Normat 51:1, 22–33 (2003)

Strängar i månsken I*

Gert Almkvist

Matematikcentrum
Box 118
SE–22100 Lund

Inledning

En verklig höjdpunkt inom matematiken är då man upptäcker att två helt olika områden har med varandra att göra. Vi skall här berätta om två sådana tillfällen.

Det första var då John McKay 1978 upptäckte att

$$196\,884 = 196\,883 + 1.$$

Detta verkar kanske inte så sensationellt men $196\,884$ är en koefficient i

$$J(q) = \frac{1}{q} + 744 + 196\,884\,q + 21\,493\,760\,q^2 + \cdots ,$$

en talteoretisk funktion känd sedan 150 år (J står för Jacobi).

Vidare är $196\,883$ dimensionen för den minsta (icke-triviala) matrisrepresentationen av monstergruppen M (även känd som "the friendly giant"), den största av de sporadiska enkla grupperna. Monstrets existens var ännu inte bevisad 1978 men man kände dimensionerna för dess representationer.

Snart upptäckte man att fler koefficienter av $J(q)$ var enkla linjärkombinationer av dimensioner för representationer av M. Detta ledde till en hel industri som kallades "Moonshine" (detta uttryck för suspekt verksamhet kan ledas tillbaka till illegal whisky under förbudstiden i USA). Fenomenet förklarades slutligen av Fieldsmedaljören Richard Borcherds, varvid han använde en modul konstruerad av bland andra svensken Arne Meurman.

*Del II av denna artikel kommer i nästa nummer.

Vårt andra exempel kommer från fysiken, närmare bestämt från strängteorin. År 1991 fann Candelas, Green, de la Ossa och Parkes följande formel för ”Yukawa-kopplingen”

$$K = 5 + 2875\,\frac{q}{1-q} + 609\,250\,\frac{2^3q^2}{1-q^2} + 317\,206\,375\,\frac{3^3q^3}{1-q^3} + 24\,246\,753\,000\,\frac{4^3q^4}{1-q^4} + \cdots$$

(serier av denna typ kallas Lambertserier och förekommer inom talteorin). Här är 2875 antalet linjer i 3-mångfalden (i P^4) W

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0,$$

vilket var känt sedan slutet på 1800-talet. Likaså är 609 250 antalet andragradskurvor i W. Norrmännen Ellingsrud och Strømme visade att formeln även räknade rationella 3:egradskurvor och Kontsevich gjorde samma för grad fyra. Givental visade formelns giltighet upp till grad 10.

Här kommer vi att undvika fysik, talteori och algebraisk geometri. Vi vill istället visa hur de räknande funktionerna kan beskrivas med hjälp av lösningar till hypergeometriska differentialekvationer.

2:a ordningens differentialekvationer

Exempel 1: Låt oss starta med den elliptiska integralen

$$y = y(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}.$$

Deriverar vi under integraltecknet får vi

$$\begin{aligned} x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{y}{4} &= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1-2(1-x)t^2 - xt^4}{\sqrt{1-t^2}(1-xt^2)^{5/2}}dt \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{t\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}}{(1-xt^2)^2}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Denna differentialekvation har de två linjärt oberoende lösningarna

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \frac{x^n}{16^n} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{9}{16}x^2 + \frac{25}{256}x^3 + \frac{1\,225}{16\,384}x^4 + \frac{3\,969}{65\,536}x^5 + \cdots, \\ y_1 &= y_0\log(x) + \frac{x}{2} + \frac{21}{64}x^2 + \frac{185}{768}x^3 + \frac{18\,655}{98\,304}x^4 + \frac{102\,501}{655\,360}x^5 + \cdots. \end{aligned}$$

Kvoten

$$t = \frac{y_1}{y_0}$$

kan tolkas som 1/elektriska motståndet av en rektangulär platta (se Tord Nilsson, En användning av elliptiska integraler inom mikroelektroniken, Examensarbete vid LTH, Lund 1985). Vi får

$$q = \exp(t) = x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{21}{64}\,x^3 + \frac{31}{128}\,x^4 + \frac{6\,257}{32\,768}\,x^5 + \cdots$$

med den inversa funktionen ("spegelavbildningen")

$$x = x(q) = q - \frac{1}{2}\,q^2 + \frac{11}{64}\,q^3 - \frac{3}{64}\,q^4 + \frac{359}{32\,768}\,q^5 + \cdots .$$

Sätt

$$z(q) = \frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{93}{32} + \frac{49\,221}{16\,384}\,q^2 + \cdots .$$

Då följer

$$J(q) = 256\,z(16\sqrt{q}) = \frac{1}{q} + 744 + 196\,884\,q + \cdots$$

vilket visar sambandet mellan J-funktionen och elliptiska integraler.

