Summations- og integralformler for $\zeta(3)$ og beslægtede konstanter

Ernst E. Scheufens

Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
DK–2800 Lyngby
E.E.Scheufens@mat.dtu.dk

1. Indledning

Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ er for $\operatorname{Re} s > 1$ defineret ved [1, p. 807]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1}$$

Euler studerede ovenstående række for naturlige tal, dvs. for $s \in \mathbf{N}$, og beviste at rækken var divergent for $s = 1$ og konvergent for $s > 1$. En af Eulers største opdagelser var, at han bestemte summen af rækken for $s = 2$. Eulers bemærkelsesværdige resultat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

blev senere fulgt op af eksakte værdier for summen af rækken, når $s = 4, 6, 8$, osv. for lige værdier helt op til $s = 26$ i en publikation fra 1744, se [5, p. 54].

I dag kendes eksakte formler for $\zeta(2p)$ når p er positiv og hel, nemlig [1, p. 807]

$$\zeta(2p) = (-1)^{p-1} \frac{B_{2p}}{2(2p)!} (2\pi)^{2p}, \qquad p \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

hvor B_n er Bernoullitallene fastlagt ved

$$B_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} B_k \binom{n+1}{k} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Efter succes med at bestemme summen af rækken (1) for flere lige værdier af s gik Euler i gang med de ulige værdier større end 2, men selv det simpleste tilfælde $s = 3$ fandt han ikke nogen eksakt værdi for, selv om han prøvede flere forskellige angrebsvinkler. Det bedste han kunne gøre i en artikel fra 1735 var at bestemme summen af en beslægtet række, nemlig

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

På et senere tidspunkt fremkom han med en formodning om at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \alpha(\ln 2)^2 + \beta\frac{\pi^2}{6}\ln 2$$

for rationale tal α og β, [5, p. 60].

Hvad ved vi så i dag om $\zeta(s)$ for ulige værdier af s større end 2? Svaret er overraskende lidt. Der kendes ingen eksakte formler for $\zeta(2p+1)$, $p \in \mathbf{N}$ analogt med (2). Dog findes der integralformler med visse lighedspunkter, fx [1, p. 807]

$$\zeta(2p+1) = (-1)^{p+1}\frac{(2\pi)^{2p+1}}{2(2p+1)!}\int_0^1 B_{2p+1}(x)\cot(\pi x)\,dx, \qquad p \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

hvor $B_n(x)$ er Bernoullipolynomierne defineret ved

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}, \qquad |t| < 2\pi.$$

Længe var kun lidt kendt om $\zeta(2p+1)$, $p \in \mathbf{N}$, men i 1978 beviste Roger Apéry, at $\zeta(3)$ er et irrationalt tal [7], hvilket førte til navnet Apérys konstant. Siden har man bevist, at $\zeta(2p+1)$, $p \in \mathbf{N}$ kan udtrykkes op til rationale konstanter ved Borel-regulatoren fra den algebraiske K-gruppe $K_{4k+1}(\mathbf{Z})$. Denne er inkorporeret i de såkaldte Beĭlinson-formodninger [6], og det relevante rationale multiplum er beskrevet af Bloch og Kato ved hjælp af såkaldte Tamagawa-mål [3]. Det tyder således på at den mest naturlige beskrivelse af zetafunktionens værdier for naturlige tal er givet ved algebraisk K-teori af de hele tal, snarere end ved elementære funktioner. Denne sammenhæng mellem $\zeta(2p+1)$ og algebraisk K-teori er på et meget avanceret niveau, der fører for vidt til en videre diskussion i denne artikel. Interesserede kan finde flere henvisninger i [3] og [6].

Nært beslægtet med zetafunktionen er Dirichlets etafunktion, der for $\operatorname{Re} s > 0$ er defineret ved [1, p. 807]

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{4}$$

og Dirichlets lambdafunktion, der for $\operatorname{Re} s > 1$ er defineret ved [1, p. 807]

$$\lambda(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}. \tag{5}$$

Etafunktionen kan fortsættes analytisk til hele den komplekse plan, medens zetafunktionen og lambdafunktionen kan fortsættes analytisk til hele den komplekse plan på nær $s = 1$. Sammenhængen mellem funktionerne er

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \qquad s \in \mathbf{C},\ \text{dog } s \neq 1 \tag{6}$$

og

$$\lambda(s) = (1 - 2^{-s})\zeta(s), \qquad s \in \mathbf{C},\ \text{dog } s \neq 1. \tag{7}$$

Formålet med denne artikel er ved hjælp af Fourierrækker for ulige potensfunktioner at udlede nye summationsformler for $\eta(3)$, $\zeta(3)$ og $\lambda(3)$. Ved hjælp af disse udledes dernæst integralformler, der sammenlignes med velkendte formler i litteraturen. Hovedresultatet (22) kan være en ny angrebsvinkel til at finde sammenhænge mellem Apérys konstant $\zeta(3)$ og andre matematiske konstanter.

