

## Morleys hjerte – lek med et geometrisk teorem – del 1

*Signe Holm Knudtzon<sup>†</sup> og Johan F. Aarnes<sup>‡</sup>*

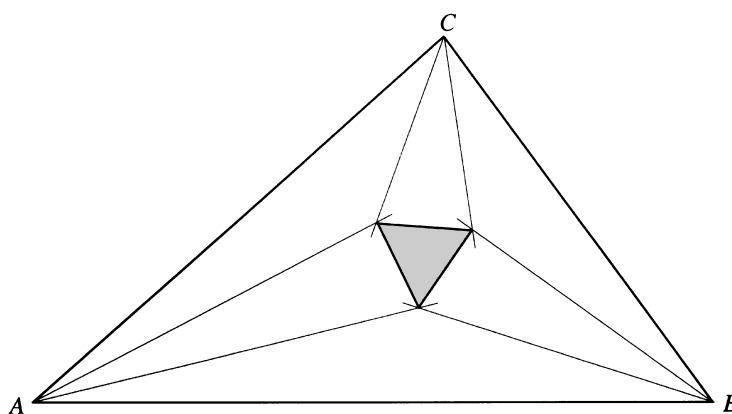
<sup>†</sup> Avdeling for lærerutdanning  
Høgskolen i Vestfold  
Boks 2243  
NO–3103 Tønsberg  
Signe.H.Knudtzon@hive.no

<sup>‡</sup> Institutt for matematiske fag  
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet  
NO–7491 Trondheim  
johana@math.ntnu.no

### *Innledning*

For vel hundre år siden oppdaget F. Morley det som er blitt kalt «en av de mest forbausende setninger i elementær geometri» (Coxeter [1]).

**Morleys teorem.** *Hvis hver av vinklene i en vilkårlig trekant tredeles, vil de delingslinjene som ligger nærmest sidene i trekanten parvis møtes i tre punkt som danner hjørnene i en likesidet trekant.*



*Figur 1. Morleys teorem*

Like forbausende som selve setningen er kanskje at den ikke ble oppdaget meget tidligere. Noe av grunnen kan være en viss forsiktighet hos matematikere med å omgå tredeling av vinkler, som hadde et dårlig rykte. Setningen har likevel etterhvert blitt grundig bevist, noe av historikken kan finnes i [2]. I en interessant artikkel i Normat nr. 50, 1 (2002) [4] gir Oddvar Iden et vakkert bevis som ikke gjør bruk av trigonometri. En mer inngående diskusjon av setningen og dens opprinnelse finnes i en annen Normat-artikkel av Christian Skau [5]. Også Alain Connes, en av vår tids fremste matematikere, har interessert seg for Morleys teorem. I et elegant lite arbeid [1] gir han et *strukturelt* bevis som også prøver å forklare *hvorfor* et slikt resultat er riktig.

Å bevise Morleys teorem på nytt er derfor ikke noe hovedanliggende for dette arbeidet, teoremet er vårt *utgangspunkt*. Det er for eksempel nokså enkelt å se at setningen har flere naturlige generaliseringer, som vi skal ta for oss. Vi vil deretter stille noen spørsmål av litt ulik matematisk karakter, og forsøke å vise at geometrisk tenkning som *metode* kan ha sine fortrinn fremfor analytisk regning og trigonometri. Vi starter med Morleys teorem. Et så enkelt, la oss si universelt faktum bør ha en enkel, nesten innlysende begrunnelse. Etter en tids betraktning og fundering åpnet det seg en innsikt såpass klar at vi følte det var berettiget å ta den med her, og som vi ikke kan se har vært kjent tidligere.

Vårt annet hovedmoment er å illustrere samspillet mellom dynamisk programvare, i dette tilfelle et geometrisk program, og matematisk resonnement. Poenget her er at programmet åpner for spørsmål og problemstillinger som kanskje ellers ikke så lett ville bli tatt opp. Og som vi skal se gir det også indikasjoner på nye sammenhenger. De av leserne som har tilgang til et slikt program vil finne at det gir en utvidet forståelse av de problemene vi diskuterer i denne artikkelen. En interaktiv versjon av dette arbeidet, som ikke krever at man selv har et geometriprogram, finnes på nettstedet <http://shk.ans.hive.no/>. I denne artikkelen har vi tatt med ganske mange figurer, som forhåpentlig vil gi en klar nok innsikt, også for de som vil greie seg uten dataskjerm.

