Strängar i månsken II*

Gert Almkvist

Matematikcentrum
Box 118
SE–22100 Lund

Inledning.

I denna andra del studeras först differentialekvationer av 4:e ordningen, där maximal degeneration råder, dvs det finns lösningar med $\log(x)$-termer upp till $\log^3(x)$. Ett villkor på koefficienterna härleds, vilket är ekvivalent med en vanlig formel för Yukawakopplingen. Därefter ges en del exempel av högre ordning där spegelavbildningen har heltalskoefficienter. I ett Appendix ges en katalog över de kända 4:e ordningens differentialekvationer där spegelavbildningen (och märkligt nog även Yukawakopplingen har heltaliga n_d) har heltalskoefficienter. Exempel 9 är nytt men har oberoende också upptäckts av Doran och Morgan i New York.

1. Allmän teori för 4:e ordningens differentialekvationer.

Betrakta differentialekvationen

$$y'''' + p_3(x)y''' + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

med lösningarna y_0, y_1, y_2, y_3. Sätt

$$t = \frac{y_1}{y_0}.$$

Låt

$$u_1 = \frac{y_1}{y_0}, \quad u_2 = \frac{y_2}{y_0}, \quad u_3 = \frac{y_3}{y_0}.$$

*Del I av denna artikel trycktes i förra numret.

Vi antar i fortsättningen att följande gäller

$$\begin{aligned} u_1 &= \log(x) + s_1, \\ u_2 &= \tfrac{1}{2}\log^2(x) + s_1\log(x) + s_2, \\ u_3 &= \tfrac{1}{6}\log^3(x) + \tfrac{1}{2}s_1\log^2(x) + s_2\log(x) + s_3. \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1x + a_2x^2 + \cdots, \\ s_2 &= b_1x + b_2x^2 + \cdots, \\ s_3 &= c_1x + c_2x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Dessa koefficienter är inte oberoende av varandra. Man kan visa att följande gäller

$$\begin{aligned} c_1 &= -2b_1, \\ c_2 &= \tfrac{1}{2}a_1^2 - b_2, \\ c_3 &= \tfrac{1}{3}(2a_1a_2 + a_1b_2 - a_2b_1 - 2b_3), \\ c_4 &= \tfrac{1}{4}(a_2^2 + 2a_1b_3 - 2b_4 + 2a_1a_3 - 2a_3b_1), \\ c_5 &= \tfrac{1}{5}(a_2b_3 - 2b_5 - 3a_4b_1 - a_3b_2 + 2a_2a_3 + 2a_1a_4 + 3a_1b_4). \end{aligned}$$

Sats: Följande är ekvivalent

(a)
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_2}{y_0}\right) = \frac{\exp\Big(-\frac{1}{2}\int p_3(x)\,dx\Big)}{y_0^2\Big(\frac{dt}{dx}\Big)^3}$$

(b)
$$p_1 = \tfrac{1}{2}p_2p_3 - \tfrac{1}{8}p_3^3 + p_2' - \tfrac{3}{4}p_3p_3' - \tfrac{1}{2}p_3''$$

Bevis: Sätt

$$u_1 = \frac{y_1}{y_0}, \quad u_2 = \frac{y_2}{y_0}, \quad u_3 = \frac{y_3}{y_0}.$$

Då är u_1, u_2, u_3 lösningar till

$$u'''' + q_3u''' + q_2y'' + q_1u' = 0$$

där

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + 2p_2\frac{y_0'}{y_0} + 3p_3\frac{y_0''}{y_0} + 4\frac{y_0'''}{y_0}, \\ q_2 &= p_2 + 3p_3\frac{y_0'}{y_0} + 6\frac{y_0''}{y_0}, \\ q_3 &= p_3 + 4\frac{y_0'}{y_0}. \end{aligned}$$

Vi har

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{y_2}{y_0}\Big) = \frac{du_2}{dt} = u_2'\frac{dx}{dt} = \frac{u_2'}{u_1'}$$

ty

$$t = u_1 \quad \text{och} \quad \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{y_2}{y_0}\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{u_2'}{u_1'}\Big) = \Big(\frac{u_2''}{u_1'} - \frac{u_2'u_1''}{(u_1')^2}\Big)\frac{1}{u_1'} = \frac{w}{\Big(\dfrac{dt}{dx}\Big)^3}$$

där

$$w = u_1'u_2'' - u_1''u_2' = \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix}.$$

Vi härleder en differentialekvation för w

$$\begin{aligned}
w' &= \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix}, \\
w'' &= \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'''' & u_2'''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} - q_3w' - q_2w, \\
w''' &= \begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1'''' & u_2'''' \end{vmatrix} - (q_3w')' - (q_2w)' \\
&= -q_3\begin{vmatrix} u_1'' & u_2'' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} + q_1w - q_3w'' - q_3'w' - q_2w' - q_2'w \\
&= -q_3(w'' + q_3w' + q_2w) + q_1w - q_3w'' - q_3'w' - q_2w' - q_2'w.
\end{aligned}$$

