at røttene til resolventen alle er konstruerbare når $n = 4$. Siden $R(t) = 0$ er en tredjegradsligning med heltallskoeffisienter må den ifølge lemmaet ha minst én rasjonal rot, men denne roten må være heltallig da $R(t)$ er monisk.

[3] Dvs. med ledende koeffisient 1.

Bevis for b): Anta $n = 1$. Da er den eneste konstruerbare roten r reell, siden komplekse røtter opptrer i konjugerte par.

Hvis r ikke er rasjonal, må r ligge i en gjentatt (reell) kvadratisk utvidelse

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k$$

av $\mathbb{Q}$. Her er k det minste positive heltall slik at

$$r \in F_k = F_{k-1}[\sqrt{q}]$$

med

$$r = u + v\sqrt{q} \quad \text{for } u, v, q \in F_{k-1},\ q > 0 \text{ og } \sqrt{q} \in F_k \setminus F_{k-1}.$$

(Dette er betingelsen for konstruerbarhet vi nevnte ovenfor.)

Hvis $Q(r) = Q(u + v\sqrt{q}) = a + b\sqrt{q}$ så må $Q(u - v\sqrt{q}) = a - b\sqrt{q}$. (Vis det!) Nå er a og b slik at hvis $Q(r) = 0$ må $b = 0$, og derfor da også $a = 0$. Så $Q(r) = 0$ gir at $Q(u - v\sqrt{q}) = 0$, som betyr at $v = 0$ og dermed $r \in F_{k-1}$. Men dette er i motstrid til definisjonen av k. Vi har jo at $r \notin F_{k-1}$. (Tilsvarende argument finnes gjengitt for tredjegradsligningen på side 10–15 i [2] eller teorem 2.18 i [4].)

Men da ser vi at r må være rasjonal og derfor heltallig. $Q(x) = 0$ kan ikke ha andre heltallsrøtter enn r; ellers ville $n > 1$, så $Q(x) = 0$ må ha én og bare én heltallsrot, nemlig roten r.

Omvendt, la $Q(x) = 0$ ha én og bare én heltallsrot r. Da kan $Q(x)$ skrives som et produkt av den lineære faktoren $x - r$ og en monisk faktor av tredje grad, som også har heltalls-koeffisienter (hvorfor?). Den siste faktoren gir opphav til en tredjegradsligning som ikke har heltallsrøtter, og da heller ikke rasjonale røtter. Denne tredjegradsligningen kan i følge lemmaet derfor ikke ha konstruerbare røtter, så r er den eneste konstruerbare roten til $Q(x) = 0$, dvs. $n = 1$.

Bevis for c): Hvis $n = 2$ eller $n = 3$, kombinér to konstruerbare røtter til $Q(x) = 0$ i en annengradsfaktor $p(x)$ av $Q(x)$. Da vil $Q(x) = p(x)q(x)$ der $q(x)$ er en annengradsfaktor med konstruerbare koeffisienter. Men da har $q(x) = 0$ – som $p(x) = 0$ – to konstruerbare røtter, og vi må ha $n = 4$.

Bevis for a): Anta $n = 0$. $Q(x) = 0$ kan da ikke ha noen heltallsrot da slike er konstruerbare. I følge d) kan heller ikke $R(t) = 0$ ha heltallsrøtter.

Omvendt, anta at verken $Q(x) = 0$ eller $R(t) = 0$ har heltallsrøtter. Da er n verken 1 eller 4 – og da n heller aldri kan være 2 eller 3, må $n = 0$.

