Normat **51**:3, 1001–1020 (2003)

Carlemans olikhet – historik, skärpningar och generaliseringar

Maria Johansson, Lars-Erik Persson och Anna Wedestig

Institutionen för Matematik
Luleå Tekniska Universitet
SE–971 87 Luleå
marjoh@sm.luth.se, larserik@sm.luth.se, annaw@sm.luth.se

1 Inledning

I denna uppsats skall vi diskutera följande anmärkningsvärda olikhet:

$$a_1 + \sqrt{a_1 a_2} + \cdots + \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} < e(a_1 + a_2 + \cdots), \tag{1}$$

där a_1, a_2, ... är positiva tal och $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ är konvergent. Denna olikhet presenterades 1922 i [8] av den svenske matematikern Torsten Carleman (1892–1942) och den har fått namnet *Carlemans olikhet*. Carleman upptäckte sin olikhet i samband med sitt viktiga arbete om kvasianalytiska funktioner och han förstod knappast då att denna upptäkt skulle bli föremål för så stort intresse. Den kontinuerliga varianten av (1) lyder

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx < e\int_0^\infty f(x)\,dx \tag{2}$$

där $f(t) > 0$ och den går ibland under namnet Knopps olikhet (se [31]). Men våra undersökningar tyder på att det snarare var G. Pólya som först upptäckte denna olikhet (se Anm. 3), så vi föredrar att kalla den *Pólya–Knopps olikhet*.

I avsnitt 2 av denna uppsats presenterar vi ett antal bevis av (1). I avsnitt 3 bevisar vi att (2) implicerar (1) och presenterar några bevis av (2) (och därmed ytterligare bevis av (1)).

I avsnitt 4 ger vi exempel på några nyligen presenterade skärpningar och generaliseringar av (1) och (2) och relaterade frågor. Ett antal historiska och andra anmärkningar finns även inkluderade och i slutet av uppsatsen skriver vi ned några fakta om Torsten Carleman, som vi funnit genom att studera skrifterna [60] och [32] och som delvis kompletterar uppgifterna i Professor Lars Gårdings utmärkta beskrivning i [19] (se Anm 26-27).

2 Några bevis av (1)

Bevis 1: (Skiss av Carlemans ursprungliga bevis)
Carleman noterade först att problemet kan lösas genom att bestämma maximum av uttrycket

$$\sum_{i=1}^{k}(a_1 a_2 \cdots a_i)^{1/i}$$

under bivillkoret

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1.$$

Han gjorde sedan substitutionen $a_i = e^{-x_i}$ och fick det räknetekniskt enklare problemet:
Bestäm för $n = 1, 2, \ldots$ maximum M_k av

$$G = \sum_{i=1}^{k} e^{-(x_1+x_2+\cdots+x_i)/i}$$

under bivillkoret

$$H = \sum_{i=1}^{k} e^{-x_i} = 1.$$

Detta problem kan lösas med Lagranges multiplikatormetod d.v.s vi skall minimera funktionen

$$F = G + \lambda H,$$

(λ är en parameter, den s.k. multiplikatorn). Tyvärr leder detta till relativt tekniska räkningar som givetvis den skicklige Carleman genomförde på ett elegant sätt. Vi utelämnar dock dessa räkningar här och hänvisar bara till Carlemans uppsats [8] där alla detaljer finns redovisade. Resultatet blir att $M_k < e$ för alla $k \in Z_+$. Carleman visade sedan separat att olikheten är strikt när summan i högra ledet konvergerar.

Anm 1: Carleman visade i samma uppsats [8] att olikheten (1) inte gäller i allmänhet för någon konstant $C < e$, dvs att konstanten e är skarp.

Bevis 2: (via Hardys olikhet)

Den diskreta varianten av Hardys olikhet lyder (se [21], [23])

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p, \qquad p>1. \tag{3}$$

Ersätt a_i med $a_i^{1/p}$ och notera att med hjälp av "tricket" $x=e^{\ln x}$ och derivatans definition så gäller

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i^{1/p}\right)^p &= \exp\left(\left[\ln\sum_{i=1}^{k}a_i^{1/p}-\ln\sum_{i=1}^{k}a_i^0\right]\Big/\frac{1}{p}\right)\\ &\to \exp\left(\left[D\left(\ln\sum_{i=1}^{k}a_i^x\right)\right]_{x=0}\right) \qquad (\text{när } p\to\infty)\\ &= \exp\left(\left[\sum_{i=1}^{k}a_i^x\ln a_i\Big/\sum_{i=1}^{k}a_i^x\right]_{x=0}\right)\\ &= \exp\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln a_i = \left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{1/k}\end{aligned}$$

och vi ser att (3) medför den icke-strikta olikheten (1) eftersom $\big(p/(p-1)\big)^p\to e$ när $p\to\infty$. Observera att denna metod inte automatiskt bevisar att vi har strikt olikhet i (2) utan detta får visas separat (se t.ex. våra senare bevis).

Anm 2: G.H. Hardy formulerade sin olikhet (3) 1920 i [20] och bevisade den 1925 i [21] men Carleman kände nog inte till olikheten (3) vid detta tillfälle eftersom han inte refererar till det enkla samband som råder enligt beviset ovan. Detta är möjligen en aning anmärkningsvärt eftersom Carleman faktiskt samarbetade aktivt med Hardy ungefär samtidigt, se t.ex. deras gemensamma uppsats [9]. "en aning" *var* "lite"

Anm 3: Det ovanstående innebär att (1) kan betraktas som en gränsolikhet till skalan (3) av Hardyska olikheter. Detta observerades redan 1925 av G.H. Hardy i uppsatsen [21], sid 156, men han påpekade samtidigt att det var G. Pólya som redan tidigare gjorde honom uppmärksam på detta intressanta faktum.

Vi skall nu presentera ett bevis som bygger på olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde (AG-olikheten).