Det följer

$$w''' + r_2w'' + r_1w' + r_0w = 0$$

där

$$\begin{aligned}
r_0 &= q_2q_3 - q_1 + q_2', \\
r_1 &= q_2 + q_3^2 + q_3', \\
r_2 &= 2q_3.
\end{aligned}$$

Vi visar att

$$\widetilde{w} = \frac{1}{y_0^2}\exp\Big(-\frac{1}{2}\int p_3(x)\,dx\Big)$$

satisfierar differentialekvationen för w. Vi deriverar

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}' &= -\Big(\tfrac{1}{2}p_3 + 2\frac{y_0'}{y_0}\Big)\widetilde{w}, \\
\widetilde{w}'' &= \Big(\tfrac{1}{4}p_3^2 - \tfrac{1}{2}p_3' + 2p_3\frac{y_0'}{y_0} - 2\frac{y_0''}{y_0} + 6\frac{(y_0')^2}{y_0^2}\Big)\widetilde{w}, \\
\widetilde{w}''' &= \Big(\tfrac{3}{4}p_3p_3' - \tfrac{1}{2}p_3'' - \tfrac{1}{8}p_3^3 + 3(p_3' - \tfrac{1}{2}p_3^2)\frac{y_0'}{y_0} + 3p_3\frac{y_0''}{y_0} - 2\frac{y_0'''}{y_0} \\
&\qquad - 9p_3\Big(\frac{y_0'}{y_0}\Big)^2 + 18\frac{y_0'y_0''}{y_0^2} - 24\Big(\frac{y_0'}{y_0}\Big)^3\Big)\widetilde{w}.
\end{aligned}$$

Nu sätter vi in detta i

$$w''' + r_2 w'' + r_1 w' + r_0 w = 0.$$

Som genom ett under försvinner alla termer med y_0 och dess derivator och vi får kvar

$$\left(\tfrac{1}{2}p_2p_3 - \tfrac{1}{8}p_3^3 + p_2' - \tfrac{3}{4}p_3p_3' - p_1\right)\widetilde{w} = 0.$$

Så w och $\widetilde{w}$ satisfierar samma differentialekvation. Vi utvecklar nära $x = 0$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{x^3} + \frac{3a_1 + b_1}{x^2} + \frac{6a_2 + 4b_2 + a_1^2}{x} + \cdots \\ \widetilde{w} &= \frac{1}{x^3} + \frac{3a_1 + 2b_1 + \frac{1}{2}c_1}{x^2} \\ &\quad + \frac{-4a_1b_1 + 6a_2 + 4c_2 + 8b_2 - 2a_1c_1 - \frac{3}{2}b_1^2 - a_1^2 - \frac{1}{8}b_1c_1c_1^2}{x} + \cdots \end{aligned}$$

Använder vi relationerna mellan koefficienterna ser vi att w och $\widetilde{w}$ överensstämmer.

Följdsats 1: Under förutsättningarna i Satsen gäller

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_3}{y_0}\right) = t\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_2}{y_0}\right).$$

Bevis: Påståendet är ekvivalent med

$$\begin{vmatrix} u_1' & u_3' \\ u_1'' & u_3'' \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} = u_1 w.$$

Observera att vänsterledet är också (liksom w) en lösning till

$$w''' + r_2 w'' + r_1 w' + r_0 w = 0$$

om vi byter y_2 mot y_3. Vi måste alltså visa att om w och uw är lösningar till denna differentialekvation så är u lösning till

$$u'''' + q_3 u''' + q_2 u'' + q_1 u' = 0.$$

Vi får

$$\begin{aligned} u'''w + 3u''w' + 3u'w'' + uw''' + r_2(u''w + 2u'w' + uw'') \\ + r_1(u'w + uw') + r_0 uw = 0. \end{aligned}$$

Det följer

$$u''' + \left(3\frac{w'}{w} + r_2\right)u'' + \left(3\frac{w''}{w} + 2r_2\frac{w'}{w} + r_1\right)u' = 0$$

eller säg

$$u''' + s_2 u'' + s_1 u' = 0.$$

Derivera

$$\begin{aligned} u'''' + s_2 u''' + (s_2' + s_1)u'' + s_1' u' &= 0, \\ s_2 u''' + s_2^2 u'' + s_2 s_1 u' &= 0. \end{aligned}$$

Addera

$$u'''' + 2s_2 u''' + (s_2^2 + s_2' + s_1)u'' + (s_2 s_1 + s_1')u' = 0.$$

Men

$$\begin{aligned} s_1 &= r_1 + 2r_2 \frac{w'}{w} + 3\frac{w''}{w}, \\ s_2 &= r_2 + 3\frac{w'}{w} \end{aligned}$$

och vi har formler för w'/w och w''/w. Sätter vi in detta finner vi (Maple) att u satisfierar

$$u'''' + q_3 u''' + q_2 u'' + q_1 u' = 0.$$

Anmärkning: Ur följdsatsen får man

$$\frac{1}{2}\frac{d^3}{dt^3}\Big(t\frac{y_2}{y_0} - \frac{y_3}{y_0}\Big) = \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{y_2}{y_0}\Big)$$

Vänsterledet brukar användas som definition av Yukawakopplingen.