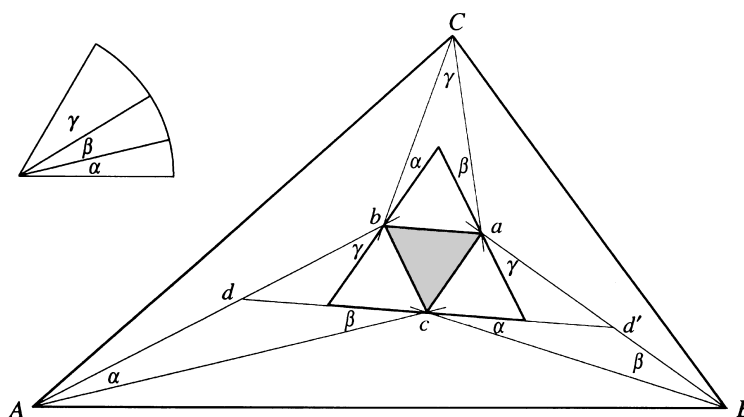
Vi takker referenten for et grundig arbeid som har bidratt til å gjøre artikkelen vesentlig bedre og mer oversiktlig.

### ***Morleys teorem***

Geometriens store force er dens visuelle, umiddelbare karakter, og best er det når et argument kan presenteres gjennom et bilde, uten formler og utregninger. Det finner vi for eksempel i noen av de mest slående bevisene for Pytagoras setning. Leseren får selv dømme hvor nær dette målet vi har kommet. Prøver man et direkte angrep «utenfra», dvs. fra den gitte trekant og inn mot den indre, kommer man fort i vanskeligheter. Nøkkelen ligger i at man starter med en likesidet trekant, som vi heretter skal kalle for Morley-trekanten, og bygger opp en trekant  $ABC$  med vilkårlige vinkler  $A$ ,  $B$  og  $C$ , som ved tredeling produserer Morley-trekanten man startet med. Det er ideen i de fleste bevis for setningen.

*Bevis for Morleys teorem.* Beviset består av to deler, en *konstruksjon* og et *argument*. Konstruksjonen fremgår av figur 2. Vi starter med en likesidet trekant  $abc$

som speiles om hver av sine tre sider, slik at det fremkommer en ny, større like-sidet trekant som vist på figuren. Vi velger så tre vilkårlige vinkler  $\alpha, \beta, \gamma$  hvor  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ . Vinklene plasseres fra de tre hjørnene  $a, b, c$  som angitt på figuren. Legg merke til at da blir  $\angle bAc = \alpha$  og  $\angle cBa = \beta$ . Vinkelbenas skjæringspunkt gir trekanten  $ABC$ .



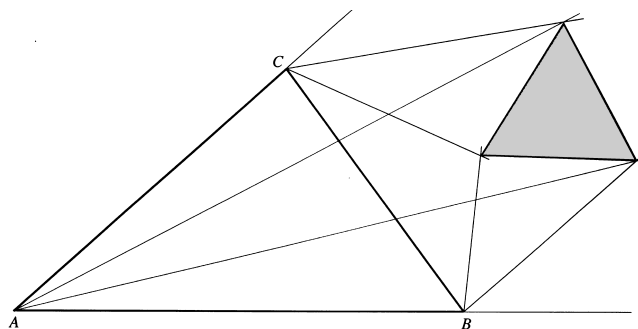
Figur 2.

Påstand:  $\angle A = 3\alpha, \angle B = 3\beta, \angle C = 3\gamma$ .

Ved symmetri er det nok å vise at  $\angle cAB = \alpha$  og  $\angle cBA = \beta$ . Nå er  $\triangle Acd \simeq \triangle cBd'$ , slik at  $Ac/cB = cd/Bd' = d'c/Bd'$  fordi  $cd = d'c$ . Da må  $\triangle ABc \simeq \triangle cBd'$  siden  $\angle AcB = 180^\circ - \alpha - \beta = \angle cd'B$ . Påstanden følger.

### Tredeling av utvendige vinkler

Forlenger vi sidene i en gitt trekant  $ABC$  kan vi også tredele ytre vinkler, som vist på figur 3.