Bevis 3: På grund av AG-olikheten gäller för varje $i=1,2,\dots$, varje k och alla $c_i>0$ att

$$\left(\prod_1^k a_i\right)^{1/k} = \left(\prod_1^k c_i\right)^{-1/k}\left(\prod_1^k c_ia_i\right)^{1/k} \le \left(\prod_1^k c_i\right)^{-1/k}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}c_ia_i. \tag{4}$$

Vi väljer nu $c_i=\left(1+i\right)^i/i^{i-1}$, $i=1,2,\dots,k$. Speciellt gäller då att

$$\left(\prod_1^k c_i\right)^{1/k} = k+1 \tag{5}$$

och (4) och (5) ger att

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} &\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}c_ia_i = \sum_{i=1}^{\infty}c_ia_i\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_ia_i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}a_i\Big(1+\frac{1}{i}\Big)^i \le e\sum_{i=1}^{\infty}a_i.\end{aligned}$$

Den strikta olikheten gäller eftersom vi inte samtidigt kan ha likhet i alla termvisa olikheterna. Detta kan ske endast om $c_ia_i = c$ för någon konstant $c > 0$ dvs $a_i = c\big(i/(1+i)\big)^i/i$, $i = 1, 2, \ldots$, men detta kan ej gälla eftersom $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ är konvergent (notera att $\big((1+i)/i\big)^i \to e$ då $i \to \infty$).

Anm 4: Detta bevis presenterades av G. Pólya (se [48], sid. 249) men vi har här snarare följt den framställning som finns på sid. 24 i Professor Lars Hörmanders bok [26].

Anm 5: Vi noterar att Bevis 3 visar att för ändliga summor så gäller Carlemans olikhet (1) även för någon strikt mindre konstant än e. Mer precist så gäller, för $N = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=1}^{N}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} \le \sum_{k=1}^{N}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k a_k.$$

Bland annat av historiska skäl skall vi presentera följande variant av Bevis 3:

Bevis 4: Vi väljer $c_i = i$, $i = 1, 2, \ldots k$, i (4) och får

$$\Big(\prod_{i=1}^{k}a_i\Big)^{\frac{1}{k}} \le (k!)^{-1/k}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}ia_i. \tag{6}$$

Dessutom gäller att

$$\frac{(k+1)^k}{k!} = \Big(1+\frac{1}{1}\Big)\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^2\cdots\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k < e^k \tag{7}$$

och genom att utnyttja denna olikhet och (6) så får vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} &\le \sum_{k=1}^{\infty}(k!)^{-1/k}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}ia_i \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}ia_i\\ &= e\sum_{i=1}^{\infty}ia_i\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = e\sum_{i=1}^{\infty}a_i.\end{aligned}$$

Den strikta olikheten kan konstateras på liknande sätt som i Bevis 3 (likhet kräver att $a_k = c/k$ men detta motsäger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent).

Anm 6: I uppsatsen [22], sid. 77 redovisade G.H. Hardy väsentligen detta bevis men han påpekade samtidigt att det var G. Knopp som presenterade beviset för honom.

Bevis 5: (L. Carlesons bevis)

Vi noterar först att vi kan antaga att $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ (summan i vänstra ledet av (1) blir uppenbarligen störst om följden $\{a_i\}$ omordnas i icke-växande ordning medan summan i högra ledet blir densamma för varje omordning). Låt $m(x)$ vara en polygon genom punkterna $(0,0)$ och $(k, \sum_1^k \log(1/a_i))$, $k = 1, 2, \ldots$ Funktionen $m(x)$ är uppenbarligen konvex och därför gäller för varje $r > 1$ att

$$\frac{m(rx) - m(x)}{rx - x} \geq m'(x). \tag{8}$$

Dessutom gäller att

$$m'(x) = \log(1/a_k), \qquad x \in (k-1, k), \tag{9}$$

och eftersom m är konvex så gäller att $m(x) \leq (x/k)m(k) + \big(1 - (x/k)\big)m(0)$ för $x \leq k$, och eftersom dessutom $m(0) = 0$ så är

Endret ordrekkefølge for å unngå linjedeling i formelen.

$$\begin{aligned} \frac{m(x)}{x} &= \frac{m(x) - m(0)}{x} \leq \frac{m(k) - m(0)}{k} \\ &\leq \frac{m(k)}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log(1/a_i) \qquad \text{för alla } x \leq k. \end{aligned} \tag{10}$$

Vi gör en variabelsubstitution samt utnyttjar Hölders olikhet och (8) och får för varje $A > 0$ och $r > 1$

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-m(x)/x}\,dx &\leq \int_0^{rA} e^{-m(x)/x}\,dx = \int_0^A e^{-m(rx)/rx} r\,dx \\ &\leq \int_0^A e^{-\left(m(x) + (rx - x)m'(x)\right)/rx} r\,dx \\ &= \int_0^A e^{-m(x)/rx - \left((r-1)/r\right)m'(x)} r\,dx \\ &\leq \left(\int_0^A e^{-m(x)/x} r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^A e^{-m'(x)} r\,dx\right)^{\frac{(r-1)}{r}} \end{aligned}$$

så att

$$\int_0^A e^{-m(x)/x}\,dx \leq r^{r/(r-1)} \int_0^A e^{-m'(x)}\,dx.$$

Vi låter $A \to \infty, r \to 1+$ och noterar att då $r^{r/(r-1)} \to e$ så att

$$\int_0^\infty e^{-m(x)/x}\,dx \leq e \int_0^\infty e^{-m'(x)}\,dx. \tag{11}$$

Vi utnyttjar nu (9) och (10) och får

$$\int_0^\infty e^{-m'(x)}\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k e^{-m'(x)}\,dx = \sum_{k=1}^\infty e^{-\log(1/a_k)} = \sum_{k=1}^\infty a_k$$

resp.

$$e^{-(1/k)\sum_{i=1}^k \log(1/a_i)} \le \int_{k-1}^k e^{-m(x)/x}\,dx$$

så att

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{1/k} = \sum_{k=1}^\infty e^{-(1/k)\sum_{i=1}^k \log(1/a_i)} \le \sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k e^{-m(x)/x}\,dx = \int_0^\infty e^{-m(x)/x}\,dx.$$

Den icke-strikta olikheten (1) följer genom att utnyttja dessa uppskattningar och (11). Den strikta olikheten följer genom att konstatera att vi inte kan ha likhet i (10) samtidigt för alla x och k.

