Normat **51**:4, 176–179 (2003)

Eulers Betafunktion och Schwarz–Christoffels formel för en triangel

Peter Lindqvist

Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NO–7491 Trondheim
lqvist@math.ntnu.no

Som rubriken antyder är denna uppsats av intresse för dem som finner behag i att manipulera med formler. Någonting väsentligen nytt är det icke fråga om. Vi skall bland annat, på ett ovanligt sätt, härleda Eulers kända formel

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \qquad (0<\alpha<1) \tag{1}$$

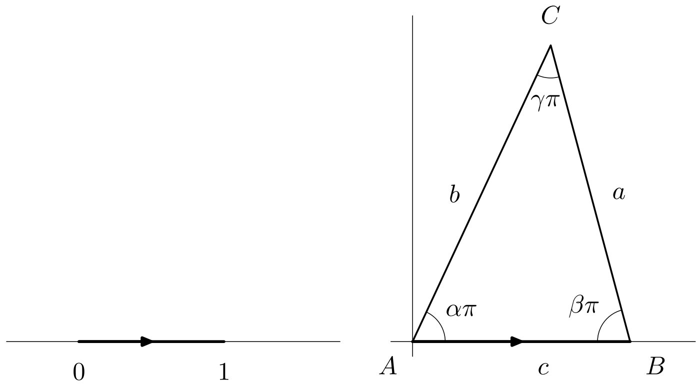
för Betafunktionen från 1720-talet, nämligen via *den konforma avbildningen av ett halvplan på en triangel.* Formeln kan också skrivas som $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin(\pi\alpha)$.

Schwarz–Christoffels välkända formel i Funktionsteorien avbildar ett halvplan konformt på en given polygon. Om den givna polygonen i w-planet är en triangel med vinklarna $\alpha\pi$, $\beta\pi$ och $\gamma\pi$, varvid naturligtvis $\alpha+\beta+\gamma=1$, så kan den konforma avbildningen skrivas under formen

$$w = \int_0^z \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}\,d\zeta \tag{2}$$

där integrationsvägen från 0 til z är en kurva i det övre halvplanet, t.ex. en linje. Rötterna (alltså $\zeta^{\alpha-1}$ och $(1-\zeta)^{\beta-1}$) skall tolkas så att $t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}>0$, då

$0 < t < 1$. Den reella axeln $-\infty \leq t \leq +\infty$ i z-planet avbildas på triangelns periferi och halvplanet $\mathrm{Im}(z) > 0$ på det inre av triangeln.



Vi observerar korrespondensen

$$0 \leftrightarrow A = 0, \quad 1 \leftrightarrow B, \quad \infty \leftrightarrow C.$$

Låt oss beräkna längderna av triangels sidor. Segmentet $[0,1]$ i z-planet avbildas på sidan $[A,B] = [0,c]$ i w-planet och vi får sidolängden

$$c = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt.$$

Segmentet $1 \leq t \leq \infty$ i z-planet avbildas på sidan $[B,C]$, vilken har längden

$$\begin{aligned} a &= \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t-1)^{\beta-1}dt \\ &= \int_0^1 \tau^{\gamma-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau \end{aligned}$$

där $t = 1/\tau$, $dt = -d\tau/\tau^2$. På motsvarande sätt avbildas segmentet $[-\infty, 0]$ på sidan $[C,A]$ och vi får sidolängden

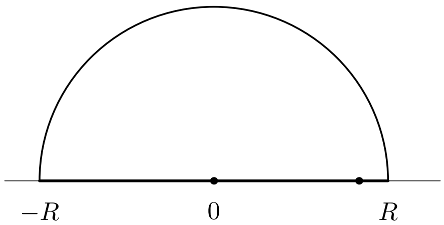
$$\begin{aligned} b &= \int_{-\infty}^0 (-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \\ &= \int_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt \\ &= \int_0^1 \tau^{\gamma-1}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau \end{aligned}$$

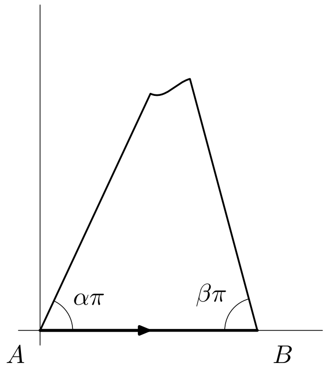
efter substitutionen $1 + t = 1/\tau$.

Allt detta hör till Schwarz–Christoffels formel och vi får det på köpet så att säga. Formeln är elementär men ett bevis involverar vanligen Cauchys integralteorem

$$\oint \zeta^{\alpha-1}(1-\zeta)^{\beta-1}\,d\zeta = 0$$

längs en lämplig kontur. Problemet är at visa att bilden av den reella axeln verkligen sluter sig, så att ändorna möts i hörnet C. Se figuren nedan, där $R \to \infty$.





Sålunda ingår en konturintegral åtminstone implicit i resonemanget.

Vi har alltså räknat ut sidolängdorna a, b och c i form av integraler. Det är fråga om Betafunktionen

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{3}$$

Sinusteoremet för triangeln ger

$$\frac{a}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{b}{\sin(\beta\pi)} = \frac{c}{\sin(\gamma\pi)}$$

eller

$$\frac{B(\beta,\gamma)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{B(\alpha,\gamma)}{\sin(\beta\pi)} = \frac{B(\alpha,\beta)}{\sin(\gamma\pi)} \tag{4}$$

i enlighet med våra uträkningar. Här är

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Det är ganska vanligt att man, efter det att längden c har bestämts, uttrycker a och b med hjälp av c genom att använda sinusteoremet. Så gör t.ex. Zeev Nehari i sin bok ”Introduction to Complex Analysis”. Nehari uppfattar Betafunktionens egenskaper som bekanta. Den omvända proceduren att i stället härleda identiteter för Betafunktionen utgående från de redan kända sidolängderna har jag inte lyckats finna i litteraturen. – Denna enkla observation är dock knappast helt ny.

Den erhållna formeln är intressant. Nu följer formel (1) nästan omedelbart om vi låter $\gamma \to 0$ under det att α hålles konstant. Då måste $\beta \to 1-\alpha$ och vi får resultatet

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}\,dt &= \lim_{\gamma\to 0+} \frac{\sin(\gamma\pi)}{\sin(\alpha\pi)} \int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{\gamma-1}\,dt \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \lim_{\gamma\to 0+} \int_0^1 t^{-\alpha}\gamma(1-t)^{\gamma-1}dt\end{aligned}$$

ty $\sin(\gamma\pi) \approx \gamma\pi$. Gränsvärdet av den sista integralen är 1. Integranden är koncentrerad vid ändpunkten $t = 1$. Vi har sålunda funnit fram till Eulers formel

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Låt oss till slut anmärka, att det inte är alldeles enkelt att utan komplexa tal komma fram till detta resultat. Ofta åberopas produktformeln för sinus men även denna handlar i grund och botten om en funktion av en komplex variabel.

Man kan naturligtvis byta ut triangeln mot en månghörning. Detta resulterar i invecklade identiteter med många parametrar α, β, γ, $\delta, \ldots$. Ett extra problem uppstår på grund av att vinklarna ensamma icke längre bestämmer proportionerna mellan sidornas längder. Om man inte vill dela in figuren i trianglar ser det ut som om man vore hänvisad till specialfall. – Triangeln är unik.