Normat **51**:4, 180–184 (2003)

Oppgaver

437. Et positivt heltall n kalles *perfekt* hvis summen av alle dets divisorer (inklusive n) er lik $2n$. For eksempel er 6, 28 og 496 perfekte tall, og etter Euklid og Euler vet vi hvilken form et perfekt partall må ha. Men spørsmålet om det fins perfekte oddetall er et gammelt og uløst problem. (Se Kirfels artikkel i dette nummer.)

Påvis at hvis n er et perfekt tall, så er $n \not\equiv 2 \pmod 3$. (Innsendt av Marius Overholt, Tromsø, NO.)

438. Det snek seg dessverre inn en feil i oppgave 433 som gjorde oppgaven triviell. Her kommer den slik som den virkelig var i Putnam-konkurransen: For hvilke reelle tall x konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n\sin(1/n)}-1\Big)^{x}\ ?$$

439. Vis at det fins nøyaktig en funksjon $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ slik at $f\big(f(x)\big) = 6x - f(x)$ for alle $x > 0$. (Også fra Putnam-konkurransen.)

440. Et rektangel $HOMF$ har sider $HO = 11$ og $OM = 5$. En trekant ABC har H som skjæringspunktet for høydene, O som sentret for den omskrevne sirkelen, M som midtpunktet på siden BC, og F som fotpunktet for høyden fra A. Hvor lang er siden BC? (Opplysninger om kilden kommer sammen med løsningen.)

Løsninger

412. La AH_1, BH_2, CH_3 være høydene i en spissvinklet trekant ABC. Trekantens innskrevne sirkel tangerer sidene BC, CA, AB i henholdsvis T_1, T_2, T_3. La linjene l_1, l_2, l_3 være speilbildene av linjene H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 i henholdsvis linjene T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2.

Vis at l_1, l_2, l_3 bestemmer en trekant der hjørnene ligger på den innskrevne sirkelen til trekanten ABC. (Fra den 41. internasjonale matematikkolympiaden i Sør-Korea i år 2000.)

Løsning: (Fra den offisielle løsningen.) La M_1, M_2, M_3 være speilbildene av henholdsvis T_1, T_2, T_3 med hensyn på halveringslinjene for $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Punktene M_1, M_2, M_3 ligger åpenbart på den innskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. Vi skal vise at de nettopp er hjørnene i trekanten dannet av l_1, l_2, l_3.

Ved symmetri ser vi at det er tilstrekkelig å vise at speilbildet l_1 av H_2H_3 med hensyn på T_2T_3 går gjennom M_2. La I være sentrum i den innskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. Legg merke til at T_2 og H_2 alltid ligger på samme side av linjen BI. Vi vil bare se på tilfellet hvor også C ligger på samme side av BI som disse punktene. (Noen enkle modifikasjoner må til hvis C ligger på den andre siden.)

La $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$.

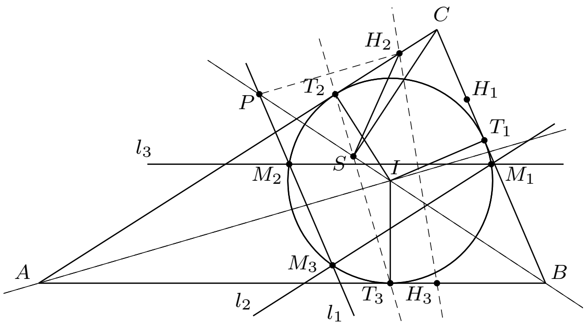
Lemma: Speilbildet av H_2 med hensyn på T_2T_3 ligger på linjen BI.

Bevis: La l være linjen gjennom H_2 med $l \perp T_2T_3$, og la P og S være skjæringspunktene mellom BI og henholdsvis l og T_2T_3. Punktet S ligger på begge linjestykkene $[T_2T_3]$ og $[BP]$. Det er tilstrekkelig å vise at $\angle PSH_2 = 2\angle PST_2$. Det søkte speilbildet av H_2 er da nettopp P.