Anm 7: Detta är L. Carlesons bevis (se [10]) och i själva verket har han ju bevisat att den allmännare olikheten (11) gäller för varje styckvis deriverbar konvex funktion $m(x)$ på $[0,\infty]$ sådan att $m(0)=0$. Carleson formulerade för övrigt sin olikhet på följande något allmännare form:

$$\int_0^\infty x^p e^{-m(x)/x}\,dx \le e^{p+1}\int_0^\infty x^p e^{-m'(x)}\,dx, \qquad p>-1. \tag{12}$$

Bevis 6: (via Redheffers olikhet)

R.M. Redheffer bevisade 1967 följande intressanta olikhet (se [49] och även [50]):

$$nG_n + \sum_{k=1}^n k(b_k-1)G_k \le \sum_{k=1}^n a_k b_k^k \tag{13}$$

gäller för alla $n=1,2,\dots$ och alla positiva följder $\{b_k\}$; där $G_k = \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{1/k}$. Vi ser speciellt att om

a) $b_k = 1, k=1,2,\dots$ så gäller $G_n \le n^{-1}\sum_{k=1}^n a_k = A_n$, dvs AG-olikheten,

b) $b_k = 1+1/k, k=1,2,\dots$ så gäller $nG_n + \sum_{k=1}^n G_k \le \sum_{k=1}^n (1+1/k)^k a_k$,

vilket speciellt implicerar att den icke-strikta olikheten (1) följer då $n\to\infty$. Den strikta olikheten kan konstateras genom att utnyttja argumenten i följande bevis av (13): Vi använder den enkla olikheten

$$1+a(x-1) \le x^a,\ x>0, a\ge 1, \tag{14}$$

som t.ex. fås genom att ersätta y med $x-1$ i den välkända olikheten $1+ay \leq (1+y)^a$. Vi använder nu (14) med $a = k$ och $x = (G_k/G_{k-1})b_k$ $(k \geq 2)$ och får

$$1 + k\Big(\frac{G_k}{G_{k-1}}b_k - 1\Big) \leq \Big(\frac{G_k}{G_{k-1}}b_k\Big)^k = \frac{a_k}{G_{k-1}}b_k^k,$$

vilket kan skrivas som

$$G_{k-1} + k(G_k b_k - G_{k-1}) \leq a_k b_k^k. \tag{15}$$

Vi kan nu bevisa (13) med enkel induktion. Vi observerar först att $G_1 = a_1$ så att

$$G_1 + (b_1 - 1)G_1 = a_1 b_1,$$

dvs (13) gäller för $n = 1$. Antag att olikheten (13) gäller för $n = N \in Z_+$. Vi utnyttjar nu detta induktionsantagande och (15) med $k = N+1$ och får

$$\begin{aligned}(N+1)G_{N+1} + \sum_{k=1}^{N+1} k(b_k - 1)G_k & \\ &= (N+1)b_{N+1}G_{N+1} + \sum_{k=1}^{N} k(b_k-1)G_k \\ &= NG_N + \sum_{k=1}^{N} k(b_k-1)G_k + (N+1)b_{N+1}G_{N+1} - NG_N \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} a_k b_k^k + a_{N+1}b_{N+1}^{N+1} = \sum_{k=1}^{N+1} a_k b_k^k\end{aligned}$$

dvs (13) gäller även för $n = N+1$ och enligt induktionsaxiomet gäller därför (13) för varje $n \in Z_+$.

Anm 8: Beviset ovan leder uppenbarligen till ett skarpare resultat. Faktum är att detta sätt att bevisa olikheter bygger på en allmän princip som ibland kallas för Redheffers rekursionsprincip (se [47]). Denna princip kan även användas för att förbättra flera andra klassiska olikheter.

Låt $a^{(n)} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vara en positiv talföljd $(n = 1, 2, \ldots)$. Vi definierar potensmedelvärdena $M_{r,n}$ av $a^{(n)}$ på följande sätt

$$M_{r,n} = M_{r,n}\big(a^{(n)}\big) = \begin{cases} \Big(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^r\Big)^{1/r}, & r \neq 0, \\ \Big(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/r}, & r = 0. \end{cases}$$

Notera att $A_n = M_{1,n}$, $G_n = M_{0,n}$ och $H_n = M_{-1,n}$ helt enkelt är de vanliga aritmetiska, geometriska och harmoniska medelvärdena. Vi studerar även följden av potensmedelvärdena:

$$M^{r,n} = (M_{r,1}, M_{r,2}, \ldots, M_{r,n}).$$

År 1996 visade B. Mond och J. Pečarić (se [39]) följande intressanta olikhet (mellan itererade potensmedelvärden):

$$M_{s,n}(M^{r,n}) \leq M_{r,n}(M^{s,n}), \tag{16}$$

för varje $r \leq s$. Vi har likhet om och endast om $a_1 = \cdots = a_n$. Beviset i [39] är så komplicerat att vi inte redovisar det här. Vi är dock övertygade om att det finns ett mer elementärt bevis och ställer som ett öppet problem till läsaren att finna ett sådant bevis. Vårt nästa bevis bygger på Mond–Pečarićs resultat.

Bevis 7: Vi använder (16) med $s = 1$ och $r = 0$ och får

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} G_k \leq \left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{17}$$

Genom att använda denna olikhet och det självklara faktum att

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \ , \ k \leq n,$$

så får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} G_k \leq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{18}$$

Vi använder även vår tidigare uppskattning (7) med $k = n - 1$ och får

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} \qquad \text{d.v.s. } \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < e^{1-1/n}.$$

Genom att kombinera denna olikhet med (17) får vi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{\frac{1}{k}} < e^{1-1/n}\sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{19}$$

Den icke-strikta olikheten (1) följer då vi låter $n \to \infty$. Att olikheten faktiskt är strikt följer ur det faktum att likhet i (18) endast kan inträffa då alla a_i är lika men detta kan inte gälla under vår förutsättning att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

Anm 9: Mer information om hur (16) kan användas för att bevisa och förbättra olikheter kan man läsa om i de relativt nya uppsatserna [11] och [12].