Exempel 2: Betrakta differentialekvationen

$$x(1-x)y'' + (1-\frac{3x}{2})y' - \frac{5}{144}\,y = 0$$

med lösningarna

$$y_0 = 1 + \frac{5}{144}\,x + \frac{1\,105}{82\,944}\,x^2 + \frac{801\,125}{107\,495\,424}\,x^3 + \cdots ,$$
$$y_1 = y_0\log(x) + \frac{31}{72}\,x + \frac{4\,799}{27\,648}\,x^2 + \frac{31\,859\,345}{322\,486\,272}\,x^3 + \cdots .$$

Vi får

$$q = \exp(\frac{y_1}{y_0}) = x + \frac{31}{72}\,x^2 + \frac{20\,845}{27\,648}\,x^3 + \frac{27\,274\,051}{161\,243\,136}\,x^4 + \cdots$$

med inversen

$$x = x(q) = q - \frac{31}{72}\,q^2 + \frac{9\,907}{82\,944}\,q^3 - \frac{2\,193\,143}{80\,621\,568}\,q^4 + \cdots .$$

Nu får vi direkt

$$J(q) = \frac{1728}{x(1728\,q)} = \frac{1}{q} + 744 + 196\,884\,q + 21\,493\,760\,q^2 + 864\,299\,970\,q^3 + \cdots .$$

Inom talteorin definieras $J(q)$ vanligen genom formeln

$$J(q) = \frac{\left\{1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \right\}^3}{q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}}$$

där

$$\sigma_3(n) = \sum_{d|n} d^3.$$

Genom $q = \exp(2\pi i \tau)$ betraktas $J(\tau)$ som funktion på övre halvplanet

$$H = \{\tau \colon \operatorname{Im}(\tau) > 0\}.$$

Då blir $J(\tau)$ invariant under transformationerna

$$J\Big(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\Big) = J(\tau)$$

där a, b, c, d är heltal och $ad - bc = 1$. Man kan visa att varje meromorf invariant funktion på H är en rationell funktion av $J(\tau)$.

Exempel 3: Betrakta differentialekvationen

$$x(1 - 432\,x)y'' + (1 - 864\,x)y' - 60\,y = 0$$

med lösningarna

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + 60\,x + 13\,860\,x^2 + 4\,048\,080\,x^3 + \cdots, \\ y_1 &= y_0 \log(x) + 312\,x + 77\,652\,x^2 + 23\,485\,136\,x^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Nu har

$$q = \exp\Big(\frac{y_1}{y_0}\Big) = x + 312\,x^2 + \cdots$$

inversen

$$x = x(q) = q - 312\,q^2 + 87\,084\,q^3 - 23\,067\,968\,q^4 + \cdots.$$

Man får

$$J(q) = \frac{1}{x(1 - 432\,x)}.$$

Koefficienterna $c(n)$ i $j(q) = J(q) - 744$ har intressanta egenskaper. Sätt

$$j(q) = \frac{1}{q} + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q^n.$$

Borcherds fann identiteten

$$\prod_{m,n=1}^{\infty}(1-p^m q^n)^{c(mn)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} c(j)\frac{p^j-q^j}{p-q}.$$

Utvecklar man denna identitet får man en mängd icke-linjära identiteter som koefficienterna $c(n)$ måste satisfiera.