Följdsats 2: Differentialekvationen

$$\big(\theta^4 - x(a\theta^4 + 2a\theta^3 + b\theta^2 + (b-a)\theta + c)\big)y = 0, \qquad \theta = x\frac{d}{dx},$$

uppfyller villkoret i Satsen. Vidare gäller att Yukawakopplingen är

$$w = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{y_2}{y_0}\right) = \frac{1}{(1-ax)y_0^2\Big(x\dfrac{dt}{dx}\Big)^3}.$$

Bevis: Man visar lätt att differentialekvationen blir

$$y'''' + \frac{6-8ax}{x(1-ax)}y''' + \frac{7-13ax-bx}{x^2(1-ax)}y'' + \frac{1-2ax-2bx}{x^3(1-ax)}y' - \frac{c}{x^3(1-ax)}y = 0.$$

Med hjälp av Maple kontrollerar man villkoret i Satsen. Vidare blir

$$\frac{1}{2}\int p_3(x)\,dx = \int \frac{3-4ax}{x(1-ax)}\,dx = 3\log(x) + \log(1-ax)$$

och

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}\int p_3(x)\,dx\Big) = \frac{1}{(1-ax)x^3}.$$

Något mera allmänt betraktar vi

$$\big(\theta^4 - ax(\theta^4 + s_1\theta^3 + s_2\theta^2 + s_3\theta + c)\big)y = 0.$$

Villkoret i Satsen är uppfyllt om och endast om

$$\begin{aligned} s_1^3 - 4s_1s_2 + 8s_3 &= 0,\\ 4s_1s_2 - 6s_1^2 + 4s_1 + 8s_2 - 16s_3 &= 0,\\ 4s_1 - 8s_2 + 8s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminerar man s_2 och s_3 får man

$$s_1^3 - s_1^2 + 8s_1 = 0$$

med lösningarna

(a) $s_1 = s_2 = s_3 = 0$;

(b) $s_1 = 2$ ger $s_3 = s_2 - 1$ vilket är precis fallet med a, b, c som ger de 14 lösningarna i katalogen;

(c) $s_1 = 4$, $s_2 = 6$, $s_3 = 4$, dvs

$$\big(\theta^4 - ax((\theta+1)^4 + c - 1)\big)y = 0.$$

Vi indikerar att fall (c) inte kan ge några heltalslösningar. Betrakta

$$x(q) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)q^n.$$

Beräkna t.ex. $h(14)$ för $c = 0, 1, 2, \ldots, 12$ och faktorisera. Vi finner att nämnaren alltid innehåller minst en faktor 13. Det följer att a är delbart med 13. På samma sätt inses att andra primtal måste dela a.

Inspirerade av Lian–Yaus konstruktion för 3:e ordningens differentialekvationer betraktar vi differentialoperatorn

$$\theta^4 - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^j f_j(\theta) \qquad \text{där} \quad f_j(\theta) = \theta^4 + \cdots + b_j.$$

Vi tar $m = 2$ och finner att en lösning till

$$p_1 = \tfrac{1}{2}p_2p_3 - \tfrac{1}{8}p_3^3 + p_2' - \tfrac{3}{4}p_3p_3' - \tfrac{1}{2}p_3''$$

ges av

$$\theta^4 - \lambda_1 x \left(\theta^4 + 2\theta^3 + a_1\theta^2 + (a_1 - 1)\theta + b_1\right) \\ - \lambda_2 x^2 \left(\theta^4 + 4\theta^3 + a_2\theta^2 + (2a_2 - 8)\theta + b_2\right)$$

(där finns fler lösningar). Jag har gjort ett par försök att hitta heltalslösningar utan att lyckas (se tillägget i slutet av artikeln där $m = 5$).

2. Högre ordningens differentialekvationer.

Man observerar att för alla 14 fallen i Calabi–Yaukatalogen är y_0 av formen

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(an)!(bn)!\cdots}{(cn)!(dn)!\cdots(n!)^k}\, x^n$$

där

$$a + b + \cdots = c + d + \cdots + k.$$

Man kan fråga sig om man kan få heltalskoefficienter i spegelavbildningen $x(q)$ i fler fall där vi har en högre ordnings differentialekvation. Det är oklart (åtminstone för mig) hur man skall definiera Yukawakopplingen i dessa fall. Först finner vi lösningen y_1. Definiera

$$H(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Då får vi $y_1 = y_0 \log(x) + u$ där

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)!(bn)!\cdots}{(cn)!(dn)!\cdots(n!)^k} \big(aH(an) + bH(n) + \cdots - cH(cn) \\ - dH(dn) - \cdots - kH(n)\big)x^n$$

Nu får vi

$$q = x \exp\Bigl(\frac{u}{y_0}\Bigr)$$

och har q heltalskoefficienter så har inversa funktionen $x = x(q)$ det också. Vi inför beteckningen

$$\binom{a, b, \cdots}{c, d, \cdots}$$

för y_0 ovan.

