Normat **51**:4, 155–162 (2003)

Kontinuitet medför verkligen inte deriverbarhet

Martin Brundin

Avdelningen för matematik
Karlstads universitet
martin.brundin@kau.se

1 Inledning

Begreppen kontinuitet och deriverbarhet är fundamentala såväl inom den rena matematiken som inom dess tillämpningar. Naturligtvis har de flesta som läst matematik eller naturvetenskap på lite högre nivå en god uppfattning om vad begreppen innebär. Att en reell funktion f, i en variabel, är kontinuerlig innebär ju (mycket oprecist) att grafen $y = f(x)$ kan "ritas utan att lyfta pennan". Deriverbarhet betyder på samma sätt att grafen har en "välbestämd lutning" i varje punkt. Det är vidare både välbekant och lätt att, utgående från definitionerna, visa att deriverbarhet medför kontinuitet, d.v.s. om f är deriverbar i punkten a så är f också kontinuerlig i a. Det omvända är inte sant. Sätter vi $f(x) = |x|$ så har vi ett standardexempel på en funktion som är kontinuerlig överallt, men inte deriverbar i $x = 0$. Man kan säga att detta beror på att grafen $y = f(x)$ har en "spets" i $x = 0$.

Vi vet alltså att det finns kontinuerliga funktioner som inte är överallt deriverbara. En naturlig fråga blir "Måste en överallt kontinuerlig funktion vara deriverbar i åtminstone någon punkt?". Svaret var okänt fram till senare hälften av 1800-talet, då den framgångsrike matematikern Weierstrass gav ett exempel som visade att svaret på frågan är nej. Resultat publicerades av hans elev Paul du Bois-Reymond [3]. Idag, med exempelvis Fourieranalys till hands, är det mycket enkelt att ge hyggligt konkreta exempel på sådana funktioner.

Detta arbete syftar till att ge ett bevis för att det finns kontinuerliga funktioner som är ingenstans deriverbara. Vi skall följa van der Waerdens motexempel (bevis) från 1930, då det har fördelen av att vara både elementärt och intuitivt, om än därmed inte enkelt. Konstruktionen går ut på att överlagra absolutbeloppsliknande funktioner på ett sådant sätt att den resulterande funktionen får "spetsar" i alla punkter med ändlig decimalutveckling. Att detta räcker följer (naturligtvis) ur vårt bevis. De hjälpresultat som presenteras i arbetet återfinns i till exempel W. Rudins bok [4]. Vill man ha en något mjukare presentation kan man titta i t.ex. Persson–Böiers böcker [1] och [2].

2 Reella tal, kontinuitet och deriverbarhet – En snabbkurs

Reella tal är mer komplicerade än vad man kanske tror. För oss är det dock inte vare sig nödvändigt eller särskilt relevant att gå in på några tekniska detaljer. Vi nöjer oss med en mycket kortfattad diskussion om de reella talens fullständighet.

En viktig egenskap som de reella talen har, som exempelvis de rationella talen saknar, är att de är *fullständiga*. Fullständigheten innebär, om man så vill, att den reella talaxeln inte innehåller några "hål", eller att varje följd[1] som "försöker konvergera" också gör det. Begreppet kan formuleras om på flera ekvivalenta sätt. Det vanligaste är kanske Supremumaxiomet:

Sats 1 (Supremumaxiomet). *Varje icketom och uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre begränsning.*

En annan ekvivalent formulering av Supremumaxiomet, den som är mest intressant för oss, ges av Satsen om monoton konvergens (se nästa avsnitt).

Vi förutsätter att läsaren är väl förtrogen med begreppen kontinuitet och deriverbarhet. Av den anledningen avstår vi från att formulera och bevisa grundläggande satser, såsom "Satsen om mellanliggande värden". Vi nöjer oss med att repetera hur begreppen definieras och att bevisa satsen om att deriverbarhet implicerar kontinuitet.

För enkelhets skull så ska vi uteslutande betrakta funktioner $f\colon I \to \mathbb{R}$, där $I \subset \mathbb{R}$ betecknar ett intervall. Skrivsättet $f\colon I \to \mathbb{R}$ betyder att f är en reell funktion definierad på I. Observera att symbolen $\subset$ även inkluderar möjlig likhet.

Vi säger att en funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ är *kontinuerlig i* $a \in I$ om det gäller att $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Vi säger att f är *kontinuerlig* om f är kontinuerlig i varje $a \in I$.

Vi säger att f är *deriverbar i* $a \in I$ om gränsvärdet

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar. Vi säger att f är *deriverbar* om f är deriverbar i varje punkt i I.