Genom att jämföra koefficienterna på båda sidor kan vi uttrycka alla $c(n)$, där n är sammansatt, som polynom i $c(p)$ där p är primtal. T. ex. får vi

$$\begin{aligned}
c(4) &= c(3) + \frac{c(1)^2 - c(1)}{2},\\
c(6) &= c(4) + c(1)c(2),\\
c(8) &= c(5) + c(1)c(3) + \frac{c(2)^2 - c(2)}{2},\\
c(9) &= c(5) + c(1)c(4) + c(2)^2 - \frac{c(1)^3}{6} + \frac{c(1)^2}{2} - \frac{c(1)}{3},\\
c(10) &= c(6) + c(2)c(3) + c(1)c(4).
\end{aligned}$$

Men det finns fler identiteter. Man kan visa att

$$u = j(q) \text{ och } v = j(q^p)$$

för varje primtal p satisfierar en "modulär ekvation" av formen

$$g_p(u,v) = u^{p+1} + v^{p+1} + \sum_{i,j=1}^{p} b_{ij}u^i v^j = 0$$

där b_{ij} är vissa heltal som satisfierar

$$b_{ji} = b_{ij} \text{ och } b_{pp} = -1.$$

Genom att betrakta g_2 och g_3 kan man visa att alla $c(n)$ är polynom i

$$c(1),\ c(2),\ c(3) \text{ och } c(5).$$

Man får även ett oändligt antal ekvationer som $c(1)$, $c(2)$, $c(3)$, $c(5)$ måste satisfiera. Den enklaste är

$$\begin{aligned}
&24c(3)c(5) - 24c(1)^2c(5) + 24c(5) - 12c(1)c(3)^2 - 12c(3)^2\\
&\quad + 24c(1)c(2)c(3) + 12c(1)^2c(3) - 48c(2)c(3) + 24c(1)c(3) - 36c(3)\\
&\quad - 24c(1)c(2)^2 + 24c(2)^2 + 12c(1)^2c(2) + 12c(1)^3c(2) - 24c(1)c(2)\\
&\qquad\qquad + 9c(1)^4 - 10c(1)^3 - 9c(1)^2 + 10c(1) = 0.
\end{aligned}$$

Mihai Cipu [3] har funnit 28 funktioner (förutom $j(q)$) som satisfierar 15 identiteter, som kommer från g_2 och g_3. T. ex. är

$$
\begin{aligned}
f_1(q) &= \frac{1}{q} + 134\,q + 760\,q^2 + 3\,345\,q^3 + 12\,256\,q^4 + 39\,350\,q^5 + \cdots,\\
f_2(q) &= \frac{1}{q} + 52\,q + 204\,q^2 + 681\,q^3 + 1956\,q^4 + 5135\,q^5 + \cdots,\\
&\ \cdots\\
f_{10}(q) &= \frac{1}{q} + 3q + 4q^2 + 7q^3 + 10q^4 + 17q^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

lösningar. Alla dessa funktioner är specialfall av *replikabla* funktioner, som studerats av McKay, Norton, Cummins, Ufnarovski et al. Dessa funktioner ger också upphov till ”månsken” med avseende på andra grupper än monstret.

3:e ordningens differentialekvationer

Vi skall endast studera

$$y''' + s_2(x)y'' + s_1(x)y' + s_0(x)y = 0$$

då differentialekvationen är ”kvadraten” på en 2:a ordningens differentialekvation, dvs det finns linjärt oberoende lösningar

$$
\begin{aligned}
y_0 &= u_0^2\\
y_1 &= u_0u_1\\
y_2 &= u_1^2
\end{aligned}
$$

där u_0 och u_1 är lösningar till

$$u'' + p_1u' + p_0u = 0.$$

Sats:

$$y''' + s_2y'' + s_1y' + s_0y = 0$$

är en ”kvadrat” om och endast om

$$s_0 = \frac{s_1s_2}{3} - \frac{2}{27}s_2^3 + \frac{s_1'}{2} - \frac{s_2''}{6} - \frac{s_2s_2'}{3}.$$

Bevis: Antag att

$$y = u^2$$

där

$$u'' = -(p_1u' + p_0u).$$

Det följer

$$y' = 2uu',$$
$$y'' = 2(u')^2 - 2p_0y - p_1y'$$

och efter en del räkningar

$$y''' + 3p_1y'' + (2p_1^2 + 4p_0 + p_1')y' + (4p_1p_0 + 2p_0') = y = 0$$

dvs

$$s_2 = 3p_1,$$
$$s_1 = 2p_1^2 + 4p_0 + p_1',$$
$$s_0 = 4p_0p_1 + 2p_0'.$$

Eliminerar vi p_0 och $p_1$får vi

$$s_0 = \frac{s_1s_2}{3} - \frac{2}{27}s_2^3 + \frac{s_1'}{2} - \frac{s_2''}{6} - \frac{s_2s_2'}{3}.$$

Omvänt givna s_0, s_1, s_2 som satisfierar denna relation, kan vi finna p_0 och p_1. Om $y = u_0u_1$ så får vi samma differentialekvation för y.