Setningen er dermed bevist. □

Vi ser at problemet med å telle antall klassisk konstruerbare røtter til en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter er overført til problemet med å telle antall heltallsrøtter for ligningen og dens resolvent. Dette er i prinsippet enkelt å avgjøre da fjerdegradsligningen og resolventen i vårt tilfelle begge er moniske ligninger med heltallskoeffisienter: Heltallsrøttene – hvis de finnes – må finnes blant divisorene til konstantleddene til $Q(x)$ og $R(t)$. Setningen ovenfor kan generaliseres til tilfellet $Q(x) = 0$ med rasjonale koeffisienter. (Bytt ut heltallsrot/røtter med rasjonal rot/røtter i *a*), *b*) og *d*). Fortsatt blir *c*) riktig.)

Eksempler

Vi gir eksempler på bruk av setningen ovenfor.

Fjerdegradsligningene $Q(x) = x^4 + 8x + 12 = 0$ og $Q(x) = x^4 + 2x^2 + x + 3 = 0$ har ingen konstruerbare røtter, dvs. $n = 0$. Verken ligningene eller de tilhørende resolventene har heltallsrøtter.

Videre har fjerdegradsligningen $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$ én og bare én konstruerbar rot, dvs. $n = 1$. Ligningen har 2 som eneste heltallsrot.

Fjerdegradsligningene

1) $Q(x) = x^4 + 2x^2 - 1 = 0$,
2) $Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$,
3) $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ og
4) $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

har røtter som alle er konstruerbare, dvs. $n = 4$. Resolventene til ligningene har alle minst én heltallsrot.

Vi skal også se nedenfor at alle røtter til fjerdegradsligninger med rasjonale koeffisienter og med multiple røtter er konstruerbare, dvs. $n = 4$ (oppgave 1).

At røttene til fjerdegradsligningene 1) – 3) ovenfor alle er konstruerbare kan lett sees uavhengig av setningen ovenfor. Ligning 1) har ingen odde termer og er derfor en annengradsligning for x^2, mens ligningene 2) og 3) er såkalte resiproke fjerdegradsligninger ($1/x$ er rot for alle røtter x forskjellig fra 0) – dvs. ligningene er annengradsligninger for $x + 1/x$ (hvorfor?).

Ligning 3) er også ekvivalent med ligningen $x^5 - 1 = 0$ ($x \neq 1$), den såkalte sirkeldelingsligningen for den regulære femkanten, som er klassisk konstruerbar. Merk at resolventen til de resiproke fjerdegradsligningene 2) og 3) har begge heltallsroten 2. (At resolventen til en resiprok fjerdegradsligning har roten 2 gjelder generelt. Setningen gir da at resiproke ligninger har røtter som alle er konstruerbare.)

Oppgaver

Vi utfordrer leseren til å bruke det hun har lært av artikkelen til å løse oppgavene nedenfor, men først gir vi litt nødvendig bakgrunnsteori.

Med diskriminanten til fjerdegradsligningen $Q(x) = 0$ og resolventen $R(t) = 0$ mener vi henholdsvis uttrykkene

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2$$

og

$$(t_1 - t_2)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2,$$

der vi – som ovenfor – betegner røttene til ligningene $Q(x) = 0$ med x_1, x_2, x_3 og x_4, og røttene til $R(t) = 0$ med t_1, t_2 og t_3.

Sammenhengen av Lagrange ovenfor gir at diskriminantene til $Q(x) = 0$ og $R(t) = 0$ er like. (Formelen for diskriminanten til en tredjegradsligning $t^3 + At^2 + Bt + C = 0$ er $18ABC - 4A^3C + A^2B^2 - 4B^3 - 27C^2$.)

En fjerdegradsligning $Q(x) = 0$ med heltallskoeffisienter (rasjonale koeffisienter) sies å være irredusibel over $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}$) hvis og bare hvis $Q(x)$ ikke kan skrives som et produkt av faktorer av lavere grad med heltallskoeffisienter (rasjonale koeffisienter).