Anm 10: Vi noterar att om vi i beviset ovan kombinerar (17) med följande variant av AG-olikheten

$$\begin{aligned}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\big(a_1(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)\big)^{1/n}\\ &\le \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n}\end{aligned}$$

så får vi följande strikta förbättring av (19):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}a_i\right)^{\frac{1}{k}} < e^{1-1/n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k. \tag{20}$$

3 Pólya–Knopps olikhet (2)

Vi börjar med att bevisa att (2) implicerar (1). Som tidigare konstaterar vi att det räcker att visa (1) då $\{a_k\}_1^\infty$ är en avtagande följd. Applicera (2) med funktionen $f(x)=a_k$, $x\in[k-1,k)$, $k=1,2,\ldots$. Då blir

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}a_k \tag{21}$$

och

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx. \tag{22}$$

Vidare gäller

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx = a_1 \tag{23}$$

och, för $k=1,2,\ldots$,

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{k+1}a_i\right)^{\frac{1}{k+1}} &= \int_k^{k+1}\exp\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\ln a_i\right)dx \\ &\le \int_k^{k+1}\exp\left(\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k}\ln a_i+\frac{x-k}{x}\ln a_{k+1}\right)dx = \int_k^{k+1}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx.\end{aligned} \tag{24}$$

Den helt avgörande olikheten i (24) beror på det faktum att integranden är ett viktat aritmetiskt medelvärde av talen $\ln a_i$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, med vikter $1/x, \ldots, 1/x$ (k st) och $(x-k)/k$. Här är $k \leq x \leq k+1$ och eftersom talföljden är avtagande blir medelvärdet minst för $x = k+1$ dvs när alla vikter $= 1/(k+1)$. (1) följer nu genom att kombinera (21) – (24).

Vi skall nu presentera några enkla bevis av (2) (och därmed ytterligare bevis av (1)).

Bevis 8: Vi noterar att funktionen $m(x) = -\int_0^x \ln f^*(t)dt$ uppfyller förutsättningarna för att få använda Carlesons olikhet (12) (här är $f^*(t)$ den avtagande omordningen av funktionen f). Därför gäller enligt (12) att

$$\int_0^\infty x^p \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f^*(t)dt\right)dx \leq e^{p+1}\int_0^\infty x^p f^*(x)dx, \tag{25}$$

för varje $p > -1$. Carlesons argument visar att vi i själva verket har strikt olikhet i (25) och speciellt för $p = 0$ får vi därför Pólya–Knopps olikhet (2).

Anm 11: Carleson noterade inte detta faktum explicit i sin uppsats [10] eftersom han uppenbarligen främst var intresserad av att ge ett elementärt bevis av olikheten (1).

"vilka" *var* "som"

Vi skall nu presentera två andra bevis av (2) och därmed av (1) vilka liksom Carlesons bevis bara utnyttjar ett konvexitetsargument.

Bevis 9: Vi noterar att

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right) &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln tf(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln tf(t)\,dt\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Dessutom gäller att

$$-\frac{1}{x}\int_0^x \ln tdt = -\frac{1}{x}\Big[t\ln t - t\Big]_0^x = -\ln x + 1 \tag{27}$$

och tack vare Jensens olikhet (eller AG-olikheten)

$$\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln tf(t)dt\right) \leq \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt. \tag{28}$$

Vi integrerar, utnyttjar (26) – (28), kastar om integrationsordningen och får

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)dx \le \int_0^\infty e^{-\ln x+1}\frac{1}{x}\left(\int_0^x tf(t)dt\right)dx$$

$$= e\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x tf(t)dt\right)dx = e\int_0^\infty tf(t)\int_t^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = e\int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Den strikta olikheten följer eftersom likhet i Jensens olikhet kräver att $tf(t)$ är konstant (nästan överallt) men detta kan ej inträffa eftersom vi förutsätter att $\int_0^\infty f(x)dx$ är konvergent.

Anm 12: Beviset ovan är i viss mån relaterat till Knopps idé (se [33], sid 211). Knopp arbetade dock med intervallet $[1,x]$ istället för $[0,x]$ och därför kan Jensens olikhet ej användas. Dessutom skrev aldrig Knopp explicit ut olikheten (2) även om det ofta refereras som om detta gällde, se t.ex. [23] sid. 250 och [38] sid. 143.

”som om detta gällde” *var* ”som att detta gäller”

Anm 13: Genom att modifiera beviset kan vi lätt bevisa även viktade versioner av (2), t.ex. följande

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)x^p\,dx < \frac{e}{1-p}\int_0^\infty f(x)x^p\,dx$$

för varje $p < 1$ som ju är mer allmän än (2). Jämför även med (25).

Bevis 10: Vi noterar först att om vi ersätter $f(t)$ med $f(t)/t$ i (2) så blir vänstra ledet i (2) lika med

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\left(\int_0^x \ln f(t)\,dt - \int_0^x \ln t\,dt\right)\right)dx = e\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)\frac{dx}{x}$$

eftersom

Omskrevet.

$$-\frac{1}{x}\int_0^x \ln t\,dt = -\frac{1}{x}\Big[t\ln t - t\Big]_0^x = -\ln x + 1,$$

och (2) kan skrivas på (den enligt vår mening mer naturliga) formen

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)\frac{dx}{x} < \int_0^\infty f(x)\,\frac{dx}{x}. \tag{29}$$

För att bevisa (29) utnyttjar vi det faktum att funktionen $f(u) = e^u$ är konvex och Jensens olikhet :

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx$$
$$= \int_0^\infty f(t)\left(\int_t^\infty \frac{1}{x^2}\,dx\right)dt = \int_0^\infty f(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Den strikta olikheten följer på samma sätt som i Bevis 8.