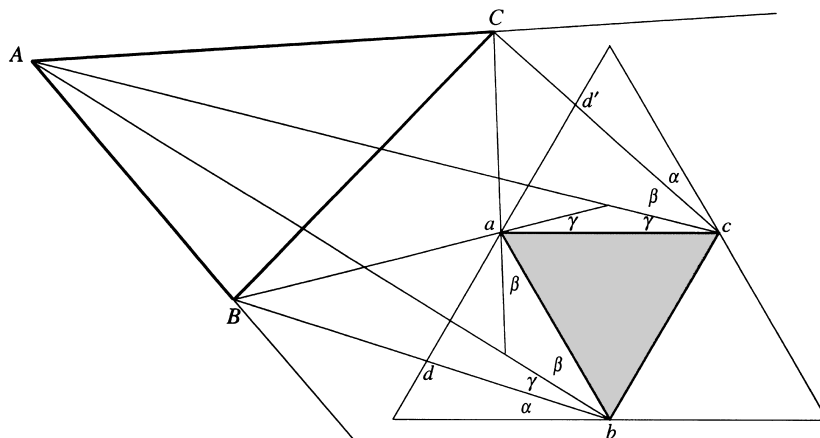
Figur 3.

Tar vi for eksempel utgangspunkt i siden  $BC$ , kan vi tredele de to ytre vinkler med toppunkt i henholdsvis  $B$  og  $C$  som har denne siden som sitt ene vinkelben, og den indre vinkel  $A$ , og forlenge delelinjene gjennom siden  $BC$ . Tar vi nå igjen skjæringspunkt mellom par av delelinjer som ligger nærmest sidene (eller deres forlengelse), bestemmer de en trekant. Utføres denne konstruksjonen i CABRI (som kan tredele vinkler), ser det ut som om denne trekanten er likesidet.

Utfører vi det samme med utgangspunkt i de to andre sidene  $AB$  og  $CA$  får vi ytterligere to trekanter som også ser likesidete ut.

**Teorem 2** *De ytre trekantene som konstruert er likesidete.*

*Bevis.* Det er nok å se på ett av tilfellene. Ideen er den samme som i beviset for Morleys teorem, men detaljene blir litt annerledes. Konstruksjonsdelen fremgår av figur 4, hvor vi igjen starter med en gitt likesidet trekant  $abc$ , og plasserer vinkler  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  som vist på figuren. Trekanten  $ABC$  defineres igjen ved skjæringspunkt mellom vinkelbena.



Figur 4.

Vi viser først at  $Bb$  og  $Ba$  gir en tredeling av den ytre vinkel  $B$ . Ved å se på vinklene i trekanten  $Bda$  finner vi at  $\angle Bda = 120^\circ - \alpha$ ,  $\angle daB = 60^\circ - \gamma$  slik at  $\angle aBd = \alpha + \gamma = 60^\circ - \beta$ .

Analogt finner vi i trekanten  $Cad'$  at  $\angle ad'C = 120^\circ - \alpha$ ,  $\angle d'Ca = 60^\circ - \gamma$  og  $\angle Cad' = 60^\circ - \beta$ . Vi får da at  $\triangle Bda \simeq \triangle ad'C$ , siden vinklene er parvis like. Vi påstår at disse trekantene også er formlike med  $\triangle BaC$ . Dette følger av at  $\angle BaC = 180^\circ - (60^\circ - \beta) - (60^\circ - \gamma) = 120^\circ - \alpha$ , og at

$$\frac{aB}{aC} = \frac{da}{d'C} = \frac{d'a}{d'C}$$

hvor vi har benyttet oss av at  $da = ad'$ . Dermed blir  $\angle CBa = \angle abd = 60^\circ - \beta = \frac{1}{3}$  ytre vinkel ved  $B$ . Helt analogt får vi tredeling av den ytre vinkel ved  $C$ .

Det gjenstår å vise at vi har indre tredeling av  $\angle A$ . Av konstruksjonen fremgår at  $\angle bAc = \alpha$ . Det er derfor nok å vise at  $\angle cAC = \alpha$ . Det følger av at i  $\triangle cAC$  er

$$\angle cAC = 180^\circ - \angle AcC - \angle cCA = 180^\circ - \beta - (180^\circ - (60^\circ - \gamma)) = 60^\circ - \gamma - \beta = \alpha.$$

