Oppgaver

Oppgavene 431–432 er hentet fra canadiske matematikkolympiader, og 433–434 fra Putnam-konkurransen.

431. Gitt 7 distinkte reelle tall. Vis at det blant disse fins minst ett par x, y slik at

$$0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

432. Vis at et reelt tall x er rasjonalt hvis og bare hvis vi i følgen

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ \ldots$$

kan finne tre distinkte ledd som danner en geometrisk progresjon.

433. For hvilke reelle tall x konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n\sin(1/n)}\Big)^{x}\ ?$$

434. La p være et odde primtall. Bevis at

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p+1 \pmod{p^2}.$$

Løsninger

406. La $n \ge 2$ være et positivt heltall. Til å begynne med er det n lopper på en horisontal linje, der ikke alle er i samme punkt. For et positivt reelt tall λ definerer vi et *trekk* på følgende måte:

> Velg to lopper, den ene i punktet A og den andre i B, der A ligger til venstre for B.
>
> La loppen i A hoppe til punktet C på samme linje, men til høyre for B, slik at $BC/AB = \lambda$.

Bestem alle verdier for λ slik at det for hvert punkt M på linjen og hver utgangsposisjon for de n loppene, finnes en endelig følge av trekk som vil flytte alle loppene til punkter til høyre for M. (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i Taejon, 2000.)

Løsning: Vi følger den offisielle løsningen. For enkelhets skyld antar vi at loppene befinner seg på den reelle tallinjen, og vi angir på naturlig måte posisjonen til hver av loppene med det tilsvarende tallet. Det er nærliggende å tro at en gunstig strategi for å komme langt til høyre er at vi i hvert trekk lar loppen lengst til venstre hoppe over loppen lengst til høyre. Etter k trekk har vi da fått en konfigurasjon hvor to parametere er av interesse: Vi lar d_k betegne den største avstanden mellom to lopper (altså diameteren av loppe/punkt-mengden), mens δ_k er minste avstand mellom to nabolopper. Det er klart at $d_k \geq (n-1)\delta_k$, og for $k \geq n-1$ har vi også helt sikkert $\delta_k > 0$.

Etter trekk nummer $k+1$ har vi fått en ny avstand mellom to nabolopper, nemlig λd_k. Hvis dette er den nye minsteavstanden, er $\delta_{k+1} = \lambda d_k$, og hvis ikke, er i hvert fall $\delta_{k+1} \geq \delta_k$. I alle tilfeller har vi

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geq \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geq \min\{1, \lambda(n-1)\}.$$

Hvis $\lambda \geq 1/(n-1)$, er $\delta_{k+1} \geq \delta_k$ for alle k, det vil si at minsteavstanden ikke avtar. Det betyr igjen at posisjonen til den loppen som til enhver tid er lengst til venstre, endres i skritt som alle er større enn en passende positiv konstant. Dermed kan vi få alle loppene så langt til høyre som vi måtte ønske.

Hva nå om $\lambda < 1/(n-1)$? Vi påstår at da fins det en startkonfigurasjon som er slik at vi ikke kan få loppene forbi et visst punkt M. Faktisk er det slik for enhver startkonfigurasjon.

Betrakt en vilkårlig følge av trekk. La s_k være summen av alle tallene som representerer posisjonene etter det k-te trekket, og la w_k være det største av disse tallene (altså posisjonen til loppen lengst til høyre). Legg merke til at $s_k \leq nw_k$. Vi skal vise at følgen (w_k) er begrenset.

I trekk nummer $k+1$ hopper en loppe fra a over b og lander på c. Da er $s_{k+1} = s_k + c - a$. Ifølge spillereglene er $c - b = \lambda(b-a)$, som er ekvivalent med $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Derfor er

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b).$$

Anta at $c > w_k$, altså at den loppen som nettopp hoppet, nå er lengst til høyre, slik at $w_{k+1} = c$. Siden b var posisjonen til en eller annen loppe etter det k-te trekket, er $b \leq w_k$, og

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \geq \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k). \tag{1}$$

Denne ulikheten holder også hvis $c \leq w_k$, for da er $w_{k+1} - w_k = 0$ og $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Betrakt nå følgen

$$z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ulikheten (1) viser at $z_{k+1} - z_k \leq 0$, så $z_k \leq z_0$ for alle k.