Sats 2. *Deriverbarhet medför kontinuitet, d.v.s. om f är deriverbar i $a \in I$ så är f kontinuerlig i a.*

Bevis. Om f är deriverbar i $a \in I$ så har vi att

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) \right) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a),\end{aligned}$$

vilket visar påståendet. □

[1] Begreppet följd definieras i nästa avsnitt.

3 Följder, serier och funktionsserier – En snabbkurs

Med en *följd* menar vi helt enkelt en funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ofta skriver man t.ex. $f(n) = a_n$ och identifierar följden med den "ordnade listan av tal" $\{a_1, a_2, \ldots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ibland är det lämpligare att låta första indexet i följden vara t.ex. 0, $\{a_0, a_1, \ldots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Det viktiga i sammanhanget är att följden har ett första element, men saknar ett sista. Vi säger att följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är *konvergent* om $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n)$ existerar, annars *divergent*. Begreppen växande, avtagande, uppåt begränsad, nedåt begränsad och begränsad definieras som för funktioner i allmänhet. Observera dock att exempelvis definitionen av växande följd ($m > n$ medför att $a_n \leq a_m$) kan förenklas till $a_n \leq a_{n+1}$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Det viktiga Supremumaxiomet för reella tal kan ekvivalent formuleras i termer av följder:

Sats 3 (Monotona konvergenssatsen). *Om följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (av reella tal) är växande och uppåt begränsad så är den konvergent.*

Kontinuitets- och derivatorbegreppen kan uttryckas helt i termer av följder. Observera exempelvis att f är deriverbar i $a \in I$ om och endast om

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = f'(a)$$

för varje följd $\{a_n\}_0^{\infty}$ sådan att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ($a_n \neq a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Vi ska nu betrakta (numeriska) serier. Till serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ associerar vi en följd $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ (kallad följden av partialsummor), definierad av

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Själva serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kan vi tänka oss som en (formell) "summa av oändligt många termer".

Vi säger att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är *konvergent med summa s* om följden $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ av partialsummor är konvergent med $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Vi formulerar och bevisar nu några grundläggande satser, som läsaren förhoppningsvis redan känner till (se exempelvis Rudin [4] för en utförligare presentation).

Sats 4. *Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Bevis. Om vi definierar

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

så har vi att

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Men eftersom serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller, per definition, att för något $s \in \mathbb{R}$ är $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Alltså,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0,$$

vilket skulle visas. □

Sats 5. *Om serien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *är konvergent så gäller det att* $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0$.

Bevis. Om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ så har vi

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \left(s - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \right) = s - s = 0,$$

vilket skulle visas. □

Sats 6 (Jämförelsekriteriet). *Om det gäller att* $0 \leq a_k \leq b_k$, $k = 0, 1, 2, ..$, *och* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *är konvergent så är också* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

Bevis. Låt $S = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ och $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Observera att $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en växande följd av reella tal, uppåt begränsad av S. Enligt monotona konvergenssatsen så konvergerar alltså följden $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, vilket skulle visas. □

Sats 7. *Om serien* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *är konvergent så är också* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent.*

Bevis. Definiera $b_k = a_k + |a_k|$. Då gäller att $0 \leq b_k \leq 2|a_k|$. Enligt jämförelsekriteriet är alltså $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Eftersom $a_k = b_k - |a_k|$ så följer det att $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent, vilket skulle visas. □

Slutligen diskuterar vi nu *funktionsserier*, vilka konceptuellt sett egentligen inte är mer komplicerade än vanliga (numeriska) serier. Skillnaden är att vi adderar funktioner istället för reella tal. Låt $I \subset \mathbb{R}$ vara ett intervall och antag att vi till varje $n = 0, 1, 2, \ldots$ har en funktion $f_n \colon I \to \mathbb{R}$. Vi kan då, för varje $x \in I$, bilda en (numerisk) serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Vi säger att serien är *punktvis konvergent*, eller väldefinierad, om den konvergerar för varje $x \in I$. Om så är fallet så får vi på detta sätt en ny funktion $f \colon I \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Vi skall utnyttja endast ett resultat om funktionsserier, nämligen en viktig variant av Weierstrass majorantsats:

Sats 8 (Weierstrass majorantsats). *Låt* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *vara en följd av kontinuerliga funktioner,* $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, sådana att*

(*a*) $|f_n(x)| \leq a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *är konvergent.*

Då är $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *en (väldefinierad) kontinuerlig funktion.*