Vi har $\angle PST_2 = \angle BST_3$, og siden $\angle AT_3S$ er utvendig vinkel til $\triangle BST_3$, har vi

$$\angle BST_3 = \angle AT_3S - \angle T_3BS = (90^\circ - \alpha) - \beta = \gamma.$$

Videre er $\angle BST_1 = \angle BST_3 = \gamma$ ved symmetri om BI. Punktene C og S ligger på samme side av IT_1, siden $\angle BT_1S = 90^\circ + \alpha > 90^\circ$. Av likhetene $\angle IST_1 = \gamma = \angle ICT_1$ ser vi at firkanten SIT_1C er syklisk (dvs. kan innskrives i en sirkel), så $\angle ISC = \angle IT_1C = 90^\circ$. Men da er også BCH_2S en syklisk firkant, siden $\angle BH_2C = 90^\circ = \angle ISC = \angle BSC$. Det følger at $\angle PSH_2 = \angle C = 2\gamma = 2\angle PST_2$. *QED.*



Beviset for lemmaet gir også $\angle BPT_2 = \angle SH_2T_2 = \beta$, ved symmetri om T_2T_3 og fordi firkanten BCH_2S er syklisk. Siden M_2 er speilbildet av T_2 om BI, får vi da $\angle BPM_2 = \angle BPT_2 = \beta = \angle CBP$, og derfor er PM_2 parallell med BC. For å vise at M_2 ligger på l_1, er det nå nok å vise at også l_1 er parallell med BC.

Anta at $\beta \neq \gamma$, og la D og E være skjæringspunktene mellom linjen BC og henholdsvis H_2H_3 og T_2T_3. (Merk at D og E ligger på linjen BC på samme side av linjestykket $[BC]$.) En enkel vinkelberegning gir $\angle BDH_3 = 2\,|\beta - \gamma|$ og $\angle BET_3 = |\beta - \gamma|$, og derfor er linjen l_1 virkelig parallell med BC.

Løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Jakob I. Try, Søgne, NO; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

413. La m og n være positive heltall. La $a_1, a_2, \ldots, a_m$ være positive heltall mindre enn eller lik n og $b_1, b_2, \ldots, b_n$ positive heltall mindre enn eller lik m. Vis at det fins en delmengde $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ og en delmengde $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ slik at $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j$. (Kilde ukjent.)

Løsning: (Etter Knut Dale og Ivar Skau, Bø i Telemark, NO.) Vi vil vise at dersom $1 \le a_1, \ldots, a_m \le n$ og $1 \le b_1, \ldots, b_n \le m$, så er

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+r} = b_l + b_{l+1} + \cdots + b_{l+s},$$

for passande k, r, l, s, dvs. vi har like summar av på kvarandre følgjande element frå kvar sekvens. La

$$S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \quad \text{og} \quad T_j = b_1 + b_2 + \cdots + b_j.$$

Dersom $S_m = T_n$ er vi framme. Gå ut frå at $S_m < T_n$. For kvar $i = 1, 2, \ldots, m$, la j_i vere ein indeks slik at

$$0 \le r_i = S_i - T_{j_i} \le m - 1 \qquad (T_0 = 0).$$

(Det finst minst ein slik j_i. Dersom det finst fleire, kan vi utnytte dette til å finne fleire løysingar.) Er ein $r_i = 0$, er vi framme. Er alle $r_i > 0$, følgjer det av skuffeprinsippet at $r_p = r_q$ for passande $p < q$, og ved subtraksjon er vi framme. Merk at i tilfellet $S_m < T_n$ treng vi ikkje bruke b_n. Tilsvarande resonnement når $s_m > T_n$, og da treng vi ikkje bruke a_m. Merk også at vi får ein algoritme til å bestemme k, r, l, s, og at rekkefølgja av elementa i sekvensane er irrelevant.

