Normat **51**:1, 34–38 (2003)

Oppgaver

426. La r, s og t være heltall med $r \geq 0$, $s \geq 0$ og $r + s \leq t$. Vis at

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \cdots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}.$$

(Fra Putnam-konkurransen 1987.)

427. Betrakt situasjonen gitt i oppgave 405 (se side 37). Vis at punktene A, E, B og N ligger på en og samme sirkel. (Innsendt av Oddvar Iden, Bergen, NO.)

428. Vis at det fins uendelig mange positive heltall n slik at $p = nr$, der $2p$ og r er henholdsvis omkretsen og radien i den innskrevne sirkelen i en trekant med heltallige sidelengder. (Foreslått til den internasjonale matematikkolympiaden i Taejon, Sør-Korea, i 2000.)

429. La k være et fast, positivt heltall. Den n-te deriverte av $f(x) = 1/(x^k - 1)$ har formen

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}},$$

der $P_n(x)$ er et polynom. Finn $P_n(1)$. (Fra Putnam-konkurransen 2002.)

Løsninger

403. Finnes det en endelig følge av heltall $c_1, \ldots, c_n$ slik at tallene $a + c_1, \ldots, a + c_n$ alle er primtall for minst to, men ikke uendelig mange, forskjellige heltall a?

Løsning: (Etter Lars Höglund, Uppsala, SE.) Betrakt de n (≥ 5) første parene av tvillingprimtall,

$$(3, 5),\ (5, 7),\ (11, 13),\ (17, 19),\ (29, 31),\ \ldots,\ (p_n, p_n + 2),$$

og sett $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $c_3 = 11$, $c_4 = 17$, $c_5 = 29$, $\ldots$, $c_n = p_n$.

Med $a = 0$ og med $a = 2$ får vi bare primtall. Hvis a er et oddetall, får vi bare partall. Hvis a er et partall større enn 2, altså $a = 2k$ med $k > 1$, får vi følgen

$$2k + 3,\quad 2k + 5,\quad 2k + 11,\quad 2k + 17,\quad 2k + 29,\quad \ldots,\quad 2k + p_n.$$

Modulo 5 er de fem første leddene kongruente med

$$2k + 3,\quad 2k,\quad 2k + 1,\quad 2k + 2,\quad 2k + 4,$$

og det er lett å se at for ethvert helt tall k må minst ett av disse tallene være delelig med 5, og det er derfor helt sikkert ikke et primtall for $k > 1$.

Vi ser av denne løsningen at vi kan finne lange slike sekvenser $c_1, \ldots, c_n$ som oppgaven spør etter, i hvert fall like lange som enhver sekvens av par av tvillingprimtall.

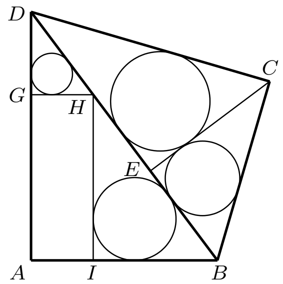
En annen løsning, som ikke bygger på tvillingprimtall, er gitt av Lars Arnér: Lar vi $c_1, \ldots, c_{17}$ være sekvensen

$$5, 11, 17, 41, 47, 61, 67, 97, 151, 167, 227, 257, 587, 647, 1091, 1181, 1721,$$

får vi primtall for a-verdiene 0, 6 og 12.

Også løst av: Lars Arnér, Norrköping, SE; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

404. (Innsendt av Kent Holing, Trondheim, NO.) I den rettvinklete trekanten ABD, der A er rett, er det innskrevet et rektangel $AIHG$. Trekanten BCD er slik at diameteren til dens innskrevne sirkel er lik $|BC|+|CD|-|BD|$, og normalen CE på BD har lengde lik summen av radiene til de innskrevne sirklene i trekantene GHD, IBH, EBC og ECD (se figur).



(a) La R være et rektangel med sidelengder lik lengdene av diagonalene i firkanten $ABCD$. Vis at R har dobbelt så stort areal som firkanten $ABCD$ hvis R ikke er et kvadrat. Vis at når R er et kvadrat, så har R dobbelt så stort areal som firkanten $ABCD$ hvis og bare hvis firkanten $ABCD$ selv er et kvadrat.

(b) La $a = |GH|$ og $b = |AG|$ være gitt. La $c = |BD|$ være slik at trekanten ABD er *éntydig* bestemt. Anta at a og b er heltall. Vis at firkanten $ABCD$ kan konstrueres med bruk av bare passer og linjal hvis og bare hvis a/d og b/d begge er kubikktall, der $d = \gcd(a, b)$. (Vink: Se oppgave 11 i *På gjengrodde stiger*, Normat **45**:2 (1997), s. 62–78, av Kent Holing.)

(c) Anta at a, b og c er som i (b), og i tillegg at c er et heltall og at a og b er relativt primiske. Vis at hvis firkanten $ABCD$ er konstruerbar, så er a, b og c alle kubikktall. Vis at også $|AB|$, $|AD|$ og $|DH|$ er heltallig i dette tilfellet.