Anm 14: Det finns stora likheter mellan Bevis 3 av Carlemans olikhet och Bevis 10 av Pólya–Knopps olikhet. Efter omkastning av summations- resp. integrationsordning i de avslutande räkningarna, så får vi

$$\sum_{k=i}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{i} \quad \text{resp.} \quad \int_t^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{t},$$

vilket blir helt avgörande för bevisen. Notera även att (29) inte följer ur Carlesons olikhet (12) eftersom $p = -1$ (jämför även med Anm 13).

4 Några nya skärpningar och generaliseringar

Vi har redan tidigare gett exempel på skärpningar av Carlemans olikhet för ändliga summor (se t.ex Anm 5, (13), (19) och (20)). I detta avsnitt skall vi ge exempel på några nyare skärpningar och generaliseringar av Carlemans och Pólya–Knopps olikheter. Vi börjar med att notera följande:

Anm 15: Bevis 9 är givetvis likartat med Bevis 10 men det innehåller den viktiga informationen att (1) kan skrivas på formen (29) med bästa konstant 1. Denna observation och genom att modifiera beviset visar att i själva verket följande mer allmänna Sats gäller:

Sats 1: Låt $0 < b \le \infty$. Låt φ vara en positiv och strikt monoton konvex funktion på (a, c), $-\infty \le a < c \le \infty$. Då gäller

$$\int_0^b \varphi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^b \varphi\big(f(x)\big)\Big(1-\frac{x}{b}\Big)\frac{dx}{x} \tag{30}$$

för varje reell funktion på $(0, b)$ sådan att $a < f(x) < c$.

Bevis 11: Vi utnyttjar Jensens olikhet, kastar om integrationsordningen och får

$$\int_0^b \varphi\left(\frac{1}{x}\int_0^x \varphi^{-1} f(t)dt\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^b \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\frac{1}{x^2}\,dx = \int_0^b f(t)\left(\int_t^b \frac{1}{x^2}\,dx\right)dt$$

$$= \int_0^b f(t)\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{b}\Big)dt = \int_0^b f(t)\Big(1-\frac{t}{b}\Big)\frac{dt}{t}.$$

Vi ersätter $f(t)$ med $\varphi\big(f(t)\big)$ och olikheten (30) är bevisad.

Anm 16: För $b=\infty$ är olikheten (30) strikt om man kräver att integralen i högra ledet konvergerar och Sats 1 och dess bevis överensstämmer då väsentligen med Sats 4.1 i [30]. Det fall som beskrivs i Sats 1 har nyligen behandlats mer generellt i [13].

Anm 17: Genom att välja $\varphi(u)=e^u$ och ersätta $f(x)$ med $\ln f(x)$ ser vi att (30) övergår i följande skärpning av (29):

$$\int_0^b \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)\frac{dx}{x} \le \int_0^b f(x)\Big(1-\frac{x}{b}\Big)dx, \qquad 0<b\le\infty.$$

Genom att här ersätta $f(t)$ med $f(t)/t$ får vi även följande skärpning av Pólya–Knopps olikhet (2):

$$\int_0^b \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)\,dt\right)dx \le e\int_0^b f(x)\Big(1-\frac{x}{b}\Big)dx, \qquad 0<b\le\infty. \tag{31}$$

Om vi istället väljer $\varphi(u)=u^p$ i (30) så ser vi att (30) övergår i en skärpning av Hardys olikhet på formen

$$\int_0^b \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p\frac{dx}{x} \le \int_0^b f^p(x)\Big(1-\frac{x}{b}\Big)\frac{dx}{x}, \qquad 0<b\le\infty, \quad p\ge 1. \tag{32}$$

som för fallet $p>1$ (efter några substitutioner) kan skrivas om på formen

$$\int_0^{b_o} \left(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\right)^p dx \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \int_0^{b_o} g^p(x)\left(1-\Big(\frac{x}{b_o}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\right)dx, \tag{33}$$

där $b_o=b^{p/(p-1)}$ och $g(x)=f(x^{(p-1)/p})x^{-1/p}$.

Anm 18: Skärpningarna (31) och (33) av Pólya–Knopps och Hardys olikheter har för övrigt nyligen bevisats i uppsatsen [11] (se även [12]) med en annan teknik som bygger på olikheter mellan mixade medelvärden (se vårt Bevis 7). Notera även att Hardys olikhet på formen (32) gäller även för $p = 1$ medan den inte gäller på formen (33) (även om $\big(p/(p-1)\big)^p$ ersätts med en godtycklig positiv ändlig konstant C). Vårt bevis visar att (30) gäller i omvänd riktning då φ är konkav. Detta ger omvända olikheter till de som beskrivits i Anm 17. Se även [13].

Vi skall även ge följande exempel på ett relativt nytt resultat nämligen följande skärpning av Carlemans ändliga olikhet (se [30], Sats 2.1):

Sats 2: Låt $\{a_k\}_1^\infty$, vara en följd av positiva tal och sätt $x_i = ia_i(1 + 1/i)^i$, $i = 1, 2, \ldots$. Då gäller med $G_k := \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}$ och $l_k := \sum_{i=1}^{[x]}\big(\sqrt{x^*_{k-i+1}} - \sqrt{x^*_i}\big)^2$ att

$$\sum_{k=1}^{N} G_k + \sum_{k=1}^{N} \frac{l_k}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{N}\Big(1 - \frac{k}{N+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k a_k \tag{34}$$

för varje $N \in \mathbb{Z}_+$.

Här betecknar $[x]$ som vanligt heltalsdelen av x och $\{x^*_k\}$ betecknar följden $\{x_k\}$ omordnad i icke växande ordning (det största talet kommer först, det näst största därefter etc.).

Anm 19: För tidigare resultat av denna typ refererar vi även till uppsatserna [2], [3], [4], [45], [56], [58] och de referenser som givits där. Vi noterar att genom att använda uppskattningarna $l_k \ge 0$, $(1 + 1/k)^k < e$ och låta $N \to \infty$ så får vi (1) som ett specialfall av (34).