Eksempel: La $\{a_i\} = 3, 4, 4, 1, 3, 2$ og $\{b_j\} = 5, 5, 4, 5$. Da er $S_6 = 17 < 19 = T_4$. Vi får

$$\begin{aligned}
r_1 &= a_1 - 0 = 3 \\
r_2 &= (a_1 + a_2) - b_1 = 2 \\
r_3 &= (a_1 + a_2 + a_3) - (b_1 + b_2) = 1 \\
r_4 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (b_1 + b_2) = 2 \\
r_5 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2) = 5 \\
r_5' &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3) = 1 \\
r_6 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - (b_1 + b_2 + b_3) = 3
\end{aligned}$$

som gir $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = b_1 + b_2 + b_3$ $(r_1 = r_6)$, $a_3 + a_4 = b_2$ $(r_2 = r_4)$ og $a_4 + a_5 = b_3$ $(r_3 = r_5')$. Ei løysing som ikkje blir avslørt ved denne metoden og den gitte rekkefølgja i sekvensane er $a_2 + a_3 + a_4 = b_2 + b_3$.

414. Hva er minste n slik at alle mengder av n gitterpunkter (punkter med heltallige koordinater) i planet, der ikke noe utvalg av tre punkter fra mengden ligger på linje, inneholder et utvalg av tre punkter som er hjørner i en trekant med et gitterpunkt som tyngdepunkt? (Innsendt av Ivar Skau, Bø i Telemark, NO.)

Løsning: (Fra Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.) En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at tyngdepunktets abscisse skal være hel, er at de tre punktenes abscisser tilhører *enten samme* restklasse *eller tre forskjellige* restklasser modulo 3, og tilsvarende for ordinatene. Vi kan velge 2 punkter for hvert av 4 utsøkte restklasse-par, eksempelvis $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ og $(0,1)$, altså 8 punkter, uten at betingelsen er oppfylt, men et niende punkt $(n = 9)$ vil alltid komplettere minst ett punkttrippel som oppfyller betingelsen.

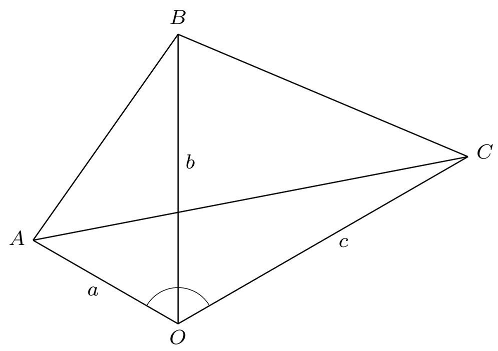
En smule mer generelt kan vi i et d-dimensjonalt rom, $d = 1, 2, 3, \ldots$, velge 2 punkter for hvert av 2^d utsøkte restklasse-d-tupler, altså 2^{d+1} punkter, uten at betingelsen er oppfylt, mens et eneste punkt *til* vil komplettere minst ett punkttrippel der den er oppfylt. (For $d = 1$ er det da nødvendig å tillegge bare *punktene* én felles vekt. Og for d generelt kan en dermed oppheve forbudet mot «tre punkter på linje».)

415. Bevis at for alle positive reelle tall a, b, c er

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

(Fra Baltic Way, 2000.)

Løsning: Se figuren. Hvis $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OC| = c$, og $\angle AOB = \angle BOC = 60°$, følger det av cosinussetningen at $\sqrt{a^2 - ab + b^2} = |AB|$, $\sqrt{b^2 - bc + c^2} = |BC|$, $\sqrt{a^2 + ac + c^2} = |AC|$, så den gitte ulikheten er ekvivalent med trekantulikheten $|AB| + |BC| \geq |AC|$.



Løst av: Niels Bejlegaard, Vanløse, DK; Pål Grønås, Stjørdal, NO; Lars Höglund, Uppsala, SE; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Inge H.A. Pettersen, Kongshavn, NO.

416. For hvert positivt heltall n lar vi

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2)\cdots(4n-2)(4n)}.$$

Bevis at $\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}$. (Fra Baltic Way, 2000.)