Oppgave 1. *La $Q(x) = 0$ være en fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter og multiple røtter.*

a) Vis – uten bruk av diskriminanten til $Q(x) = 0$ – at røttene til ligningen $Q(x) = 0$ alle kan konstrueres på klassisk vis.[4]

b) Vis a) ved å bruke diskriminanten til $Q(x) = 0$.[5]

c) Hva kan sies om rasjonale røtter til ligningen $Q(x) = 0$?[6]

Oppgave 2. *La $Q(x) = 0$ være en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter og med diskriminant som er kvadrattall.*

a) Vis at resolventen til $Q(x) = 0$ enten har ingen eller tre heltallsrøtter. Gi eksempler på begge tilfeller.[7]

b) Vis at hvis $Q(x) = 0$ i tillegg er irredusibel over $\mathbb{Z}$, og har minst én klassisk konstruerbar rot, så har resolventen til $Q(x) = 0$ tre forskjellige heltallsrøtter.

Sluttord

Vi ønsker til slutt å påpeke at vår setning lett kan brukes til å bestemme Galois-gruppen til visse fjerdegradsligninger. Vi henvender oss her til lesere som allerede kjenner Galois-teorien, eller vil sette seg inn i denne vakre teorien.

Galois-gruppen til polynomer er som kjent sentral når det gjelder å bestemme om slike ligninger er algebraisk løsbare («løsbare ved rotutdragninger»). Det er slik det i dag vises at femtegradsligningen generelt ikke kan løses algebraisk. Begrepet *algebraisk løsbar* gjøres presist i Galois-teorien. Hadlock [7] og Escofier [8] gir begge en meget god innføring i Galois-teori, for de som trenger det, og da motivert rundt problemstillinger om geometriske konstruksjoner. Internettlenken `http://mathworld.wolfram.com/topics/FieldTheory.html` er også et bra sted å starte for den som vil sette seg inn i Galois-teorien.

Anta nå at $Q(x) = 0$ er en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter[8] som er irredusibel over $\mathbb{Z}$. (Se nedenfor hvis ligningen ikke er irredusibel.) La, som ovenfor, n være lik antall klassisk konstruerbare røtter til $Q(x) = 0$, og la D være

[4] Vink: $Q(x) = 0$ kan ikke være irredusibel over $\mathbb{Q}$ da største felles divisor av $Q(x)$ og $Q'(x)$ er en faktor av $Q(x)$, som er et polynom med rasjonale koeffisienter og av minst første grad. Videre har en tredjegradsligning med rasjonale koeffisienter og med dobbel rot bare rasjonale røtter.

[5] Resolventen til $Q(x) = 0$ har diskriminant lik 0 og derfor en dobbel rot.

[6] Svar: Bortsett fra tilfellet når $Q(x)$ er et perfekt kvadrat er minst to av røttene til $Q(x) = 0$ rasjonale.

[7] Vis at alle moniske tredjegradsligninger med heltallskoeffisienter og diskriminant som er kvadrattall har enten ingen eller tre heltallsrøtter. Den første fjerdegradsligningen i eksemplene ovenfor, $Q(x) = x^4 + 8x + 12 = 0$, har en kvadratisk diskriminant (lik 576^2) uten å ha heltallsrøtter. Alle moniske fjerdegradsligninger med heltallskoeffisienter og bare heltallsrøtter har trivielt en kvadratisk diskriminant.

[8] Betingelsen på $Q(x)$ her er ikke så begrensende som en kanskje skulle tro: Enhver fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter kan transformeres til en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter uten at Galois-gruppen forandrer seg.

diskriminanten til ligningen. Da er $n = 0$ eller $n = 4$, og D er heltallig. Vi har sett hvordan n og D lett kan bestemmes ved hjelp av ligningens koeffisienter.

Det er kanskje overraskende at vi – på ett unntak nær – nå kan bestemme Galois-gruppen til $Q(x) = 0$ ved kjennskap kun til n og D.