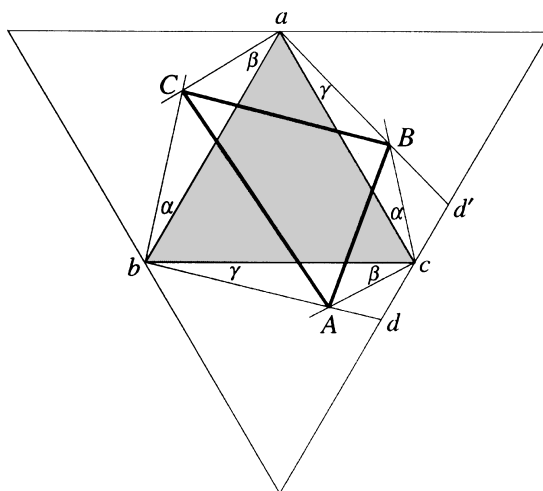
Det er også mulig å tredele alle de tre ytre vinkler:

**Teorem 3** *Trekanten som fremkommer ved tre ytre tredelinger er likesidet.*

*Bevis.* Vinklene  $\alpha, \beta, \gamma$  avsettes fra hjørnene i den likesidete trekant  $abc$  som vist på figur 5. Vi vil vise at vinkelen ved  $B$  er tredelt utvendig av linjene  $Bc$  og  $Bd'$ . Av konstruksjonen følger at  $\angle cBd' = 60^\circ - \beta$ . Vi påstår at  $\triangle cBd' \simeq \triangle Acd \simeq \triangle ABc$ . Som i beviset ovenfor ser vi at de to første trekantene har parvis like vinkler, og er derfor formlike. Videre er

$$\begin{aligned} \angle AcB &= \angle Adc = \angle cd'B = 120^\circ - \gamma \\ \frac{Ac}{Bc} &= \frac{dc}{d'B} = \frac{d'c}{d'B} \end{aligned}$$

som gir påstanden. Det følger at  $\angle ABc = \angle cBd' = 60^\circ - \beta$ . Setningen følger.

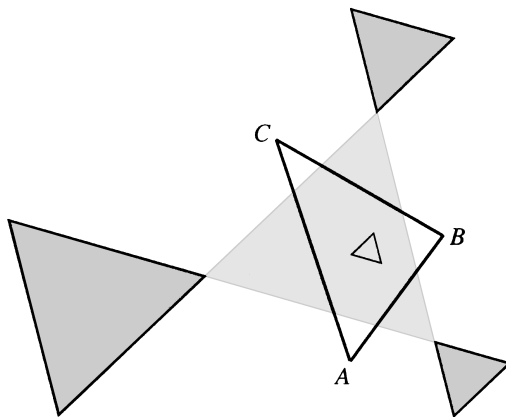


Figur 5.

*Merknad.* Man kan også spørre hva som skjer hvis vi tredeler to indre vinkler og en ytre. Litt forbausende kanskje, etter suksessene ovenfor, viser det seg at de fremkomne trekanter *ikke* blir likesidete. Av Connes arbeid [1] kan man få innsikt i nettopp *hvorfor* setningen holder i noen situasjoner og bryter sammen i andre.

### Mønster og symmetri

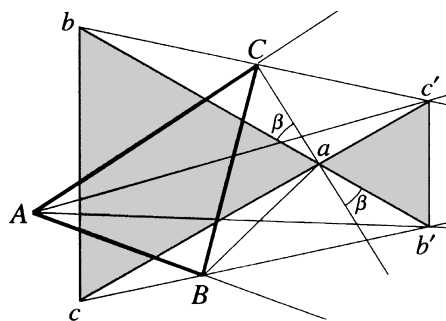
Det virker på figur 6 som om de ytre trekantene inngår i et mønster det kan være interessant å undersøke.



Figur 6.

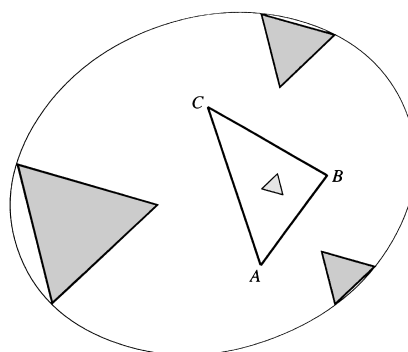
**Teorem 4** Forlenges sidene i de ytre trekantene parvis vil de møtes, og hjørnene som vender innover er hjørner i den likesidete trekant som fremkom ved tre ytre tredelinger.

*Bevis.* Dette resultatet får vi nå nesten gratis, se figur 7. Her er  $abc$  den likesidete trekant som oppstår ved tre ytre tredelinger av  $ABC$ , og  $ab'c'$  er den likesidete trekant som produseres ved innvendig tredeling av vinkel  $A$ , og utvendig tredeling av de to andre. Punkt  $a$  er dermed et felles punkt, fremkommet ved tredeling av de ytre vinkler ved  $B$  og  $C$ . Vi trenger derfor bare å vise at  $b$ ,  $a$  og  $b'$  ligger på en rett linje. Fra figur 4 får vi at  $aC$  danner negativ vinkel  $\beta$  med  $ab'$ , og fra figur 5 får vi at  $aC$  danner negativ vinkel  $\beta$  med  $ab$ . Påstanden følger.