Bevis. Enligt satsen om absolutkonvergens ovan så är $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergent för varje $x \in \mathbb{R}$, och därmed är f väldefinierad. Låt $x_0 \in \mathbb{R}$ vara en godtycklig punkt. Vi vill visa att f är kontinuerlig i x_0. Vi har att

$$\begin{aligned}|f(x_0+h)-f(x_0)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\big(f_n(x_0+h)-f_n(x_0)\big)\Big| \\ &\le \sum_{n=0}^{N}|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty}|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)| \\ &\le \sum_{n=0}^{N}|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty}2a_n,\end{aligned}$$

för varje $N \in \mathbb{N}$. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och välj $N \in \mathbb{N}$ så att $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2a_n < \frac{1}{2}\varepsilon$ (möjligt enligt Sats 5, ty $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent). Välj nu $|h|$ så litet att

$$\sum_{n=0}^{N}|f_n(x_0+h)-f_n(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

vilket är möjligt eftersom funktionerna $f_0, f_1, \ldots, f_N$ är kontinuerliga i x_0.

Det följer nu att

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Eftersom $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så har vi visat att

$$\lim_{h\to 0}|f(x_0+h)-f(x_0)| = 0,$$

och vi är klara. □

4 van der Waerdens motexempel

Konstruktionen i detta avsnitt är i allt väsentligt samma konstruktion som den som gjordes av van der Waerden [5].

Vi skall alltså *konstruera* en funktion f, som är överallt kontinuerlig men ingenstans deriverbar. Det blir med nödvändighet en funktionsserie, eftersom varje ändlig kombination[2] av styckvis elementära funktioner på ett ändligt intervall kommer att vara deriverbar överallt utom möjligen på en ändlig mängd. Kom alltså ihåg att vi vill skapa en funktion som inte är deriverbar *någonstans*.

Vi kommer att börja med en funktion b som är 0 utanför intervallet $(0, 1)$, vår "byggsten", som vi sedan kopierar över hela linjen. Vi kommer att få en "sågtandskurva". Därefter skalar vi (likformigt) ned sågtandskurvan 10 gånger, sedan 100 gånger, 1000 gånger o.s.v. i all oändlighet. Slutligen adderar vi alla våra (oändligt många) sågtandskurvor. Funktionen som vi får kommer faktiskt att vara vårt eftersträvade motexempel!

[2]Kombination i betydelsen summa, produkt, sammansättning o.s.v.

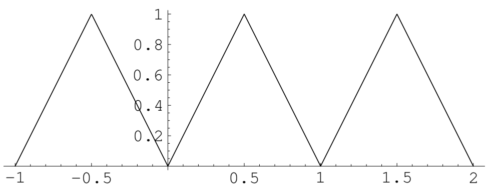
Definiera funktionen

$$b(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 < x \le 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Nu definierar vi en funktion f_0 som en periodisk fortsättning av b:

$$f_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b(x+k).$$

Observera att vi inte behöver bekymra oss för konvergens här, eftersom varje x svarar mot maximalt en nollskild term i serien som definierar $f_0(x)$. Notera också att f_0 är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ (eftersom b är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$) och att f_0 är deriverbar överallt utom på mängden $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = k/2 \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$.



Figur 1. Grafen $y = f_0(x)$. Funktionen b har kopierats över linjen.

För $n \ge 1$ definierar vi nu

$$f_n(x) = 10^{-n} f_0(10^n x).$$

Vi ser, grafiskt, att f_n är "samma" funktion som f_0 men på en 10^n gånger finare skala. Det följer att f_n är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ (eftersom f_0 är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$) och att f_n är deriverbar överallt utom på mängden

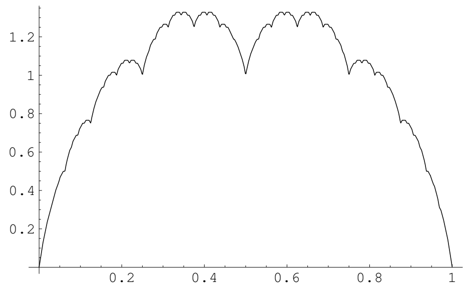
$$\frac{1}{2}\cdot 10^{-n}\,\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{2}\cdot 10^{-n}\cdot k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}.$$

För varje $x \in \mathbb{R}$ är det nu klart att funktionsserien

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{1}$$

är konvergent, eftersom $|f_n(x)| \le 10^{-n}\cdot 1 = 10^{-n}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$ är konvergent. Det innebär alltså att $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en väldefinierad funktion. I figur 2 nedan visas en approximation till grafen $y = F(x)$.

Sats 9. *Funktionen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definierad i ekvation* (1), *är kontinuerlig i varje $x \in \mathbb{R}$ men inte deriverbar i något $x \in \mathbb{R}$.*



FIGUR 2. Bilden visar grafen av den åttonde partialsumman, $y = f_0 + f_1 + \cdots + f_7$, för tydlighets skull i fallet då skalningsfaktorn är 2. Fenomenet med spetsarna är dock i princip samma som för vår funktion (skalningsfaktor 10).