Anmärkning: Villkoret i satsen är uppfyllt om och endast om

$$\frac{d^3}{dt^3}\Big(\frac{y_2}{y_0}\Big) = 0$$

där

$$t = \frac{y_1}{y_0}$$

(se Forsyth , Theory of ordinary differential equations, vol 4, s. 212).

Låt

$$\theta = x\frac{d}{dx}.$$

Lian–Yau [13] studerade följande differentialekvation

$$\Big(\theta^3 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^j \Big(\theta + \frac{j}{2}\Big)\Big(\theta^2 + \theta + \frac{j^2}{4} - \nu_j^2\Big)\Big)y = 0$$

som är "kvadraten" på

$$\Big(\theta^2 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^j \Big(\theta^2 + \frac{\theta}{2} + \frac{j^2}{16} - \nu_j^2\Big)\Big)u = 0$$

Vi räknar igenom ett av deras många exempel (som alla leder till replikabla funktioner).

Exempel 4: Betrakta

$$\big(\theta^3 - x(2\theta+1)(7\theta^2+7\theta+4) + x^2(\theta+1)(53\theta^2+106\theta+72) \\ - 14x^3(\theta+1)(\theta+2)(2\theta+3) - 24x^4(\theta+2)(2\theta+3)(2\theta+5)\big)y = 0$$

som är ”kvadraten” på

$$x(1-14\,x+53\,x^2-28\,x^3-96\,x^4)u'' + (1-2\,x+106\,x^2-70\,x^3-288\,x^4)u' \\ -(2-18\,x+14\,x^2+90\,x^3)u = 0$$

med lösningarna

$$u_0 = 1+2\,x+7\,x^2+30\,x^3+\frac{297}{2}x^4+813\,x^5+\frac{9573}{2}x^6+29\,697\,x^7+\cdots,$$
$$u_1 = u_0\log(x)+3\,x+\frac{29}{2}\,x^2+73\,x^3+\frac{1583}{4}\,x^4+\frac{11\,443}{5}\,x^5+\frac{418\,081}{30}\,x^6+\cdots.$$

Vi får

$$q = \exp\Big(\frac{y_1}{y_0}\Big) = \exp\Big(\frac{u_1}{u_0}\Big) = x+\cdots$$

med inversen

$$x = x(q) = q-3\,q^2+5\,q^3-5\,q^4-5\,q^5+33\,q^6-84\,q^7 \\ +137\,q^8-119\,q^9-105\,q^{10}+704\,q^{11}+\cdots.$$

Vidare är

$$\frac{1}{x(q)} = \frac{1}{q}+3+4\,q+2\,q^2+6\,q^3+10\,q^4+15\,q^5 \\ +18\,q^6+37\,q^7+30\,q^8+87\,q^9+\cdots$$

en replikabel funktion, betecknad med $30B$ i McKays katalog [16]. Tyvärr ger Lian–Yau ingen antydan om hur de fann denna märkvärdiga differentialekvation.

4:e ordningens differentialekvationer

Den första differentialekvation, som uppkom vid studiet av Calabi–Yaumångfalder var

$$\Big(\theta^4 - 5^5x\Big(\theta+\frac{1}{5}\Big)\Big(\theta+\frac{2}{5}\Big)\Big(\theta+\frac{3}{5}\Big)\Big(\theta+\frac{4}{5}\Big)\Big)y = 0$$

där

$$\theta = x\frac{d}{dx}$$

dvs

$$x^3(1-3125\,x)y'''' + (6\,x^2 - 25\,000\,x^3)y''' \\ + (7\,x - 450\,000\,x^2)y'' + (1-15\,000\,x)y' - 120\,y = 0.$$