Løsning: (Fra den offisielle løsningen.) Ved hjelp av ulikheten $m(m+2) < (m+1)^2$ får vi

$$\begin{aligned} x_n^2 &= \frac{(2n+1)^2(2n+3)^2\cdots(4n-1)^2(4n+1)^2}{(2n)^2(2n+2)^2\cdots(4n-2)^2(4n)^2} \\ &< \frac{(2n+1)(2n+2)^2\cdots(4n)^2(4n+1)}{(2n)^2(2n+2)^2\cdots(4n-2)^2(4n)^2} \\ &= \frac{(2n+1)(4n+1)}{(2n)^2} < 2 + \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte får vi $x_n^2 > 2 + \frac{1}{n}$. Dermed har vi

$$\frac{1}{n} < x_n^2 - 2 < \frac{4}{n} \tag{1}$$

og

$$\frac{1}{n(x_n + \sqrt{2}\,)} < x_n - \sqrt{2} < \frac{4}{n(x_n + \sqrt{2}\,)}. \tag{2}$$

Av (1) får vi $\sqrt{2} < x_n < \sqrt{6}$. Resultatet følger så fra (2).

Løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

417. Gitt en likebent trekant ABC med $\angle A = 90°$. La M være midtpunktet på siden AB. Den rette linjen som går gjennom A og står vinkelrett på CM, skjærer siden BC i P. Bevis at

$$\angle AMC = \angle BMP.$$

(Fra Baltic Way, 2000.)

Løsning: (Fra den offisielle løsningen.) Velg punktet K slik at $ABCK$ blir et kvadrat, og la N være skjæringspunktet mellom linjene AP og BK. Siden linjene AN og CM står ortogonalt på hverandre, er N midtpunktet på BK. Videre er trekantene AMC og BNA kongruente, hvilket gir

$$\angle AMC = \angle BNA. \tag{1}$$

Siden $BM = BN$ og $\angle MBP = \angle NBP$, er trekantene MBP og NBP kongruente. Derfor er

$$\angle BMP = \angle BNP = \angle BNA. \tag{2}$$

Resultatet følger nå av (1) og (2).

Løst av: Niels Bejlegaard, Vanløse, DK; Pål Grønås, Stjørdal, NO; Lars Höglund, Uppsala, SE; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Inge H.A. Pettersen, Kongshavn, NO; Thomas Strai, Tvedestrand, NO; Jakob I. Try, Søgne, NO.

418. På hvor eventyrlig mange måter kan den 27 fot lange og 5 fot brede rektangulære promenaden mellom kongens paviljong og dronningens, brolegges med 5 fot lange og 1 fot brede rektangulære marmorheller? (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

Løsning: (Etter Pål Grønås, Stjørdal, NO.) Hver helle må enten ligge på tvers av promenaden og dekke 1 fot i lengderetningen, eller ligge på langs og dekke 5 fot i lengderetningen. I det siste tilfellet må det være fire andre heller ved siden av som også ligger i lengderetningen, slik at de fem hellene danner et kvadrat. Antall måter å brolegge på er derfor identisk med antall måter man kan skrive tallet 27 på som en sum av enere og femmere. Om det er k femmere i summen, blir antall enere i summen lik $27 - 5k$. Antall addender i summen blir $27 - 4k$. De k femmerne kan da plasseres som addender i summen på $\binom{27-4k}{k}$ ulike måter. Følgelig blir det totale antallet

$$N = \sum_{k=0}^{5} \binom{27-4k}{k} = 1001.$$

Også løst av: Lars Höglund, Uppsala, SE. Flere andre sendte også inn løsningsforslag, men bommet på det riktige svaret.

Erratum. I løsningen av oppgave 408 i hefte 2 har det sneket seg inn en trykkfeil i ligning (5), der det har kommet til å stå 41 i stedet for 45. Den korrekte listen i (5) skal altså være $a_i = (0, 2, 14, 21, 29, 32, 45, 49, 54, 55)$.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 15. august 2004. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.