Anm 20: Förfiningar av Carlemans olikhet med e ersatt med $(1 + 1/k)^k$ har varit kända sedan åtminstone 1967 (se [49] och [50] och jämför med vårt Bevis 6). Faktorn $(1 + 1/k)^k$ har nyligen rönt oberoende intresse i uppsatsen [18] (se även [58]). Dessutom noterar vi att faktorn $1 - k/(N + 1)$ i (34) betyder att den ”vanliga” summan på högra sidan av olikheten har ersatts av motsvarande Cesàrosumma, d.v.s. vi har beräknat det aritmetiska medelvärdet av partialsummorna. Detta medelvärde är givetvis strikt mindre än den ”vanliga” summan eftersom termerna är positiva.

Anm 21: I en relativt ny uppsats [56] visade P. Yan och G. Sun att Carlemans olikhet (1) kan förbättras på följande sätt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{\frac{1}{k}} < e\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{k+1/5}\Big)^{-\frac{1}{2}} a_k. \tag{35}$$

Detta resultat följer lätt ur (34) genom att uppskatta den viktiga faktorn $(1+1/k)^k$ på följande sätt:

$$\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k \le e\Big(1 + \frac{1}{k + c^*}\Big)^{-\frac{1}{2}} \tag{36}$$

där $c^* = (8 - e^2)/(e^2 - 4) \approx 0{,}1802696 < 1/5$. Olikheten (36) gäller inte för något mindre tal än c^*. (Se [30], Anm 12). Detta betyder att med hjälp av (34) så ser vi att (35) faktiskt kan ersättas med den skarpare olikheten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\prod_{i=1}^{k} a_i\Big)^{1/k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{l_k}{k(k+1)} \le e\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{k+c^*}\Big)^{-1/2} a_k. \tag{37}$$

Vi noterar speciellt att (37) ger en skärpning och förfining av Carlemans olikhet (1) även för det oändliga fallet.

Anm 22: Vi har tidigare noterat att Carlesons olikhet (12) direkt ger (1) och (2) som specialfall. Det har nyligen visats en annan olikhet som har denna egenskap nämligen följande:

Var ulikhet på formen $X \le Y \le Y$.

$$\int_0^B \exp\left\{\frac{1}{M(x)}\int_0^x \ln f(t)\,dM(t)\right\}dM(x) \le e\int_0^B \Big(1-\frac{M_*(x)}{M(B)}\Big) f(x)dM(x).$$

se ([30], Sats 3.1). Här gäller att $B \in \mathbf{R}_+$, $M(x)$ är en högerkontinuerlig och växande funktion på $(0,\infty)$ och $M_*(x)$ är en speciellt definierad funktion med egenskapen att $M_*(x) \le M(x)$. Genom att utnyttja denna sats med $M(x) = x$ får vi (2) och genom att utnyttja den med

$$M(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le x \le 1 \\ k, & k \le x \le k+1, \quad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

får vi en förfining av (1).

En annan intressant fråga som nyligen studerats är att finna viktade versioner av olikheten (2). Delvis guidade av utvecklingen beträffande Hardy typ olikheter (se t.ex. böckerna [34] och [43]) har man frågat sig följande:

Låt $0 < p,q < \infty$. Finns det nödvändiga och tillräckliga villkor på vikterna (d.v.s. de positiva och mätbara funktionerna) $u(x)$ och $v(x)$ så att

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln f(t)dt\right)\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^{\infty} f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{38}$$

gäller med stabil uppskattning av operatornormen (=den minsta konstanten så att (38) gäller).

Följande precisa resultat har nyligen visats:

Sats 3: Låt $0 < p \le q < \infty$. Då gäller olikheten (38) om och endast om

$$\mathbb{D} := \sup_{x>0} x^{-1/p}\left(\int_0^x w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

där

$$w(x) = \left(\exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \ln\frac{1}{v(t)}dt\right)\right)^{\frac{q}{p}} u(x)$$

och

$$\mathbb{D} \leq C \leq e^{1/p}\mathbb{D}.$$

Anm 23: Detta resultat visade nyligen i uppsatsen [46], Sats 3. I samma uppsats visades en likartad sats även för fallet $q < p$. Ett första resultat i den riktningen förefaller tillhöra G. Talenti [53], där ett tillräckligt villkor för fallet $p = q = 1$, $u(x) = v(x)$ är bevisat med en god uppskattning av den bästa konstanten C. Vi refererar även till några tidigare resultat av denna typ som finns i uppsatserna [25], [39] och [44]. En vidareutveckling av Sats 2 (och dess motsvarighet för fallet $q < p$) finns redovisad i [41] och den nya doktorsavhandlingen av Maria Nassyrova [40].

Anm 24: Delvis inspirerade av vårt tidigare bevis av att (2) medför (1) så är det frestande att tro att Sats 3 kan utnyttjas för att bevisa en motsvarande mycket allmän generalisering av Carlemans olikhet. Detta visar sig vara korrekt och följande har visats i den absolut nya uppsatsen [29]:

Sats 4: Antag att $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ och $d_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Om $0 < p \leq q < \infty$ så gäller oliketen

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k}\right)^q b_k\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p d_k\right)^{\frac{1}{p}} \tag{39}$$

för någon positiv ändlig konstant C om och endast om

$$B_1 = \sup_{N\in Z_+} N^{-1/p}\left(\sum_{k=1}^{N+1}\left(\prod_{i=1}^{k} d_i\right)^{-\frac{q}{kp}} b_k\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Dessutom gäller att den minsta konstanten C så att (39) gäller är ekvivalent med B_1 (dvs det finns positiva tal c_0 och c_1 oberoende av a_i så att $c_0 B_1 \leq C \leq c_1 B_1$).

Anm 25: Vår huvudreferens för hela denna uppsats är för övrigt [29] där det finns en del kompletterande information. Bland annat har detaljerna i beviset av Sats 4 redovisats där.

Vi skall nu avsluta denna lilla uppsats genom att kortfattat redovisa några fakta om huvudpersonen själv, den berömde svenske matematikern Torsten Carleman.