Exempel 5: Följande ger heltal (experimentellt...)

(a) $$\binom{m}{1},$$

(b) $$\binom{a}{c,d} \quad \text{om} \quad a \geq 3c \text{ och } d \leq \left[\frac{3c}{2}\right],$$

(c) $$\binom{a,b}{c,d} \quad \text{om} \quad a \geq 2c \text{ och } b \geq 2c - \left[\frac{c}{2}\right] \text{ och } d \leq c + \left[\frac{c}{2}\right].$$

Exempel 6: Betrakta fallet
$$\binom{10}{5,3}.$$

Här får vi

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n)!}{(5n)!(3n)!(n!)^2} x^n = 1 + 5\,040\,x + 23\,279\,260\,x^2 + \cdots$$

och
$$y_1 = y_0 \log(x) + 52\,280\,x + 2\,556\,657\,164\,x^2 + \cdots$$

Vi får differentialekvationen av 5:e ordningen

$$\theta^3\big(\theta - \tfrac{1}{3}\big)\big(\theta - \tfrac{2}{3}\big) - \tfrac{20^5}{3^3}x\big(\theta + \tfrac{1}{10}\big)\big(\theta + \tfrac{3}{10}\big)\big(\theta + \tfrac{5}{10}\big)\big(\theta + \tfrac{7}{10}\big)\big(\theta + \tfrac{9}{10}\big)$$

med ytterligare lösningar

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_0 \log^2(x) + 2\log(x)(52\,280\,x + \cdots) + \frac{52\,360}{3}\,x + \frac{18\,235\,676\,966}{5}\,x^2 + \cdots,\\
y_4 &= x^{1/3}\Big(1 + \frac{7\,082\,725}{324}\,x + \cdots\Big),\\
y_5 &= x^{2/3}\Big(1 + \frac{71\,977\,304}{2\,025}\,x + \cdots\Big).
\end{aligned}$$

Vi får

$$q = \exp\Big(\frac{y_1}{y_0}\Big) = x + 52\,280\,x^2 + 3\,659\,765\,164\,x^3 + 293\,959\,429\,567\,160\,x^4 + \cdots$$

och
$$x = q - 52\,280\,q^2 + 1\,806\,631\,636\,q^3 - 517\,548\,774\,560\,q^4 - \cdots.$$

Exempel 7: Vi ger ett exempel till, som leder till en 6:e ordningens differentialekvation
$$\binom{14}{7,2,2,2}.$$

Vi har alltså

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(14n)!}{(7n)!\big((2n)!\big)^3 n!} x^n$$

och

$$y_1 = y_0 \log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(14n)!}{(7n)!\big((2n)!\big)^3 n!}\big(14H(14n) - 7H(7n) - 6H(2n) - H(n)\big)x^n$$

med

$$x = x(q) = q - 37\,560\,768\,q^2 - 107\,216\,579\,834\,784\,q^3 - 251\,581\,983\,382\,544\,966\,464\,q^4 - \cdots .$$

Differentialekvationen blir

$$\theta^4\big(\theta - \tfrac{1}{2}\big)^2 - 2\cdot 14^7 x\big(\theta + \tfrac{1}{14}\big)\big(\theta + \tfrac{3}{14}\big)\big(\theta + \tfrac{5}{14}\big)\big(\theta + \tfrac{9}{14}\big)\big(\theta + \tfrac{11}{14}\big)\big(\theta + \tfrac{13}{14}\big).$$

Genom att använda ett kriterium av Dwork [6], gör vi följande

Förmodan: $x(q)$ har heltals koefficienter om och endast om

$$y_0(x)u(x^p) - p y_0(x^p)u(x) \equiv 0 \bmod p$$

för alla primtal p. Här betyder

$$\frac{a}{b} \equiv 0 \bmod p$$

att $p \mid a$ och $p \nmid b$.

Referenser

Referenser av typen `hep-th/9409029` kan laddas ner från arXivbasen `http://arXiv.org/abs/` (t.ex. `http://arXiv.org/abs/hep-th/9409029`).

[1] R. E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras. *Invent. Math.* **109**, 405–444 (1992).

[2] M. Cipu, Replicable functions: a computational approach. *Computer Sci. J. of Moldova* **4**, 342–359 (1996).

[3] M. Cipu, A conjecture by McKay via Gröbner bases. in *Proc. 6th Rhein. Workshop on Computer Algebra* 1998.

