Normat **51**:2, 80–82 (2003)

# Når har fjerdegradsligningen konstruerbare røtter?

## Tilleggskommentar om Galois-gruppen

*Kent Holing*

Statoil Forskningssenter
Arkitekt Ebbels veg 10
NO–7005 Trondheim
kho@statoil.com

Jeg ønsker å knytte en kommentar til artikkelen [1] av undertegnede i Normat nylig.

På slutten av artikkelen omtales en metode for å bestemme Galois-gruppen til en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter når ligningen er irredusibel. Artikkelen gir (på side 21) et kanskje noe feilaktig inntrykk av at redusible tilfeller er mer komplekse enn irredusible tilfeller. For polynomligninger kan dette generelt være tilfelle, men ikke for fjerdegradsligningen.[1] Vi demonstrerer dette ved vise hvordan Galois-gruppen lett kan bestemmes til en redusibel monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter. Sammen med metoden i [1] gir da dette en komplett metode for å bestemme Galois-gruppen til en generell fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter.[2]

[1] Mer presist: La den redusible ligningen være $f(x) = p(x)q(x) = 0$ med rotkropper for $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$ henholdsvis $E_1$ og $E_2$. Hvis $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$ vil Galois-gruppen til $f(x) = 0$ være $G_1 \times G_2$ der $G_1$ og $G_2$ er henholdsvis Galois-gruppene til $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$. Er derimot $E_1 \cap E_2$ større enn $\mathbb{Q}$ vil det generelt ikke være lett å bestemme Galois-gruppen til $f(x) = 0$ uten eksplisitt kjennskap til sammenhenger mellom røttene til $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$. Det som gjør det redusible tilfelle av fjerdegradsligningen enkelt er at der vi trenger det (tilfelle 4 i setningen nedenfor) er enten $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$ eller $E_1 = E_2$.

[2] Det kan nevnes at Maple har en rutine `galois(poly)` som gir Galois-gruppen til irredusible polynomer `poly` med rasjonale koeffisienter med grad opp til og med 7. Også Mathematica kan brukes til å bestemme Galois-grupper, se internettlenken `http://library.wolfram.com/infocenter/Articles/2872/` for detaljer og programmer. Forfatteren har selv laget en Mathematica-rutine for bestemmelse av Galois-gruppen til polynomligninger med rasjonale koeffisienter med grad opp til og med 4. Interesserte lesere kan på forespørsel få denne rutinen tilsendt på epost.

La, som i [1], $Q(x) = 0$ være en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter, $R(t) = 0$ dens kubiske resolvent, $D$ diskriminanten til $Q(x) = 0$ og $n$ antall klassisk konstruerbare røtter av $Q(x) = 0$ (røttene telles med multiplisitet og inkluderer komplekse røtter). La videre $m$ være antall heltallsrøtter av $Q(x) = 0$ (som også telles med multiplisitet).

I det tilfelle at $Q(x) = 0$ er redusibel over $\mathbb{Z}$ er $n = 1$ eller $n = 4$. Videre er $m = 1$ hvis (og bare hvis) $n = 1$. Hvis $n = 4$, er $m = 0$, 2 eller 4.

Vi viser nå at Galois-gruppen til ligningen $Q(x) = 0$ lett kan bestemmes med høyst kjennskap til kun $m$ og $D$.

**Setning.** *Med standard gruppenotasjon, og $m$ og $D$ som ovenfor er Galois-gruppen $G$ til en monisk redusibel fjerdegradsligning med heltallskoeffisenter $Q(x) = 0$ som følger:*

1) *Når $m = 4$ er $G = \{e\}$.*
2) *Når $m = 2$ er $G = Z_2$.*
3) *Når $m = 1$ er $G = A_3$ hvis $D$ er kvadrattall; ellers er $G = S_3$.*
4) *Når $m = 0$ er $G = Z_2$ hvis $D$ er kvadrattall; ellers er $G = Z_2 \times Z_2 = V$.*

**Bevis:** Vi skisserer hovedtrekkene i beviset for setningen. All nødvendig teori finnes i [1] eller i dennes referanser.

*Bevis for* 1): Rotkroppen til ligningen $Q(x) = 0$ er her lik $\mathbb{Q}$.

*Bevis for* 2): $Q(x)$ er her produktet av to lineære faktorer og en irredusibel annengradsfaktor.

*Bevis for* 3): $Q(x)$ er her lik produktet av en lineær faktor $x - r$ og en irredusibel tredjegradsfaktor $q(x)$. $G$ er lik Galois-gruppen til $q(x) = 0$. Med $d$ lik diskriminanten til $q(x) = 0$ er $D = q(r)^2 d$ (vis det!), så $D$ er kvadrattall hvis og bare hvis $d$ er kvadrattall. Galois-gruppen til $Q(x) = 0$ er altså lik Galois-gruppen til resolventen $R(t) = 0$ siden resolventen er irredusibel (hvorfor?). Tilfellet $m = 1$ er derfor overført til et irredusibelt tilfelle av en grad lavere.

*Bevis for* 4): Her er $Q(x) = p(x)q(x)$ der faktorene $p(x)$ og $q(x)$ er irredusible annengradsfaktorer.