2. Summationsformler for etafunktionen udledt vha. Fourierrækker

Den periodiske funktion f_p givet ved $f_p(x + 2\pi) = f_p(x)$, $x \in \mathbf{R}$ og

$$f_p(x) = x^{2p+1}, \qquad -\pi < x \leq \pi$$

kan for $p = 0, 1, 2, \ldots$ udvikles i en Fourierrække

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p} \sin nx,$$

hvor

$$b_{n,0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

og

$$\begin{aligned} b_{n,p} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^{2p+1} \sin nx\, dx \\ &= \frac{2\pi^{2p}(-1)^{n-1}}{n} - \frac{4p(2p+1)}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x^{2p-1} \sin nx\, dx \\ &= \frac{2\pi^{2p}(-1)^{n-1}}{n} - \frac{2p(2p+1)}{n^2} b_{n,p-1}, \\ &\qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad p = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{9}$$

Fourierrækkens sum er $(x - 2k\pi)^{2p+1}$ for $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ og 0 for $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Da integration og summation kan ombyttes [9, p. 30] er

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p} \sin nx\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p} \int_0^{\infty} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p},$$

hvoraf følger

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p} &= \int_0^{\pi} x^{2p}\,dx + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{(x-2\pi)^{2p+1}}{x}\,dx + \int_{3\pi}^{5\pi} \frac{(x-4\pi)^{2p+1}}{x}\,dx + \cdots \\ &= \frac{\pi^{2p+1}}{2p+1} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^{2p+1}}{t+2\pi}\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^{2p+1}}{t+4\pi}\,dt + \cdots \\ &= \frac{\pi^{2p+1}}{2p+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^{2p+1}}{t+2k\pi}\,dt\end{aligned}$$

eller

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,p} = \frac{\pi^{2p}}{2p+1} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^{2p+1}}{t+2k\pi}\,dt. \tag{10}$$

Sættes $p = 0$ i (10) fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{t+2k\pi}\,dt = 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[t - 2k\pi\ln(t+2k\pi)\Big]_{-\pi}^{\pi}.$$

Idet rækken på venstre side er $\eta(1) = \ln 2$ og grænserne under summationstegnet på højre side indsættes, fås

$$\eta(1) = \ln 2 = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1 - k\ln\frac{2k+1}{2k-1}\Big) \tag{11}$$

eller

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(k\ln\frac{2k+1}{2k-1} - 1\Big) = \frac{1}{2}(1-\ln 2). \tag{12}$$

Dette resultat kan også findes i [8, p. 748].

Sættes $p = 1$ i (10) fås

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{n,1} &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t^3}{t+2k\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{2}t^2\cdot 2k\pi + t\cdot(2k\pi)^2 \\ &\qquad\qquad - (2k\pi)^3\ln(t+2k\pi)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{3} + 2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{3} + 4k^2 - 4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1}\Big).\end{aligned} \tag{13}$$

Af rekursionsformlen (9) for $b_{n,p}$ fås

$$(14)\qquad \begin{aligned} b_{n,1} &= \frac{2\pi^2(-1)^{n-1}}{n} - \frac{6}{n^2}b_{n,0} \\ &= \frac{2\pi^2(-1)^{n-1}}{n} - \frac{12(-1)^{n-1}}{n^3}, \qquad n = 1,2,3,\dots . \end{aligned}$$

Af (13) og (14) fås

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\pi^2(-1)^{n-1}}{n} - \frac{6(-1)^{n-1}}{n^3}\Big) = \frac{\pi^2}{3} + 2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{3} + 4k^2 - 4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1}\Big)$$

og da rækken på venstre side er $\pi^2\ln 2 - 6\eta(3)$ fås

$$(15)\qquad \eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1} - 4k^2 - \frac{1}{3}\Big).$$

Ved at benytte rekursionsformlen (9) kan man udlede tilsvarende summationsformler for $\eta(5)$, $\eta(7)$, osv.