[4] J. Conway and S. Norton, Monstrous moonshine. *Bull. London Math. Soc.* **11**, 308–339 (1979).

[5] C. F. Doran, Picard-Fuchs uniformization: Modularity of the mirror map and mirror-moonshine. `math.AG/9812162`.

[6] B. M. Dwork, On p-adic differential equations. IV. Generalized hypergeometric functions as p-adic analytic functions in one variable. *Ann. sci. l'École Norm. Sup.* **6**, 295–316 (1973).

[7] D. Ford, J. McKay and S. Norton, More on replicable functions. *Commun. Alg.* **22** 5175–5193 (1994).

[8] P. Goddard, The work of R.E. Borcherds. `math.QA/9808136`, also in *Proc. Intern. Congr. Berlin.* (1998).

[9] M. Jinzenji and M. Nagura, Mirror symmetry and an exact calculation of $N-2$ point correlation function on Calabi–Yau manifold embedded in CP^{N-1}. `hep-th/9409029`.

[10] A. Klemm and S. Theisen, Considerations of one-modulus Calabi–Yau compactifications: Picard–Fuchs equations, Kähler potentials and mirror maps. `hep-th/9205041`.

[11] A. Klemm, B. H Lian, S. S. Roan and S.-T. Yau, A note on ODEs from mirror symmetry. `hep-th/9407192`.

[12] B. H. Lian and S.-T. Yau, Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling. `hep-th/9411234`.

[13] B. H. Lian and S.-T. Yau, Mirror maps, modular relations and hypergeometric series I. `hep-th/9507151`.

[14] B. H. Lian, K. Liu and S.-T. Yau, Mirror principle I. `alg-geom/9712011`.

[15] A. Libgober and J. Teitelbaum, Lines on Calabi–Yau complete intersections, mirror symmetry, and Picard–Fuchs equations. *Int. Math. Research Notices* **1**, 29–39 (1993), `alg-geom/9301001`.

[16] J. McKay and H. Strauss, The q-series of monstrous moonshine and the decomposition of the head characters. *Commun. Alg.* **18**, 253–278 (1990).

[17] D. R. Morrison, Picard–Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces. `hep-th/9111025`.

[18] M. Nagura and K. Sugiyama, Mirror symmetry of K3 and torus. `hep-th/9312159`.

[19] M. Noguchi, Mirror symmetry of Calabi–Yau manifolds and flat coordinates. `hep-th/9609163`.

Appendix.

Katalog över kända differentialekvationer av formen

$$\big(\theta^4 - x(a\theta^4 + 2a\theta^3 + b\theta^2 + (b-a)\theta + c)\big)y = 0$$

där a, b, c är heltal och där spegelavbildningen och Yukawakopplingen har heltalskoefficienter. Referenser ges utom i exempel 9, som jag inte har lyckats finna i litteraturen. Ett e-mail från C. Doran och J. Morgan (12.2.03) visar att de också funnit denna ekvation men ännu inte vet om den kommer från en Calabi–Yau-mångfald. De bekräftar att det inte finns mer än 14 fall, med ”Hodgeindex $h^{1,1} = 1$”.

1. $a = 3125$, $b = 4375$, $c = 120$:

$$\theta^4 - 5^5 x(\theta + \tfrac{1}{5})(\theta + \tfrac{2}{5})(\theta + \tfrac{3}{5})(\theta + \tfrac{4}{5})$$

$$x = q - 770\,q^2 + 171\,525\,q^3 - 81\,623\,000\,q^4 - 35\,423\,171\,250\,q^5 - \cdots$$

$$n_1 = 2\,875 \qquad n_3 = 63\,441\,275$$

$$n_2 = 121\,850$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5n)!}{(n!)^5} x^n$$

$$x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

Klemm–Theisen `hep-th/9205041`.

2. $a = 800\,000$, $b = 1\,040\,000$, $c = 15\,120$:

$$\theta^4 - 800\,000\,x(\theta + \tfrac{1}{10})(\theta + \tfrac{3}{10})(\theta + \tfrac{7}{10})(\theta + \tfrac{9}{10})$$

$$x = q - 179\,520\,q^2 + 6\,827\,618\,400\,q^3 - 1\,265\,272\,725\,248\,000\,q^4 - 233\,438\,874\,774\,349\,890\,000\,q^5 - \cdots$$

$$n_1 = 231\,200 \qquad n_3 = 1\,700\,894\,366\,474\,400$$

$$n_2 = 12\,215\,785\,600$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n)!}{(5n)!(2n)!(n!)^3} x^n$$

$$x_0^2 + x_1^5 + x_2^{10} + x_3^{10} + x_4^{10} = 0$$

Klemm–Theisen `hep-th/9205041`, Morrison `hep-th/9111025`.