(d) Anta at $|BD|$ er fast og at trekanten ABD er entydig bestemt. Forklar hvordan trekanten er knyttet til en *asteroidekurve*.

Løsning: (a) (Etter Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.) En trekant med sider a, b, c er rettvinklet med hypotenus c hvis og bare hvis diameteren i den innskrevne sirkelen er $a + b - c$. Dette følger lett hvis vi beregner arealet av trekanten på to måter: først ved Herons formel, og deretter som summen av arealene av de tre trekantene vi får ved å dele den opprinnelige trekanten ved hjelp av linjestykkene fra sentrum av den innskrevne sirkelen til hjørnene. Se også løsningen av oppgave 382 på side 41–42 i Normat **49**:1 (2001).

I denne oppgaven betyr dette at trekanten BCD er rettvinklet med C som den rette vinkelen. Videre er det gitt at

$$|CE| = r_{\mathrm{GHD}} + r_{\mathrm{IBH}} + r_{\mathrm{EBC}} + r_{\mathrm{ECD}}. \tag{1}$$

Vi ser umiddelbart at $r_{\text{GHC}}+r_{\text{IBH}} = \frac{1}{2}(|GH|+|GD|-|HD|+|IB|+|IH|-|BH|) = \frac{1}{2}(|AB|+|AD|-|BD|)$, så

$$r_{\text{GHC}} + r_{\text{IBH}} = r_{\text{ABD}}, \tag{2}$$

uavhengig av hvor H ligger på $[BD]$. Tilsvarende er $r_{\text{EBC}}+r_{\text{ECD}} = \frac{1}{2}(|EB|+|CE|-|BC|+|ED|+|CE|-|CD|) = |CE| - \frac{1}{2}(|BC|+|CD|-|BD|)$, altså

$$r_{\text{EBC}} + r_{\text{ECD}} = |CE| - r_{\text{BCD}}. \tag{3}$$

Setter vi (2) og (3) inn i (1), får vi

$$r_{\text{ABD}} = r_{\text{BCD}}. \tag{4}$$

Siden trekantene ABD og er rettvinklete med felles hypotenus BD, følger det lett av (4) at disse trekantene er kongruente,

$$\triangle ABD \cong \triangle BCD.$$

Det er nå to muligheter: (A) kongruensen kan være en ekte kongruens i planet, eller (B) kongruensen er en speiling om BD, som på figuren.

Vi skal avgjøre under hvilke betingelser R har dobbelt så stort areal som firkanten $ABCD$. Denne betingelsen kan uttrykkes ved

$$|AC|\,|BD| = |AB|\,|AD| + |BC|\,|CD|. \tag{5}$$

Tilfelle (A): Her er R et kvadrat og $ABCD$ et rektangel. Betingelsen (5) blir da

$$|AB|^2 + |AD|^2 = 2|AB|\,|AD|,$$

som bare er oppfylt når $|AB| = |AD|$, altså når $ABCD$ er et kvadrat.

Tilfelle (B): Her ser vi lett at (5) alltid gjelder. Det er også lett å se at $|AC| = |BD| \iff |AB| = |AD|$, altså at R er et kvadrat hvis og bare hvis $ABCD$ er et kvadrat.

Hermed er det klart at påstanden i punkt (a) holder: Hvis R ikke er et kvadrat, er vi i tilfelle (B), og da gjelder (5). Hvis R er et kvadrat, kan vi være i tilfelle (A) eller tilfelle (B). I tilfelle (A) gjelder (5) bare hvis $ABCD$ er et kvadrat, og i tilfelle (B) må $ABCD$ være et kvadrat.

(b) Ifølge vinket skal vi betrakte kasseproblemet og dets løsning via en fjerdegradsligning slik som beskrevet i oppgave 11 i den nevnte artikkelen. Det er klart at hvis kasseproblemet kan løses ved konstruksjon, dvs. hvis $\triangle ABD$ kan konstrueres, så kan denne konstruksjonen lett kompletteres til hele firkanten $ABCD$.

Ifølge oppgave 11 svarer tilfellet med nøyaktig 1 løsning til $c = c_0$, og da gjelder ifølge d) at $x = x_0 = |DH| = a\sqrt{1+t^2}$, der $t = (b/a)^{1/3}$. Konstruerbarheten avhenger tydeligvis bare av forholdet b/a. Da $x^2 = a^2 + (at)^2$, er det en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for geometrisk konstruksjon at $at = a(b/a)^{1/3}$ kan konstrueres. Etter forkorting med d har vi $b/a = b_0/a_0$, der $a_0 = a/d$ og $b_0 = b/d$ er innbyrdisk primiske. Det er nå klart at betingelsen er ekvivalent med at a_0 og b_0 begge er kubikktall.