3. Integralformler for etafunktionen

Ved at benytte Laurentrækken for $\ln\dfrac{2k+1}{2k-1}$ gældende for $k > \frac{1}{2}$ finder man

$$\begin{aligned} 4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1} - 4k^2 - \frac{1}{3} &= 4k^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2k)^{2n-1}} - 4k^2 - \frac{1}{3} \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2k)^{2n-4}} \end{aligned}$$

eller

$$(16)\qquad 4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1} - 4k^2 - \frac{1}{3} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+3)2^{2p}k^{2p}}, \qquad k > \frac{1}{2}.$$

Af (15) og (16) fås

$$\begin{aligned} \eta(3) &= \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+3)2^{2p}k^{2p}} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p+3)2^{2p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\zeta(2p)}{(2p+3)2^{2p}}. \end{aligned}$$

Ved at benytte (2) fås

$$\begin{aligned}\eta(3) &= \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi^2}{3}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}B_{2p}}{2(2p+3)(2p)!}\,\pi^{2p} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\ln 2 + \frac{\pi^2}{3}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}B_{2p}}{2(2p+3)(2p)!}\,\pi^{2p}.\end{aligned} \tag{17}$$

For at omskrive summen til et integral betragtes funktionen

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}B_{2p}}{2(2p+3)(2p)!}\,x^{2p+3}, \qquad -2\pi < x < 2\pi \tag{18}$$

med den afledede

$$f'(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}B_{2p}}{2(2p)!}\,x^{2p+2} = -\tfrac{1}{2}x^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}B_{2p}}{(2p)!}\,x^{2p}, \qquad -2\pi < x < 2\pi.$$

Vi genkender her Taylorrækken

$$\frac{1}{2}x\cot\frac{x}{2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p}B_{2p}}{(2p)!}\,x^{2p} \qquad -2\pi < x < 2\pi, \tag{19}$$

altså er

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3\cot\frac{x}{2}, \qquad -2\pi < x < 2\pi. \tag{20}$$

Af (17) og (18) fås

$$\eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 + \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{f(\pi)}{\pi^3} = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 + \frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\,dx$$

og endelig ved benyttelse af (20)

$$\eta(3) = \frac{\pi^2}{6}\ln 2 - \frac{1}{12\pi}\int_0^{\pi} x^3\cot\frac{x}{2}\,dx. \tag{21}$$

Ved at benytte passende substitutioner kan (21) omskrives til integralformler, hvor cotangens har argumentet x eller πx.

4. Summations- og integralformler for zetafunktionen

Af (6) følger, at $\zeta(3) = \frac{4}{3}\eta(3)$. Ved hjælp af (15) fås summationsformlen

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{9}\ln 2 - \frac{2\pi^2}{27} + \frac{4\pi^2}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(4k^3\ln\frac{2k+1}{2k-1} - 4k^2 - \frac{1}{3}\Big) \tag{22}$$

og ved hjælp af (21) fås integralformlen

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{9}\ln 2 - \frac{1}{9\pi}\int_0^\pi x^3 \cot\frac{x}{2}\,dx. \tag{23}$$

Summationsformlerne (15) og (22) har det ikke været muligt at finde nogen steder. Euler brugte divergente rækker indeholdende logaritmeled til at bestemme en integralformel for $\lambda(3)$, se næste afsnit. I [8, p. 747, 5.5.1, ligning 9] er angivet en formel for potensrækken

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k \ln\frac{k+a}{k+b},$$

som efter nogle differentiationer kunne bruges til en omskrivning af summen til et kompliceret integral. Formlen i [8] er i øvrigt forkert og bør retmæssigt være

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k \ln\frac{k+a}{k+b} = \int_0^1 (t^{b-1} - t^{a-1})\ln(1-xt)\frac{dt}{\ln t}, \qquad |x| < 1.$$

Det skal nu bevises, at integralformlen (23) stemmer overens med (3) for $p = 1$. Idet $B_3(x)\cot(\pi x)$ er symmetrisk om $x = \frac{1}{2}$ fås af (3) for $p = 1$

$$\zeta(3) = \frac{(2\pi)^3}{2\cdot 3!}\int_0^1 B_3(x)\cot(\pi x)\,dx = \frac{(2\pi)^3}{3!}\int_0^{1/2} B_3(x)\cot(\pi x)\,dx. \tag{24}$$

Indsættes $B_3(x)$ og substitueres $x = \pi t$ fås

$$\begin{aligned}\zeta(3) &= \frac{4\pi^3}{3}\int_0^{1/2}(x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\cot(\pi x)\,dx\\ &= \frac{4}{3\pi}\int_0^{\pi/2} t^3\cot t\,dt - 2\int_0^{\pi/2} t^2\cot t\,dt + \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} t\cot t\,dt,\end{aligned}$$

som ved benyttelse af matematikprogrammet Maple giver

$$\zeta(3) = \frac{4}{3\pi}\int_0^{\pi/2} t^3\cot t\,dt - 2\Big(\frac{\pi^2}{4}\ln 2 - \frac{7}{8}\zeta(3)\Big) + \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

og efter en lille omskrivning

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{9}\ln 2 - \frac{16}{9\pi}\int_0^{\pi/2} t^3\cot t\,dt. \tag{25}$$

Ved at substituere $t = \frac{1}{2}x$ i integralet fås (23).