3. $a = 256$, $b = 384$, $c = 16$:

$$\theta^4 - 256\,x(\theta + \tfrac{1}{2})^4$$

$$x = q - 64\,q^2 + 1\,120\,q^3 - 38\,912\,q^4 - 1\,536\,464\,q^5 - \cdots$$

$$n_1 = 32 \qquad n_4 = 1\,606\,496$$

$$n_2 = 608 \qquad n_5 = 122\,373\,984$$

$$n_3 = 26\,016$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^4 x^n$$

$$V_{2,2,2,2}$$

Libgober–Teitelbaum [15].

4. $a = 729$, $b = 1\,053$, $c = 36$:

$$\theta^4 - 3^6 x(\theta + \tfrac{1}{3})^2(\theta + \tfrac{2}{3})^2$$
$$x = q - 180\,q^2 + 8\,910\,q^3 - 948\,840\,q^4 - 106\,787\,835\,q^5 - \cdots$$
$$\begin{array}{ll} n_1 = 117 & n_4 = 126\,605\,376 \\ n_2 = 5\,868 & n_5 = 27\,754\,210\,287 \\ n_3 = 713\,814 & \end{array}$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(3n)!}{(n!)^3}\right)^2 x^n$$
$$V_{3,3}$$

Litgober–Teitelbaum [15].

5. $a = 432$, $b = 636$, $c = 24$:

$$\theta^4 - 432\,x(\theta + \tfrac{1}{2})^2(\theta + \tfrac{1}{3})^2$$
$$x = q - 108\,q^2 + 3\,294\,q^3 - 198\,000\,q^4 - 12\,287\,187\,q^5 - \cdots$$
$$\begin{array}{ll} n_1 = 60 & n_4 = 14\,016\,600 \\ n_2 = 1\,869 & n_5 = 1\,806\,410\,976 \\ n_3 = 134\,292 & \end{array}$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$$
$$V_{2,2,3}$$

Litgober–Teitelbaum [15].

6. $a = 1\,024$, $b = 1\,472$, $c = 48$:

$$\theta^4 - 2^{10} x(\theta + \tfrac{1}{2})^2(\theta + \tfrac{1}{4})(\theta + \tfrac{3}{4})$$
$$x = q - 256\,q^2 + 19\,296\,q^3 - 2\,836\,480\,q^4 - 378\,262\,992\,q^5 - \cdots$$
$$\begin{array}{ll} n_1 = 160 & n_4 = 485\,487\,816 \\ n_2 = 11\,536 & n_5 = 14\,865\,410\,272 \\ n_3 = 1\,956\,896 & \end{array}$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(4n)!}{(n!)^4} x^n$$
$$V_{2,4}$$

Libgober–Teitelbaum [15].

7. $a = 65\,536$, $b = 88\,064$, $c = 1\,680$:

$$\theta^4 - 2^{16}x(\theta + \tfrac{1}{8})(\theta + \tfrac{3}{8})(\theta + \tfrac{5}{8})(\theta + \tfrac{7}{8})$$

$$x = q - 15\,808\,q^2 + 71\,416\,416\,q^3 - 781\,471\,946\,752\,q^4 - 7\,530\,783\,115\,074\,000\,q^5 - \cdots$$

$$\begin{array}{ll} n_1 = 14\,752 & n_4 = 11\,596\,528\,012\,396\,656 \\ n_2 = 64\,417\,456 & n_5 = 233\,938\,237\,312\,624\,658\,400 \\ n_3 = 711\,860\,273\,440 & \end{array}$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n)!}{(4n)!(n!)^4}\, x^n$$

$$4x_0^2 + x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 + x_4^8 = 0$$

Klemm–Theisen `hep-th/9205041`.

8. $a = 11\,664$, $b = 15\,876$, $c = 360$:

$$\theta^4 - 11\,664\,x(\theta + \tfrac{1}{6})(\theta + \tfrac{5}{6})(\theta + \tfrac{1}{3})(\theta + \tfrac{2}{3})$$

$$x = q - 2\,772\,q^2 + 1\,980\,126\,q^3 - 4\,010\,268\,048\,q^4 - 8\,360\,302\,475\,475\,q^5 - \cdots$$

$$\begin{array}{ll} n_1 = 2\,628 & n_4 = 11\,533\,584\,001\,896 \\ n_2 = 2\,009\,484 & n_5 = 41\,531\,678\,111\,043\,360 \\ n_3 = 3\,966\,805\,740 & \end{array}$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(2n)!(n!)^4}\, x^n$$

$$2x_0^3 + x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 = 0$$

Klemm–Theisen `hep-th/9205041`.