Med standard gruppenotasjon gjelder følgende: For $n = 0$ er Galois-gruppen A_4 eller S_4 etter som D er et kvadrattall eller ikke. For $n = 4$ er gruppen V hvis D er kvadrattall. Er $n = 4$ og D ikke kvadrattall, gir ikke n og D alene nok informasjon til å bestemme Galois-gruppen til ligningen, men Galois-gruppen er da enten D_4 (symmetrigruppen til kvadratet) eller Z_4.

Vi viser til kapittel 16 i [8] og artikkelen Kappe & Warren [9] for detaljer – der også unntakstilfellet ovenfor behandles. Selv i unntakstilfellet har vi høyst med kvadratrøtter å gjøre fordi resolventen $R(t) = 0$ til $Q(x) = 0$ da har én (og bare én) heltallsrot.[9]

Merk at det er bare for $n = 0$ at D må beregnes for å bestemme Galois-gruppen (dvs. når $R(t) = 0$ ikke har heltallsrøtter). For $n = 4$ er Galois-gruppen V hvis $R(t) = 0$ har tre (forskjellige) heltallsrøtter og enten D_4 eller Z_4 hvis $R(t) = 0$ har én (og bare én) heltallsrot (oppgave 2).

Vi antok ovenfor at fjerdegradsligningen $Q(x) = 0$ var irredusibel over $\mathbb{Z}$. Hvis $Q(x) = 0$ er redusibel, kan det å bestemme Galois-gruppen til ligningen bli mer komplisert enn i det irredusible tilfellet. At redusible tilfeller er mer komplisert enn irredusible tilfeller er spesielt riktig for ligninger av grad større enn 4. Vi henviser til spesiallitteraturen.

Litteratur

[1] Branislav Čabrić: The trisection problem. *Normat* **45**, 79–81 (1997).

[2] Benjamin Bold: *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* Dover, New York 1982. (Opprinnelig Van Nostrand Reinhold, New York 1969.)

[3] R. Courant and H. Robbins: *What is Mathematics? An elementary approach to ideas and methods.* Oxford University Press, New York 1941 (Mange senere utgaver finnes.)

[4] George E. Martin: *Geometric Constructions.* Springer-Verlag, New York 1998.

[5] Kent Holing: På gjengrodde stiger. *Normat* **45**, 62–78 (1997). (Appendiks s. 75–78.)

[6] L. E. Dickson: *Elementary Theory of Equations.* Wiley & Sons, New York 1947.

[7] Charles Robert Hadlock: *Field Theory and Its Classical Problems.* The Carus Mathematical Monographs no. 19, The Mathematical Association of America 1978

[8] Jean-Pierre Escofier: *Galois Theory.* Springer-Verlag, New York 2001.

[9] Luise-Charlotte Kappe and Bette Warren: An Elementary Test for the Galois Group of a Quartic Polynomial. *The American Mathematical Monthly* **96**, 133–137 (1989).

[9] For å skille mellom Z_4 eller D_4 gjør vi som i [9]: La $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, t_0 være den eneste heltallsrot av $R(t) = 0$, og definer $P(x) = (x^2 - t_0x + d)(x^2 + ax + b - t_0)$. Om røttene til $Q(x) = 0$ er x_1, x_2, x_3 og x_4, så er nullpunktene til den første faktoren av $P(x)$ lik x_1x_2 og x_3x_4, mens nullpunktene til den andre faktoren er $x_1 + x_2$ og $x_3 + x_4$. (Vi har valgt røttene til $Q(x) = 0$ slik at $t_0 = x_1x_2 + x_3x_4$ er heltallig.) Med E lik den minste kroppsutvidelsen av $\mathbb{Q}$ som inneholder røttene til $R(t) = 0$, er Z_4 Galois-gruppen til $Q(x) = 0$ hvis og bare hvis $P(x) = 0$ har alle sine røtter i E – ellers er D_4 Galois-gruppen til $Q(x) = 0$. Siden $R(t) = 0$ kan løses som en annengradsligning er E lett å bestemme.