Vi får lösningarna

$$\begin{aligned}
y_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5}\,x^n = 1 + 120\,x + 113\,400\,x^2 + 168\,168\,000\,x^3 + \cdots,\\
y_1 &= y_0\log(x) + 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n)!}{(n!)^5}\left(\sum_{j=n+1}^{5n}\frac{1}{j}\right)x^n\\
&= y_0\log(x) + 770\,x + 810\,225\,x^2 + \frac{3\,745\,679\,000}{3}\,x^3 + \cdots,\\
y_2 &= y_0\frac{\log^2 x}{2} + \log(x)(770\,x + \cdots) + \frac{1150}{2}\,x + \frac{4\,208\,175}{4}\,x^2 + \cdots,\\
y_3 &= y_0\frac{\log^3 x}{6} + \frac{\log^2 x}{2}(770\,x + \cdots) + \log(x)\Big(\frac{1150}{2}x + \cdots\Big)\\
&\quad - 6900\,x - \frac{9\,895\,125}{2}\,x^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Det följer

$$t = \frac{y_1}{y_0} = \log(x) + 770\,x + 717\,825\,x^2 + \frac{3\,225\,308}{3}\,x^3 + \cdots$$

och

$$q = \exp(t) = x + 770\,x^2 + 1\,014\,275\,x^3 + 1\,703\,916\,750\,x^4 + \cdots$$

med inversen

$$x = x(q) = q - 770\,q^2 + 171\,525\,q^3 - 81\,623\,000\,q^4 \\ - 35\,423\,171\,250\,q^5 - 54\,572\,818\,340\,154\,q^6 + \cdots.$$

Den så kallade *Yukawakopplingen* kan definieras av

$$\begin{aligned}
K(q) &= \frac{5}{(1-3125\,x)y_0^2\Big(x\dfrac{dt}{dx}\Big)^3}\\
&= 5 + 2875\,x + 7\,090\,625\,x^2 + 18\,991\,003\,125\,x^3 + \cdots\\
&= 5 + 2875\,q + 4\,876\,875\,q^2 + 8\,564\,575\,000\,q^3 + 1\,551\,796\,875\,q^4 + \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k = 5 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1-q^d}.
\end{aligned}$$

Då gäller

$$n_d = \frac{1}{d^3} \sum_{k|d} \mu\Big(\frac{d}{k}\Big) c_k$$

där μ är *Möbiusfunktionen*, dvs

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 1 \\ 0 & \text{om } n \text{ innehåller en kvadrat} \\ (-1)^r & \text{om } n \text{ är produkt av } r \text{ olika primtal} \end{cases}$$

Det märkvärdiga är nu att alla n_d blir heltal

$$\begin{aligned} n_1 &= 2875, \\ n_2 &= 609\,250, \\ n_3 &= 317\,206\,375, \\ n_4 &= 242\,467\,530\,000, \\ n_5 &= 229\,305\,888\,887\,625, \\ &\dots \end{aligned}$$

och att de räknar rationella kurvor av grad d på mångfalden

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0.$$

Man kan fråga sig om det finns fler exempel där man får heltal som ovan. Vi betraktar 4:e ordningens differentialekvationer där lösningarna ser ut som i exemplet ovan, dvs

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + \cdots, \\ y_1 &= y_0 \log(x) + \cdots, \\ y_2 &= \frac{\log^2 x}{2}\, y_0 + \cdots, \\ y_3 &= \frac{\log^3 x}{6}\, y_0 + \cdots \end{aligned}$$

med

$$t = \frac{y_1}{y_0}$$

och $q = \exp(t) = x + \cdots$ med spegelavbildningen $x = x(q) = q + \cdots$. Vi definierar *Yukawakopplingen*

$$w = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_2}{y_0}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} n_d \frac{d^3 q^d}{1 - q^d}$$

(i exemplet ovan är $K = 5w$). Mera precist studerar vi egenskaperna:

E_1: $x(q) = q + \cdots$ har heltalskoefficienter.

E_2: Alla n_d är heltal.

Det verkar finnas 14 fall där E_1 gäller och där gäller även E_2, vilket är ganska överraskande. Vi ger i slutet av del II katalogen av dessa 14 fall. Alla differentialekvationerna är av typen

$$\left(\theta^4 - x(a\theta^4 + 2a\theta^3 + b\theta^2 + (b-a)\theta + c)\right) y = 0$$

där a, b, c är heltal. Maple löser snällt denna differentialekvation och man får spegelavbildningen

$$\begin{aligned} x(q) = q &+ (a - b + 4c)q^2 \\ &+ \Big(\frac{13}{8}\,a^2 + \frac{11}{8}\,b^2 + \frac{163}{8}\,c^2 - 3\,ab + \frac{45}{4}\,ac - \frac{21}{2}\,bc\Big)q^3 + \cdots \end{aligned}$$