9. $a = 2\,985\,984$, $b = 3\,939\,840$, $c = 55\,440$:

$$\theta^4 - 12^6x(\theta + \tfrac{1}{12})(\theta + \tfrac{5}{12})(\theta + \tfrac{7}{12})(\theta + \tfrac{11}{12})$$

$$x = q - 732\,096\,q^2 + 170\,505\,085\,536\,q^3 - 83\,145\,856\,878\,680\,064\,q^4 - 27\,817\,433\,158\,336\,224\,803\,280\,q^5 - \cdots$$

$$\begin{array}{ll} n_1 = 678\,816 & n_3 = 69\,080\,128\,815\,414\,048 \\ n_2 = 137\,685\,060\,720 & n_4 = 51\,172\,489\,466\,251\,340\,674\,608 \end{array}$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(12n)!}{(6n)!(4n)!(n!)^2}\, x^n$$

10. $a = 4\,096$, $b = 5\,632$, $c = 144$:

$$\theta^4 - 2^{12}x(\theta + \tfrac{1}{4})^2(\theta + \tfrac{3}{4})^2$$
$$x = q - 960\,q^2 + 213\,600\,q^3 - 160\,471\,040\,q^4 - 136\,981\,068\,240\,q^5 - \cdots$$
$$n_1 = 928 \qquad n_4 = 174\,999\,877\,936$$
$$n_2 = 245\,616 \qquad n_5 = 221\,984\,814\,405\,088$$
$$n_3 = 170\,869\,536$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(4n)!}{(2n)!(n!)^2} \right)^2 x^n$$

Klemm–Theisen `hep-th/9304034`.

11. $a = 1\,728$, $b = 2\,436$, $c = 72$:

$$\theta^4 - 12^3x(\theta + \tfrac{1}{4})(\theta + \tfrac{3}{4})(\theta + \tfrac{1}{3})(\theta + \tfrac{2}{3})$$
$$x = q - 420\,q^2 + 47\,070\,q^3 - 12\,722\,000\,q^4 - 3\,647\,205\,075\,q^5 - \cdots$$
$$n_1 = 324 n_4 = 4\,580\,482\,284$$
$$n_2 = 37\,260 n_5 = 2\,405\,245\,303\,584$$
$$n_3 = 10\,792\,428$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!(4n)!}{(2n)!(n!)^5}\, x^n$$

Klemm–Theisen `hep-th/9304034`.

12. $a = 27\,648$, $b = 36\,672$, $c = 720$:

$$\theta^4 - 2^{10}3^3x(\theta + \tfrac{1}{4})(\theta + \tfrac{3}{4})(\theta + \tfrac{1}{6})(\theta + \tfrac{5}{6})$$
$$x = q - 6\,144\,q^2 + 6\,866\,784\,q^3 - 48\,364\,795\,904\,q^4 - 347\,475\,565\,045\,200\,q^5 - \cdots$$
$$n_1 = 7\,776 \qquad n_4 = 475\,338\,414\,733\,416$$
$$n_2 = 13\,952\,088 \qquad n_5 = 4\,184\,555\,647\,748\,620\,320$$
$$n_3 = 66\,942\,277\,344$$
$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3}\, x^n$$

Klemm–Theisen `hep-th/9304034`.

13. $a = 186\,624$, $b = 238\,464$, $c = 3\,600$:

$$\theta^4 - 2^8 3^6 x(\theta + \tfrac{1}{6})^2(\theta + \tfrac{5}{6})^2$$

$$x = q - 37\,440\,q^2 + 84\,900\,960\,q^3 - 15\,150\,231\,951\,360\,q^4 - 968\,512\,019\,592\,810\,960\,q^5 - \cdots$$

$$n_1 = 67\,104 \qquad n_4 = 1\,431\,885\,139\,218\,997\,920$$

$$n_2 = 847\,288\,224 \qquad n_5 = 88\,985\,016\,340\,513\,371\,957\,600$$

$$n_3 = 28\,583\,248\,229\,280$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!} \right)^2 x^n$$

Klemm–Theisen `hep-th/9304034`.

14. $a = 6\,912$, $b = 9\,600$, $c = 240$:

$$\theta^4 - 2^8 3^3 x(\theta + \tfrac{1}{2})^2(\theta + \tfrac{1}{6})(\theta + \tfrac{5}{6})$$

$$x = q - 1\,728\,q^2 + 933\,984\,q^3 - 967\,108\,608\,q^4 - 744\,650\,899\,920\,q^5 - \cdots$$

$$n_1 = 1\,248 \qquad n_4 = 1\,149\,904\,141\,056$$

$$n_2 = 597\,192 \qquad n_5 = 2\,394\,928\,461\,766\,560$$

$$n_3 = 683\,015\,008$$

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3} x^n$$

Klemm-Theisen `hep-th/9304034`

Tillagt i korrekturet

Det finns åtminstone ytterligare 14 differentialekvationer av ordning 4, som ger heltaliga spegelavbildningar och n_d. Se V.V. Batyrer, V. van Straten, ”Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi–Yau complete intersections in toric varieties”, *Commun. Math. Phys.* **168**, 493–533 (1995) (kan även finns på nätet `alg-geom/9307010`, men där finns tryckfel i 5 av differentialekvationerna) och V.V. Batyrev, I. Ciocau-Fontaine, B. Kim, D. van Straten, ”Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians”, `alg-geom/9710022`.