Figur 7.

Det er velkjent at for å bestemme et kjeglesnitt kreves fem punkter (se for eksempel [2], 14.7). Velger vi fem av hjørnene som ligger lengst ute i de tre ytre trekantene vil altså de bestemme et kjeglesnitt, se figur 8. Vi kan da spørre geometriprogrammet om det siste hjørnepunktet også ligger på dette kjeglesnittet. CABRI besvarer dette spørsmålet med «ja». Det er selvsagt ikke et bevis, men sannsynliggjør at vi har en korrekt hypotese.



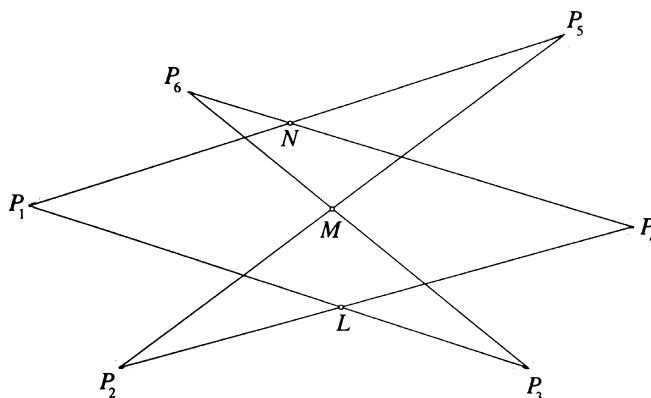
Figur 8.

**Teorem 5** *De seks hjørnene lengst ute på de ytre trekantene ligger på et kjeglesnitt.*

Det er mulig å gi et analytisk regnebevis for denne setningen. Metoden krever imidlertid ganske mye regning, og i tråd med vår idé for denne artikkelen skal vi gi et rent geometrisk argument. Beviset vårt baserer seg på to resultater av gamle mestere. Det første er en karakterisering av kjeglesnitt som tilskrives *Braikenridge* og *Maclaurin* fra 1700-tallet.

La  $P_1, P_2, \dots, P_6$  være seks punkter i planet. Et *polygontrekk* er en suksesjon av trukne linjer slik at hvert punkt gjennomløpes en gang, og vender tilbake til utgangspunktet, se figur 9. Et slikt polygontrekk kan angis ved å spesifisere en rekkefølge på punktene. Her gir  $P_1P_3P_6P_4P_2P_5$  et polygontrekk. Vi bestemmer skjæringspunkt  $L, M, N$  mellom par av linjene som forbinder punktene etter følgende skjema (symbolet  $\wedge$  angir skjæringspunktet mellom to linjer):

$$L = P_1P_3 \wedge P_4P_2, \quad M = P_3P_6 \wedge P_2P_5, \quad N = P_6P_4 \wedge P_5P_1.$$



Figur 9.

**Teorem 6** (*Braikenridge, Maclaurin*) *Punktene  $P_1, P_2, \dots, P_6$  ligger på et kjeglesnitt hvis og bare hvis  $L, M$  og  $N$  ligger på en rett linje.*

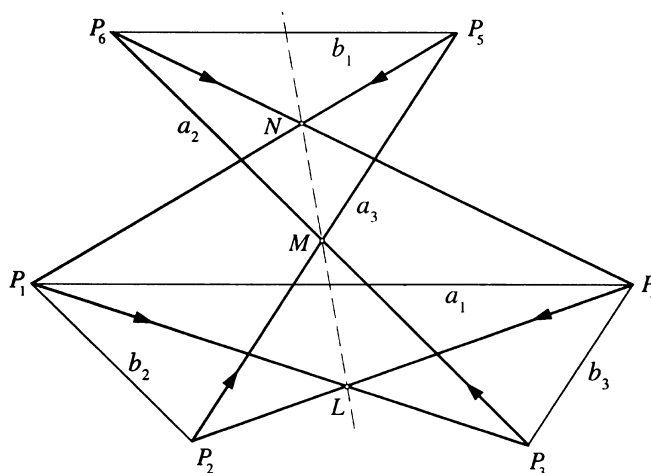
*Bevis.* Se Coxeter [3].