Vi har antatt at $\lambda < 1/(n-1)$. Da er $1 + \lambda > n\lambda$, og vi kan skrive

$$z_k = (n+\mu)w_k - s_k, \qquad \text{hvor} \quad \mu = \frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0.$$

Dette gir oss ulikheten $z_k = \mu w_k + (nw_k - s_k) \geq \mu w_k$. Det følger at $w_k \leq z_0/\mu$ for alle k.

Løst av: Jørgen Hilden, København, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

408. (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.) I hver av ti fløyelsposer ligger 55 tilsynelatende helt like mynter. Åtte av posene inneholder 13-grams ekte sølvmynter, i én pose er myntene av bly overtrukket med sølv og veier 14 gram, og i én pose har de en liten kjerne av aluminium innstøpt i sølv og veier 12 gram.

Kan en ved å plukke utsøkte antall mynter fra posene og avlese deres samlede vekt i én veiing finne posen med for tunge og posen med for lette mynter?

Løsning (etter Peter Kirkegaard, Gentofte, DK): La vekten av en ekte sølvmynt være P. De lette myntene veier da $P-1$ og de tunge $P+1$. Antall poser kalles L, og antall mynter per pose M. I oppgaven er da

$$P = 13, \qquad L = 10, \qquad M = 55. \tag{1}$$

Vi tar ut a_i mynter fra pose i ($0 \le a_i \le M,\ 1 \le i \le L$), og ved samlet veiing av disse myntene konstaterer vi vekten V, altså

$$\sum_{i=1}^{L} a_i b_i = V, \tag{2}$$

der b_i er vekten av en mynt fra pose i. Vi vet at det fins indekser j og k ($j \ne k$) slik at

$$b_j = P-1, \qquad b_k = P+1, \qquad b_i = P \text{ for } i \ne j, k.$$

Vi skal nå forsøke å bestemme j og k fra ligningen (2), som vi omskriver til

$$\left(\sum_{i \ne j,\, k}^{L} a_i\right) P + a_j(P-1) + a_k(P+1) = V,$$

altså

$$a_k - a_j = V - \left(\sum_{i=1}^{L} a_i\right) P. \tag{3}$$

Oppgaven går ut på å velge $a_1, \ldots, a_L$ slik at (3) bestemmer j og k entydig. Det er klart at den spesielle verdien $P = 13$ er likegyldig – det eneste det dreier seg om er å sikre at diffensavbildningen $(j,k) \mapsto a_k - a_j$ blir injektiv. Da vil nemlig ligning (3), med j og k som de eneste ukjente, ha høyst 1 løsning. En faktisk veiing gir selvsagt en løsning (j,k).

Med verdiene (1) gjelder det at det kan dannes 110 differenser $\ne 0$ av tallene 0–55, og siden vi har bruk for 90 forskjellige differenser, skulle det være «plass» nok. Det viser seg at det ikke er lett å konstruere (a_i) for hånd, men et søk med PC viser at det, bortsett fra permutasjoner, fins bare to løsninger:

$$(a_i) = (0, 1, 6, 10, 23, 26, 34, 41, 53, 55), \tag{4}$$

$$(a_i) = (0, 2, 14, 21, 29, 32, 41, 49, 54, 55), \tag{5}$$

der (5) fås av (4) ved speil-substitusjonen $a_i := M - a_{L-i+1}$. Programmet viste også at for $L = 10$ er $M = 55$ den minste verdien som gir løsninger, idet det ikke fins løsninger for $M = 54$.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 29. februar 2004. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.