Dessa differentialekvationer är ganska komplicerade och vi nöjer oss med att visa ett typiskt exempel.

Låt

$$y_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{där} \quad a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^5 .$$

Så

$$y_0 = 1 + 2x + 34\,x^2 + 488\,x^3 + 9\,826\,x^4 + 206\,252\,x^5 + 4\,734\,304\,x^6 + 113\,245\,568\,x^7 + \cdots.$$

Först finner man en differentialekvation, som a_n satisfierar. Man ansätter

$$P_0(n)a_n + P_1(n+1)a_{n+1} + P_2(n+2)a_{n+2} + P_3(n+3)a_{n+3} + P_4(n+4)a_{n+4} + aa_{n+5} = 0$$

där P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 är 4.-gradspolynom med okända koefficienter. Man räknar ut ett 30-tal värden på a_n. Detta ger $5\cdot5+1 = 26$ obekanta och löser ekvationssystemet. Differensekvationen ovan är ekvivalent med differentialekvationen

$$\big(x^5P_0(\theta) + x^4P_1(\theta) + x^3P_2(\theta) + x^2P_3(\theta) + xP_4(\theta) + a\theta^4\big)y = 0 \qquad \text{där} \quad \theta = x\frac{d}{dx}.$$

Resultatet blir

$$\begin{aligned}\big\{49\theta^4 &- 7x(14 + 91\theta + 234\theta^2 + 286\theta^3 + 155\theta^4)\\ &- x^2(15\,736 + 66\,094\theta + 102\,261\theta^2 + 68\,044\theta^2 + 16\,105\theta^4)\\ &+ 8x^3(476 + 3\,759\theta + 9\,071\theta^2 + 8\,589\theta^3 + 2\,625\theta^4)\\ &- 16\,x^4(184 + 806\theta + 1\,439\theta^2 + 1\,266\theta^3 + 465\theta^4)\\ &+ 512\,x^5(\theta+1)^4\big\}y = 0\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}&x^4(32\,x-1)(x^2-11\,x-1)(4x-7)^2y''''\\ &+ 2x^3(4x-7)(640\,x^4 - 6\,992\,x^3 + 12\,103\,x^2 + 596\,x - 21)y'''\\ &+ x^2(12\,800\,x^5 - 135\,872\,x^4 + 425\,704\,x^3 - 419\,128\,x^2 - 15\,239\,x + 343)y''\\ &+ x(7\,680\,x^5 - 63\,616\,x^4 + 192\,352\,x^3 - 252\,504\,x^2 - 5\,362\,x + 49)y'\\ &+ 2x(256\,x^4 - 1\,472\,x^3 + 1\,904\,x^2 - 7\,868\,x - 49)y = 0.\end{aligned}$$

Vi låter Maple lösa differentialekvationen och får

$$y_1 = y_0\log x + 5x + \frac{175}{2}\,x^2 + \frac{4\,280}{3}\,x^3 + \frac{354\,205}{12}\,x^4 + \frac{3\,838\,131}{6}\,x^5 + \frac{44\,786\,261}{3}x^6 + \frac{7\,602\,987\,064}{21}\,x^7 + \cdots.$$

Vi avstår från att ange y_2 och y_3. Vi får

$$q = \exp\Big(\frac{y_1}{y_0}\Big) = x + 5x^2 + 90\,x^3 + 1\,510\,x^4 + 31\,745\,x^5 + 697\,971\,x^6 + \cdots$$

och

$$x = x - 5q^2 - 40\,q^3 + 115\,q^4 - 645\,q^5 - 12\,846\,q^5 - 177\,350\,q^7 - \cdots .$$

För att beräkna Yukawakopplingen behöver vi

$$\exp\Big(-\int \frac{p_1(x)}{2p_0(x)}\,dx\Big) = \frac{4x-7}{x^3(1-32\,x)(1+11\,x-x^2)}$$

där vi har differentialekvationen

$$p_0(x)y'''' + p_1(x)y''' + \cdots = 0.$$

Vi får

$$K = 7 + 10\,q + 530\,q^2 + 7\,975\,q^3 + 196\,690\,q^4 + 3\,714\,385\,q^5 + 81\,465\,335\,q^6 + \cdots$$

och

$$\begin{aligned} n_1 &= 10 & n_6 &= 377\,115 \\ n_2 &= 65 & n_7 &= 4\,862\,130 \\ n_3 &= 295 & n_8 &= 69\,723\,305 \\ n_4 &= 3\,065 & n_9 &= 1\,031\,662\,155 \\ n_5 &= 29\,715 & n_{10} &= 16\,072\,078\,750. \end{aligned}$$

Om man multiplicerar n_d med 10 så förmodas $10n_d$ räkna antal rationella kurvor av grad d på en ”generisk fullständig skärning av 5 generiska hyperytor av grad $(1,1)$ i $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$”. T.ex. finns det $10 \cdot 10 = 100$ linjer (detta är bevisat!).