La $d_1$ og $d_2$ være diskriminantene til henholdsvis $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$. Vi kan vise at $D = d_1 d_2 t^2$ for $t$ heltallig,[3] som viser at $D$ er kvadrattall hvis og bare hvis $d_1 d_2$ er kvadrattall. (Om $t = 0$ er $D = 0$ og $d_1 = d_2$.)

La rotkroppene til $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$ være henholdsvis $E_1$ og $E_2$. Merk at $\sqrt{d_1}$ og $\sqrt{d_2}$ er enten irrasjonale eller rent imaginære tall og $E_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{d_1}]$ og $E_2 = \mathbb{Q}[\sqrt{d_2}]$.

Det er lett å vise at enten er $E_1 = E_2$ eller så er $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$, og at $E_1 = E_2$ hvis og bare hvis $d_1 d_2$ er kvadrattall (gjør det!). Q.E.D.

[3] Med $Q(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ er $d_1 = a^2 - 4b$ og $d_2 = c^2 - 4d$. Ved hjelp av Mathematica oppdaget jeg følgende sammenheng mellom $D$ og $d_1 d_2$: $D = [b^2 + (c^2 - ac - 2d)b + (a^2 - ac + d)d]^2 d_1 d_2$. Det viser seg at faktisk er $t = R(p, q) = (b - d)^2 - (c - a)(ad - cb)$, resultanten til $p(x)$ og $q(x)$. Fra proposisjon 2 på side 286 i [2] har vi at $D = d_1 d_2 R(p, q)^2$.

Vi avslutter med å utfordre leseren til å løse noen oppgaver.

**Oppgave 1.** Bestem Galois-gruppen til de sju ligningene som er gitt som eksempler i [1, side 19].[4]

**Oppgave 2.** Hva er Galois-gruppen til ligningene $x^{10}-1=0$ og $\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=0$? [5]

**Oppgave 3.** Hvor mange av røttene til ligningen $x^8-3x^6+x^5-x^3+3x-1=0$ er konstruerbare? Vis at Galois-gruppen til ligningen er syklisk.[6]

**Oppgave 4.** La to moniske fjerdegradsligninger med heltallskoeffisienter $p(x)=0$ og $q(x)=0$ være gitt. La $Q(x)=p(x)q(x)$ og $R(t)=r(t)s(t)$ med $r(t)=0$ og $s(t)=0$ lik de kubiske resolventene til henholdsvis $p(x)=0$ og $q(x)=0$. Anta videre at $p(x)$ er irredusibel over $\mathbb{Z}$, $q(x)$ redusibel over $\mathbb{Z}$ og at Galois-gruppene til ligningene $p(x)=0$ og $q(x)=0$ er isomorfe.

a) Hva kan vi si om heltallsrøtter til ligningen $Q(x)=0$? [7]
b) Hva kan vi si om konstruerbare røtter til ligningen $Q(x)=0$? [8]
c) Samme spørsmål som i a) og b), men for ligningen $R(t)=0$.[9]
d) Undersøk om diskriminantene til ligningene $Q(x)=0$ og $R(t)=0$ noen gang kan være kvadrattall.[10]
e) Hva er Galois-gruppen til ligningen $R(t)=0$? [11]

## Litteratur

[1] Kent Holing: Når har fjerdegradsligningen konstruerbare røtter? *Normat* **51**, 15–21 (2003).

[2] Lindsay Childs: *A Concrete Introduction to Higher Algebra*, Springer 1979.

## Rettelse

Noe nedenfor midten av side 19 i [1] skulle det stå «Setningen gir da at resiproke *fjerdegrads*ligninger har røtter som alle er konstruerbare».

[4] I samme rekkefølge som ligningene er gitt i [1] er Galois-gruppene til ligningene isomorfe med henholdsvis $A_4$, $S_4$, $S_3$, $D_4$, $D_4$, $Z_4$ og $V$.

[5] Galois-gruppene er isomorfe med henholdsvis $Z_4$ og $A_4$.

[6] Ligningen faktoriserer som $(x-1)(x^3-3x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$. Antall konstruerbare røtter er 5 (av disse er én og bare én rot heltallig). Galois-gruppen til ligningen er isomorf med $Z_{12}$.

[7] Ligningen $Q(x)=0$ har ingen heltallsrøtter.

[8] Ligningen $Q(x)=0$ har røtter som alle er konstruerbare.

[9] Ligningen $R(t)=0$ har 4 heltallsrøtter (høyst én slik rot er dobbelrot) og alle røtter er konstruerbare.

[10] Produktet av diskriminantene $D$ og $d$ til ligningene $Q(x)=0$ og $R(t)=0$ er alltid kvadrattall så enten er $D$ og $d$ begge kvadrattall eller så er ingen det (unntatt er eventuelle tilfeller med $D$ eller $d$ lik 0). Det viser seg at bare $d$ kan være lik 0 (hvorfor?) og at $d=0$ hvis og bare hvis (den eneste) heltallsroten til $s(t)=0$ også er en rot til $r(t)=0$. Et eksempel på det siste tilfellet er $p(x)=x^4-5x^2+1=0$ og $q(x)=x^4-5x^2+6=0$.

[11] Galois-gruppen til $R(t)=0$ er isomorf med $Z_2$.