(c) Av (b) følger det at a og b er kubikktall, altså $a = A^3$, $b = B^3$, der A og B er heltall. Dette gir

$$c = a(1+t^2)^{3/2} = (A^2+B^2)^{3/2}. \tag{6}$$

Altså er $c^2 = (A^2+B^2)^3$, og siden c er heltallig følger det at også c er et kubikktall, $c = C^3$, $C \in \mathbb{N}$. Nå gjelder også $x = a\sqrt{1+t^2}$, som sammen med (6) gir

$$x^3 = a^2c = A^6C^3 \iff x = A^2C,$$

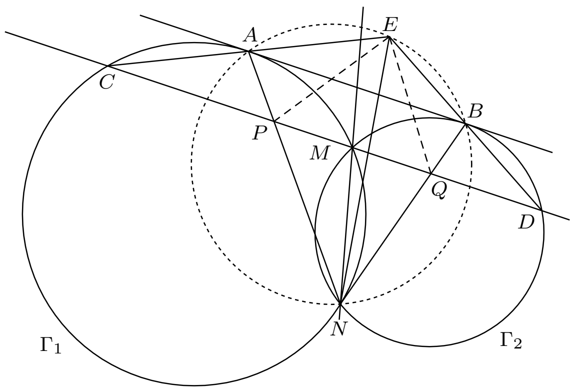
så også $x = |DH|$ er er helt tall. Sett nå $|AB| = p$, $|AD| = q$. Ved betraktning av ensformede trekanter får vi

$$p = \frac{ac}{x} = \frac{A^3C^3}{A^2C} = AC^2,$$

dvs. p er et helt tall. Bytter vi om a og b ser vi at det samme gjelder $q = |AD|$.

(d) Vi tenker oss et rettvinklet koordinatsystem med origo i A, x-akse langs AB og y-akse langs AD. Lar vi nå et linjestykke med fast lengde c bevege seg med det endepunktet på den positive x-aksen og det andre på den positive y-aksen, får vi en *innhyllingskurve* Γ. Det er velkjent at Γ er en asteroidebue, nemlig den delen av kurven $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ som ligger i første kvadrant. Ethvert punkt på denne kurven er et tangeringspunkt for et eksemplar av det bevegelige linjestykket og svarer til et punkt H hvor kasseproblemet som grensetilfelle har nøyaktig 1 løsning.

405. To sirkler Γ_1 og Γ_2 skjærer hverandre i M og N. La l være den felles tangenten til Γ_1 og Γ_2 som ligger nærmest M. La l tangere Γ_1 i A og Γ_2 i B. Linjen gjennom M parallell med l skjærer sirkelen Γ_1 også i C og sirkelen Γ_2 også i D. Linjene CA og DB skjærer hverandre i E, linjene AN og CD skjærer hverandre i P og linjene BN og CD skjærer hverandre i Q. Vis at $EP = EQ$. (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i Taejon, 2000.)



Løsning: (Etter Oddvar Iden, Bergen, NO.) Linjen MN er felles potenslinje for sirklene Γ_1 og Γ_2. Den går gjennom midtpunktet til fellestangenten AB. Derfor er $PM = MQ$.

Videre er $\angle BAE = \angle MCA$, som spenner over buen MA på sirkelen Γ_1. Det gjør også $\angle MAB$, så

$$\angle BAE = \angle MAB.$$

Ved et symmetrisk argument finner vi $\angle EBA = \angle ABM$. Derfor er $EM \perp PQ$, og følgelig $PE = QE$.

(Oppgave 427 foran går ut på å vise at punktene A, E, B og N ligger på en og samme sirkel.)

Også løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO; Jakob I. Try, Søgne, NO.

406. *Av plasshensyn må løsningen utstå til neste nummer.*

407. La a, b, c være positive reelle tall slik at $abc = 1$. Vis at

$$\Big(a - 1 + \frac{1}{b}\Big)\Big(b - 1 + \frac{1}{c}\Big)\Big(c - 1 + \frac{1}{a}\Big) \leq 1.$$

(Fra den internasjonale matematikkolympiaden i Taejon, 2000.)

Løsning: (Fra den offisielle løsningen.) Siden $abc = 1$, kan vi omforme denne inhomogene ulikheten til en homogen. Sett for eksempel $x = a$, $y = 1$, $z = 1/b$. Da er

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z} \quad c = \frac{z}{x}.$$

Setter vi dette inn i den gitte ulikheten, ser vi at den er ekvivalent med

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leq xyz.$$

La $u = x - y + z$, $v = y - z + x$ og $w = z - x + y$. Høyst ett av tallene u, v og w kan være negativt, siden summen av ethvert par er positiv. Hvis ett av dem er negativt, er $uvw \leq 0 < xyz$, og vi er fremme. Anta så at $u \geq 0$, $v \geq 0$ og $w \geq 0$. Etter ulikheten for aritmetisk og geometrisk middel er da

$$\sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} = \sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u + v) = x.$$

På tilsvarende måte er $\sqrt{vw} \leq y$ og $\sqrt{wx} \leq z$, og det følger at $uvw \leq xyz$, slik som vi skulle vise.

Løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 30. september 2003. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.