Anm 26: En huvudreferens beträffande Torsten Carleman och hans matematik är givetvis L. Gårdings bok ([19], sid 233–263). I denna bok beskrivs Carleman bland annat på följande sätt: ”Med Torsten Carleman (1892–1949) fick Sverige sin dittills främste matematiker.” Det är därför inte konstigt att Gårding sedan ägnade 30 sidor åt att beskriva Carleman och hans matematiska gärning och ingen annan matematiker gavs tillnärmelsevis lika mycket utrymme i boken. Det är dock värt att notera att (1) inte finns explicit omnämnd i Gårdings bok, vilket kan bero på att

Sidetall i den svenske utgaven.

han (liksom Carleman) nog bara betraktat denna olikhet som ett hjälpmedel för att bevisa huvudresultaten om kvasianalytiska funktioner. Trots detta har Carlemans olikhet och dess kontinuerliga variant (Pólya–Knopps olikhet) rönt mycket stort intresse och finns t.o.m. omnämnda i titeln på ett stort antal uppsatser. Se vår referenslista innehållande 59 referenser (varav överraskande många relativt nära i tiden), Kapitel 4 i boken [38] (med 174 referenser), Kapitel 1 i boken [34] och den nyligen publicerade översiktsartikeln [45] (med 53 referenser).

Anm 27: (Om personen Torsten Carleman). Det finns många intressanta upplysningar i Gårdings bok [19] och en del kompletterande upplysningar finns i skriften [60]. Det framgår bland annat att Tage Gillis Torsten Carleman föddes 8 Juli 1892 i Visseltofta församling i norra Skåne. Föräldrarna var kantorn och folkskolläraren Karl Johan Carleman och Alma Linnéa Ljungbeck. Han tog studentexamen vid Växsjö HAL 30 maj 1910 och avlade sedan Filosofie ämbetsexamen i december 1912, Filosofie licentiatexamen den 29 Maj 1915 och disputerade den 20 Januari 1917 vid Uppsala Universitet. Han blev docent vid samma universitet 8 februari 1917 och professor vid Lunds Universitet den 31 December 1923. Kort därefter kallades han (på inrådan av bl.a. Gösta Mittag-Leffler) som professor i matematik vid Stockholms Högskola den 23 Maj 1924. Han var gift 1929–40 med Anna-Lisa Lemming (dotter till den legendariske idrottsmannen Erik Lemming som bl.a. blev guldmedaljör i spjutkastning vid olympiaderna i London 1908 och Stockholm 1912). Carleman avled 1949. Det finns många historier om den märkliga personen Torsten Carleman. Vi nöjer oss här med att citera följande från Professor Bo Kjellbergs uppsats [32], sid 93: Som talare i matematiska föreningen var han flitigast av alla. Han var en vältränad gymnast. När man efter sammanträdena skulle bege sig på eftersits på näringsstället ”Rullan” så gick han inte till fots på bron över Fyrisån, utan han gick istället på händer över broräcket.

Beträffande Carlemans viktigaste matematiska resultat hänvisar vi till Professor Lars Gårdings gedigna bok [19]. Vi nöjer oss här med att notera att T. Carleman även visade intresse för tillämpningar och undervisning. Han skrev bland annat en lärobok om differential- och integralkalkyl jämte geometriska och mekaniska tillämpningar, Stockholm 1929 (andra upplagan utgavs 1945).

Tack Sten: Vi tackar Professor Sten Kaijser, Uppsala, för hans noggranna genomläsning av vårt manuskript och för hans generösa råd som väsentligt har förbättrat denna slutliga version.

Bibliografi

1 Ahiezer N. I., On weighted approximations of continuous functions by polynomials on the entire number axis. (Russian) *Uspeki Mat. Nauk* (N. S.) **11** (1956), no. 4(70), 3–43.

2 Alzer, H., On Carleman's inequality. *Portugal. Math.* **50** (1993), no. 3, 331–334.

3 Alzer, H., Refinement of a Carleman-type inequality. *Studia Sci. Math. Hungar.* **32** (1996), no. 3–4, 361–366.

4 Alzer, H., A refinement of Carleman's inequality. *J. Approx. Theory* **95** (1998), no. 3, 497–499.

5 Beckenbach, E. F. and Bellman, R., *Inequalities*. Berlin, Springer-Verlag. (1983).

6 Bennett, G., Inequalities complimentary to Hardy. *Quart. J. Math. Oxford* Ser. (2) **49** (1998), no. 196, 395–432.

7 Bennett, G., Some elementary inequalities. III. *Quart. J. Math. Oxford* Ser. (2) **42** (1991), no. 166, 149–174.

8 Carleman, T., Sur les fonctions quasi-analytiques. *Comptes rendus du V^e Congres des Mathematiciens Scandinaves,* Helsingfors, (1922), 181–196.

9 Carleman, T. and Hardy, G. H., Fourier series and analytic functions. *Proc. Royal Soc. A* **101** (1922), 124–133.

10 Carleson L., A proof of an inequality of Carleman. *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), 932–933.

11 Čižmešija, A. and Pečarić, J., Classical Hardy's and Carleman's inequalities and mixed means. *Survey on classical inequalities* (Ed: T. M. Rassias), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2000, 27–65.

12 Čižmešija, A. and Pečarić, J., Mixed means and Hardy's inequality. *Math. Inequal. Appl.* **1** (1998), no. 4, 491–506.

13 Čižmešija, A., Pečarić, J. and Persson, L. E., *On strengthened Hardy and Pólya–Knopp's inequalities.* Research report, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 2002, submitted (12 pages).

14 Cohen, P. J., A simple proof of the Denjoy–Carleman theorem. *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 26–31.

15 Cochran, J. A. and Lee C.-S., Inequalities related to Hardy's and Heinig's. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **96** (1984), no. 1, 1–7.

16 de Bruijn, N. G., Carleman's inequality for finite series. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **66** (= Indag. Math. **25**, 1963, 505–514).

17 Godunova, E. K., Inequalities with convex functions. *Am. Math. Soc., Transl.*, II. Ser. **88**, 57–66 (1970); translation from *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.* 1965, no. 4(47), (1965), 45–53.

18 Gyllenberg, M. and Yan, P., On a conjecture by Yang. *J. Math. Anal. Appl.* **264** (2001), no. 2, 687–690.

19 Gårding, L., *Matematik och matematiker. Matematiken i Sverige för 1950.* Lund University Press, 1994.

Best å sitere den svenske utgaven?