5. Sammenligning med Eulers formel for $\lambda(3)$

Euler har i 1772 givet et kompliceret bevis for, at

$$\lambda(3) = \frac{\pi^2}{4} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} x \ln \sin x \, dx. \tag{26}$$

Beviset, der bygger på anvendelse af divergente rækker og løsning af en differens-differentialligning, er i store træk gengivet i [2]. Det skal her vises hvorledes integralformlen for $\zeta(3)$ også fører til (26). Af (7) følger, at $\lambda(3) = \frac{7}{8}\zeta(3)$ og dermed ved hjælp af (25) med x som integrationsvariabel i stedet for t

$$\lambda(3) = \frac{7\pi^2}{36} \ln 2 - \frac{14}{9\pi} \int_0^{\pi/2} x^3 \cot x \, dx. \tag{27}$$

Ved at benytte partiel integration fås

$$2 \int_0^{\pi/2} x \ln \sin x \, dx = -\int_0^{\pi/2} x^2 \cot x \, dx$$

og dernæst ved hjælp af Maple og (25)

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cot x \, dx = \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - \frac{7}{8}\zeta(3) = \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - \frac{7}{8}\Big(\frac{2\pi^2}{9} \ln 2 - \frac{16}{9\pi} \int_0^{\pi/2} x^3 \cot x \, dx\Big)$$

Altså er

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{4} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} x \ln \sin x \, dx &= \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - \int_0^{\pi/2} x^2 \cot x \, dx \\ &= \frac{7\pi^2}{36} \ln 2 - \frac{14}{9\pi} \int_0^{\pi/2} x^3 \cot x \, dx\end{aligned}$$

og det er dermed bevist, at (26) og (27) stemmer overens.

6. Konklusion

Det er velkendt, at Fourierrækker for x^{2p}, $-\pi < x < \pi$ kan bruges til at bestemme eksakte værdier for $\zeta(2p)$, $p \in \mathbf{N}$, fordi Fourierrækkerne er cosinus-rækker, se fx [10]. Da Fourierrækker for x^{2p+1}, $-\pi < x < \pi$ er sinus-rækker, kan man ikke på samme måde bestemme eksakte værdier for $\zeta(2p+1)$, $p \in \mathbf{N}$. I denne artikel er vist hvorledes man kan arbejde videre med sinus-rækkerne ved at dividere med x og dernæst integrere fra nul til uendelig. Herved opnås, at man får en konstant multipliceret med summen af Fourierkoefficienterne, som så kan udtrykkes ved $\zeta(2p+1)$, $p \in \mathbf{N}$. Der er på denne måde fundet nye rækker for $\zeta(3)$ og beslægtede konstanter, som kan være en ny angrebsvinkel til at finde sammenhænge mellem Apérys konstant $\zeta(3)$ og andre matematiske konstanter. Ved hjælp af de fundne rækker er udledt integralformler, der kan sammenlignes med velkendte formler fra litteraturen.

Litteratur

[1] M. Abramowitz, I. Stegun (Eds.), *Handbook of Mathematical Functions / With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1972.

[2] R. Ayoub, Euler and the Zeta Function. *Amer. Math. Monthly* **81**, 1067–1086 (1974).

[3] S. Bloch and K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, *Prog. Math.* **86**, 333–400 (1990).

[4] D. Cvijović, J. Klinowski, Integral representations of the Riemann zeta function for odd-integer arguments. *J. Comput. App. Math.* **142**, 435–439 (2002).

[5] William Dunham, *Euler*: *The master of us all*. The Dolciani Mathematical Expositions **22**, MAA 1999.

[6] J. Nekovář, Beĭlinson's conjectures. In Motives (Seattle, WA 1991). *Proc. Symp. Pure Math.* **55**/I, 537–570 (1994). Kan findes på nettet: `http://www.math.jussieu.fr/~nekovar/pu/`.

[7] A. van der Poorten, A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$. *Math. Intelligencer* **1**, 196–203 (1979).

[8] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and Series*, Vol. 1. Gordon and Breach, New York, 1990.

[9] N. M. Temme, *Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. John Wiley, New York, 1996.

[10] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.