Bevis. Vi har redan konstaterat att varje funktion f_n, $n \geq 0$, är kontinuerlig. Vidare, eftersom $|f_n(x)| \leq 10^{-n}$ för varje $x \in \mathbb{R}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$ är konvergent, så följer det ur Weierstrass majorantsats att F är kontinuerlig.

Att visa att F inte är deriverbar någonstans är lite mer invecklat. Till varje tal $x \in \mathbb{R}$ låter vi $x[n]$, $n \geq 1$, beteckna decimal n i x. Till exempel har vi $\pi[3] = 1$, eftersom $\pi = 3.14\underline{1}592\ldots$ Vi använder oss vidare av konventionen att inte tillåta tal vars decimalutveckling slutligen består av enbart nior, till exempel identifierar vi talet $0.1999999\ldots$ med $0.2000000\ldots$.

Låt nu $x \in \mathbb{R}$ vara givet. Vi definierar en följd $\{x_n\}_1^{\infty}$ på följande vis:

$$x_n = \begin{cases} x + 10^{-n}, & \text{om } x[n] \in \{0,1,2,3,5,6,7,8\} \\ x - 10^{-n}, & \text{om } x[n] \in \{4,9\} \end{cases}.$$

Antag först att $k \geq n$, vilket speciellt innebär att 10^{k-n} är ett heltal. Då är

$$\begin{aligned} f_k(x_n) &= f_k(x \pm 10^{-n}) \\ &= 10^{-k} f_0(10^k x \pm 10^{k-n}) \\ &= 10^{-k} f_0(10^k x) \\ &= f_k(x), \end{aligned}$$

eftersom f_0 är 1-periodisk.

Antag nu att $k < n$, det lite svårare fallet då (den listiga) definitionen av x_n får sin förklaring. Grafen till funktionen f_k består av en massa linjestycken. Påståendet är att x och x_n, om $k < n$, alltid ligger under *samma* linjestycke eller ekvivalent att x och x_n aldrig ligger på olika sidor om en ”spets”. Nu visar vi det! Observera först att definitionen av x_n ger att $x_n[n] \neq 0$ och $x_n[n] \neq 5$. För x-koordinaten $s(k)$ till en spets på grafen $y = f_k(x)$ gäller att $s(k)[n] = 0$ eller att $s(k)[n] = 5$, eftersom $k < n$. Detta innebär att varje tal z i det öppna intervallet $\big(s(k) - 10^{-n}, s(k) + 10^{-n}\big)$ uppfyller $z[n] = 0$ eller $z[n] = 5$, vilket i sin tur ger att x_n inte kan ligga i något sådant intervall. Alltså, avståndet mellan x_n och närmsta spets $s(k)$ är alltid *minst* 10^{-n}. Men eftersom avståndet mellan x och x_n är *exakt* 10^{-n} så ligger x och x_n under samma linjestycke, vilket skulle visas.

Varje linjestycke har en riktningskoefficient som är antingen 2 eller -2, en enkel konsekvens av att skalningen av f_0 (för vilken påståendet är uppenbart) till f_k är *likformig*. Vi får alltså $f_k(x) - f_k(x_n) = \pm 2(x - x_n)$.

Sammanfattningsvis har vi att

$$f_k(x) - f_k(x_n) = \begin{cases} \pm 2(x - x_n), & \text{om } k < n \\ 0, & \text{om } k \geq n \end{cases}.$$

Det följer nu att

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \big(f_k(x) - f_k(x_n)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \pm 2(x - x_n) \\ &= (x - x_n) \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k, \end{aligned}$$

där $\varepsilon_k \in \{\pm 2\}$. Speciellt har vi att gränsvärdet $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k$ inte kan vara 0 (i själva verket existerar det inte överhuvudtaget). Sammanfattningsvis har vi att

$$\frac{F(x) - F(x_n)}{x - x_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k.$$

Om vi låter $n \to \infty$ så ser vi att differenskvoten i vänsterledet inte konvergerar, eftersom högerledet enligt Sats 4 inte gör det. Det följer att $F'(x)$ inte existerar, och eftersom $x \in \mathbb{R}$ var godtyckligt valt så är vi klara. $\square$

Referenser

[1] A. Persson, L.-C. Böiers, *Analys i en variabel,* Studentlitteratur AB 2001.

[2] A. Persson, L.-C. Böiers, *Analys i flera variabler,* Studentlitteratur AB 1998.

[3] P. du Bois-Reymond, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *Journal für Math.* **79**, 21–37 (1875).

[4] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Third edition McGraw-Hill Book Co. 1976, New York.

[5] B.L. van der Waerden, Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion, *Math. Z.* **32**, 474–475 (1930).