20 Hardy, G. H., Notes on a theorem of Hilbert. *Math. Z.* **6** (1920), 314–317.

21 Hardy, G. H., Notes on some points in the integral calculus. **LX**, *Messenger of Mathematics* **54** (1925), 150–156.

22 Hardy, G. H., Prolegomena to a chapter on inequalities. *J. London Math. Soc.* **4** (1929), 61–78.

23 Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G. *Inequalities.* 2nd ed., Cambridge University Press, 1952 (1934).

24 Heinig, H. P., Some extensions of Hardy's inequality. *SIAM J. Math. Anal.* **6** (1975), 698–713.

25 Heinig, H. P., Kerman, R. and Krbec, M., Weighted exponential inequalities. *Georgian Math. J.* **8** (2001), no. 1, 69–86.

26 Hörmander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* 2nd ed., Springer Verlag, 1989 (1983).

27 Jain, P., Persson, L. E. and Wedestig, A., From Hardy to Carleman and general mean-type inequalities. In: *Function Spaces and Applications, Narosa Publishing House* (New Delhi), 2000, 117–130.

28 Jain, P., Persson, L. E. and Wedestig, A., Carleman-Knopp type inequalities via Hardy inequalities. *Math. Inequal. Appl.* **4** (2001), no. 3, 343–355.

29 Johansson, M., Persson, L. E. and Wedestig, A., *Carleman's inequality – history, proofs and some new generalizations*. Research report 7, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 2003, submitted (29 pages).

30 Kaijser, S., Persson, L. E. and Öberg, A., On Carleman and Knopp's inequalities. *J. Approx. Theory* **117** (2002), no. 1, 140–151.

31 Kaluza, T. and Szegő, G., Über Reihen mit lauter positivern Gliedern. *J. London Math. Soc.* **2** (1927), 266–272.

32 Kjellberg, B., Matematiker i Uppsala – Några minnen. Festschift in honour of Lennart Carleson and Yngve Domar Proc. Conf. Dept. of Math. Uppsala Univ. 1993 (ed: A Vretblad), 1995, 87–95.

33 Knopp, K., Über Reihen mit positivern Gliedern. *J. London Math. Soc.* **3** (1928), 205–211.

34 Kufner, A. and Persson L. E., *Weighted Inequalities of Hardy Type*. World Scientific, (to appear March 2003).

35 Love, E. R., Inequalities related to Carleman's inequality. *Inequalities* (Birmingham, 1987), *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **129**, Dekker, New York, 1991, 135–141.

36 Levin, V., Two remarks on van der Corput's generalisation of Knopp's inequality. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **40** (1937), 429–431.

37 Mandelbrojt, S., *Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications.* Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions. Paris: Gauthier-Villars XIV, 1952.

38 Mitrinovic, D. S., Pečarić, J. and Fink, A. M., *Inequalities Involving Functions and their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers. xvi, 1991.

39 Mond, B. and Pečarić, J., A mixed means inequality. *Austral. Math. Soc. Gaz.* **23** (1996), no. 2, 67–70.

40 Nassyrova, M., *Weighted Inequalities Involving Hardy-type and Limiting Geometric Mean Operators*. PhD. Thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology (2002).

41 Nassyrova, M., Persson, L. E. and Stepanov, V. D., On weighted inequalities with geometric mean operator by the Hardy-type integral transform. *J. Inequal. Pure Appl. Math.* **48**, vol 3, Issue 4, 2002.

42 Opic, B. and Gurka, P., Weighted inequalities for geometric means. *Proc. Amer. Math. Soc.* **120** (1994), no. 3, 771–779.

43 Opic, B and Kufner, A., *Hardy-type Inequalities*. Pitman Research Notes in Mathematics, 219. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

44 Ostrowski, A., Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. *Acta Math.* **53** (1929), 181–266.

45 Pečarić, J. and Stolarsky, K. B., Carleman's inequality: History and new generalizations. *Aequationes Math.* **61** (2001), no. 1–2, 49–62.

46 Persson, L. E. and Stepanov, V. D., Weighted integral inequalities with the geometric mean operator. *J. Inequal. Appl.* **7** (2002), no. 5, 727–746. (An abbreviated version can also be foound in Russian *Akad. Sci. Dokl. Math.* **63** (2001), 201–202).

47 Pick, L. and Opic, B., On the geometric mean operator. *J. Math. Anal. Appl.* **183** (1994), no. 3, 652–662.

48 Pólya, G., Proof of an inequality. *Proc. London Math. Soc.* (2) **24** (1926), lvii.

49 Redheffer, R. M., Recurrent inequalities. *Proc. London Math. Soc.* (3) **17** (1967), 683–699.

50 Redheffer, R. M., Easy proofs of hard inequalities. *General inequalities* **3** (Oberwolfach, 1981), 123–140.

51 Rudin, W., *Real and Complex Analysis*. New York, McGraw-Hill, 1966.

52 Sunouchi, G. and Takagi, N., A generalization of the Carleman's inequality theorem. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan,* III. Ser. **16** (1934), 164–166.

53 Talenti, G., Sopra una diseguaglianza integrale. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **21** (1967), 167–188.

54 van der Corput, J. G., Generalisations of Carleman's inequality. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), 906–911.

55 van der Corput, J. G., Generalization of an inequality of Knopp. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), 1053–1055.

56 Yan, P. and Sun, G., A strengthened Carleman inequality. *J. Math. Anal. Appl.* **240** (1999), no. 1, 290–293.

57 Yang, B. and Debnath, L., Some inequalities involving the constant e, and an application to Carleman's inequality. *J. Math. Anal. Appl.* **223** (1998), no. 1, 347–353.

58 Yang, X., On Carleman's inequality. *J. Math. Anal. Appl.* **253** (2001), no. 2, 691–694.

59 Yang, X., Approximations for constant e and their applications. *J. Math. Anal. Appl.* **262** (2001), no. 2, 651–659.

60 Svenskt Biografiskt Lexikon. Sjunde bandet, 1927, Bonniers förlag, 389–390.