och Yukawakopplingen

$$\begin{aligned} w = 1 &+ (4a - 3b + 10c)q \\ &+ \Big(\frac{59}{4}\,a^2 + \frac{33}{4}\,b^2 + \frac{745}{8}\,c^2 - 22\,ab + \frac{293}{4}\,ac - \frac{221}{4}\,bc\Big)q^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Att n_d skall vara heltal leder till oändligt många kongruenser för polynom i a, b, c. De två första, n_2 och n_3 ger

$$32a + 24b + 48c + 54a^2 + 2b^2 + 41c^2 + 16ab + 10ac + 6bc \equiv 0 \bmod 64$$

och

$$\begin{aligned} 1863\,a &+ 243\,b + 1377\,c + 945\,a^3 + 702\,b^3 + 814\,c^3 + 1098\,abc + 1566\,ab^2 \\ &+ 1242\,a^2b + 186\,a^2c + 209\,ac^2 + 210\,b^2c + 2057\,bc^2 \equiv 0 \bmod 3^7. \end{aligned}$$

Tyvärr har dessa kongruenser hundratals lösningar, så de är oanvändbara. I ett Appendix till del II av detta arbete ges en katalog över de 14 exempel som jag har funnit med referenser. Konvergenta serier med heltalskoefficienter har egenskapen att antingen är de rationella funktioner eller också har de konvergenscirkeln som en naturlig gräns (Fritz Carlsson, Math. Ann. **9**, 1–13 (1921))

Referenser

Referenser av typen `hep-th/9409029` kan laddas ner från arXivbasen `http://arXiv.org/abs/` (t.ex. `http://arXiv.org/abs/hep-th/9409029`).

[1] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109**, 405–444 (1992).

[2] M. Cipu, Replicable functions: a computational approach, *Computer Sci. J. of Moldova* **4**, 342–359 (1996).

[3] M. Cipu, A conjecture by McKay via Gröbner bases, in *Proc. 6th Rhein. Workshop on Computer Algebra* 1998.

[4] J. Conway and S. Norton, Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11**, 308–339 (1979).

[5] C. F. Doran, Picard-Fuchs uniformization: Modularity of the mirror map and mirror-moonshine, `math.AG/9812162`.

[6] B. M. Dwork, On p-adic differential equations. IV. Generalized hypergeometric functions as p-adic analytic functions in one variable. *Ann. sci. l'École Norm. Sup.* **6**, 295–316 (1973).

[7] D. Ford, J. McKay and S. Norton, More on replicable functions, *Commun. Alg.* **22** 5175–5193 (1994).

[8] P. Goddard, The work of R.E. Borcherds, `math.QA/9808136`, also in *Proc. Intern. Congr. Berlin.* (1998).

[9] M. Jinzenji and M. Nagura, Mirror symmetry and an exact calculation of $N-2$ point correlation function on Calabi–Yau manifold embedded in CP^{N-1}, `hep-th/9409029`.

[10] A. Klemm and S. Theisen, Considerations of one-modulus Calabi–Yau compactifications: Picard–Fuchs equations, Kähler potentials and mirror maps, `hep-th/9205041`.

[11] A. Klemm, B.H Lian, S. S. Roan and S.-T. Yau, A note on ODEs from mirror symmetry, `hep-th/9407192`.

[12] B. H. Lian and S.-T. Yau, Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling, `hep-th/9411234`.

[13] B. H. Lian and S.-T. Yau, Mirror maps, modular relations and hypergeometric series I, `hep-th/9507151`.

[14] B. H. Lian, K. Liu and S.-T. Yau, Mirror principle I, `alg-geom/9712011`.

[15] A. Libgober and J. Teitelbaum, Lines on Calabi–Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard–Fuchs equations, *Int. Math. Research Notices* **1**, 29–39 (1993), `alg-geom/9301001`.

[16] J. McKay and H. Strauss, The q-series of monstrous moonshine and the decomposition of the head characters, *Commun. Alg.* **18**, 253–278 (1990).

[17] D. R. Morrison, Picard–Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces, `hep-th/9111025`.

[18] M. Nagura and K. Sugiyama, Mirror symmetry of K3 and torus, `hep-th/9312159`.

[19] M. Noguchi, Mirror symmetry of Calabi–Yau manifolds and flat coordinates, `hep-th/9609163`.