Det andre resultatet vi skal benytte oss av kalles *Menelaus teorem*, men setningen var nok kjent før Menelaus som levde fra ca. 70 til 130 e.Kr. Menelaus regnes imidlertid som grunnleggeren av *sfærisk geometri* (hvor setningen holder, og spiller en viktig rolle).

**Teorem 7 (Menelaus)** La  $L$ ,  $M$  og  $N$  være punkter på hver av sidene (eller deres forlengelser) i en trekant, som deler sidene i forholdene  $l$ ,  $m$  og  $n$  respektive. Da ligger  $L$ ,  $M$  og  $N$  på en rett linje hvis og bare hvis  $lmn = 1$ .

*Bevis.* Se Coxeter [2].

Væpnet med disse to klassiske resultatene kan vi nå vise en setning som er atskillig mer generell enn Teorem 5, og som kanskje ikke er særlig kjent (se figur 10).



Figur 10.

**Teorem 8** La  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  være seks linjer i planet slik at  $a_i$  og  $b_i$  er parallelle,  $i = 1, 2, 3$ , mens ingen av linjene  $a_i$  er parallelle. Da ligger de seks skjæringspunktene  $a_i b_j$ ,  $i \neq j$  på et kjeglesnitt (eller på to rette linjer).

*Bevis.* De seks linjene i setningen kan ligge plassert på en rekke ulike måter i forhold til hverandre, slik at i et geometrisk bevis er det nødvendig å diskutere disse tilfellene hver for seg. Vi skal nøye oss med å behandle det tilfellet som er relevant for vår situasjon, og gjengitt på figur 10. Her gir  $P_1P_3P_6P_4P_2P_5$  et polygontrekk hvor linjene skjærer hverandre parvis i punktene  $L, M, N$ . Av Teorem 6 får vi at det er nok å vise at disse ligger på en rett linje. For å bruke Menelaus teorem trenger vi derfor å regne ut delingsforholdene. Men aller først skal vi gjøre en forenkling. Hvis vi parallellforskyver linjen  $b_1$  oppover på en slik måte at  $P_2P_5$  bevarer retningen, og  $P_3P_6$  likeså, vil  $P_1P_5$  og  $P_4P_6$  forandre retning. Skjæringspunktet  $N$  mellom dem vil bevege seg langs en rett linje som går gjennom  $L$  og  $M$ . I grensestillingen





### ***Preludium til del 2***

I annen del av denne artikkelen starter vi med å stille et nesten naivt spørsmål: *Hvor befinner senteret for trekanten  $ABC$  seg?*

Litt mer presist kan det formuleres slik: Halverer vi vinklene  $A$ ,  $B$ ,  $C$  vil halveringslinjene møtes i ett punkt, senteret til den innskrevne sirkel i trekanten  $ABC$ . Det er klart at dette senteret ligger innenfor Morley-trekanten  $abc$ . Holder vi  $abc$  fast, men varierer  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , så vil også trekanten  $ABC$  bevege seg. Det er lett å se at også senteret for den innskrevne sirkelen vil bevege seg, men det er ikke umiddelbart klart hvordan dette skjer, og innenfor hvilket område senteret vil ligge. Ved hjelp av dynamisk programvare er det imidlertid enkelt å *spore* senterets vandringer innenfor trekanten  $abc$  når denne holdes fast. Ved å la en av vinklene, f.eks.  $\alpha$  være lik 0, og variere de to andre vil en kunne spore en bit av konturlinjen til området. Setter vi så de to andre lik 0 etter tur, får vi konturen til hele området. *Hva slags kurve er denne konturlinjen?* Svaret er overaskende, og leder igjen til andre spørsmål som vi studerer ved hjelp av geometriske metoder.

### ***Litteratur***

- [1] Connes, Alain: A new proof of Morley's Theorem. *Les Relations Entre les Mathématiques et la Physique Théorique*. Institut des Haut Études Sci., Bures 43–46 (1998).
- [2] Coxeter, H. S. MacDonald: *Introduction to Geometry* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc. New York, 1980.
- [3] Coxeter, H. S. MacDonald: *The Real Projective Plane* (2nd ed). Cambridge University Press, London, 1961.
- [4] Iden, Oddvar: Om å unngå trigonometri i geometrien, *Normat* **50**:1, 30–38 (2002).
- [5] Skau, Christian: Tre perler fra elementærmatematikken, *Normat* **48**:1, 56–74 (2000).