Bøker

Nail H. Ibragimov:
Modern gruppanalys. En innledning till Lies lösningsmetoder av ickelinjära differentialekvationer.
Studentlitteratur, Lund 2002.
ISBN 91–44–02430–4.

Symmetribegrepet spelar ei fundamental rolle i moderne matematikk. Det matematiske vertøy som uttrykker symmetrieigenskapar er tradisjonelt sett gruppeteori, og har sitt opphav i Galoisteorien og studiet av algebraiske likningar tidleg på 1800-talet. Den sentrale ideen er at løysingsproblematikken for ei algebraisk likning kan omformast til eit studium av symmetrigruppa, som i siste instans avgjer om likninga kan løysast ved algebraiske operasjonar og dessutan gir oss ein løysingsprosedyre i slike tilfelle.

Den klassiske mekanikken er i første rekkje basert på fundamentale prinsipp formulert av Galilei og Newton, og den har dominert utviklinga av naturvitenskapen og i stor grad også den matematiske analyse fram til det 20. hundreåret. Her har studiet av differensiallikningar spela ei sentral rolle. Ja, også Sophus Lie skreiv i 1895 at «teorien for differensiallikningar er den viktigaste disiplinen i den moderne matematikken». Sophus Lie grunnla i 1870-åra sin teori om dei såkalla kontinuerlege grupper, motivert av ideen om å utvikle ein systematisk teori og løysingsmetode i analogi med Galois-teorien for algebraiske likningar. Dermed innførte han symmetribegrepet for første gong i disiplinen matematisk analyse, og han utvikla sine symmetrimetodar parallelt med teorien om dei kontinuerlege grupper. Som eit direkte resultat av dette ser vi idag at den klassiske mekanikk, så vel som nyare tids fysikk, er gjennomsyra av diverse symmetri-prinsipp som manifesterer seg gjennom symmetrigrupper.

Gruppene på 1800-talet er eigentleg transformasjonsgrupper, men det abstrakte gruppebegrep utvikla seg kring hundreårskiftet og Lies underliggande gruppebegrep førte til teorien om Lie-grupper og Lie-algebraer, med alle sine anvendelser i moderne matematikk og fysikk, ofte langt frå sitt historiske opphav. Ja, Sophus Lies originale idear for å løyse differensiallikningar gjekk etterkvart i gløymeboka etter Lies død i 1899. Det er fleire grunnar til dette, men ei viktig årsak er at medoden tradisjonelt går ut på å finne analytiske (eksakte) løysingar, som viste seg å stille store krav til rekneressursar og difor er vanskeleg å gjennomføre for hand.

Men metoden fekk likevel sin renessanse eit halvt hundreår seinare, først ved G. Birkhoff sitt studium av fluiddynamiske differensiallikningar, og ved Ovsiannikov og hans skole i Sovjetunionen som i 1950 åra starta eit systematisk program i utviklinga og anvendelse av Lies idear. Etterkvart har vi også fått store datamaskiner og moderne computeralgebrasystem som også har framskunda utviklinga og revolusjonert bruken av symmetrimetodar, slik at vi i dag har ein blomstrande internasjonal «industri» innan disiplinen gruppeanalyse av differensiallikningar. I dei seinare år har såleis leiande computeralgebrasystem så som Maple og Mathematika implementert Lie-symmetrimetodar som ein del av standardprogrampakken.

Likevel, til dags dato har det vore problematisk å finne lærebøker i differensiallikningar der gruppeanalyse er eit sentralt tema, med øvingsoppgåver/prosjekt som gjer den velegna til eit kurs på Bachelor- eller Mastergrads nivå. Den pedagogisk utfordringa er å belyse symmetribegrepet og dei praktiske konsekvensane utan å trekke inn for mykje teori. Men symmetrimetodar vil også tene som eit generelt forklaringsprinsipp, som ei motvekt til den tradisjonelle «kokeboka» eller «bag of tricks». Det er difor interessant og gledeleg at Ibragimov, som den første i Skandinavia, har gitt ut ei lærebok i moderne gruppeanalyse på eit nordisk språk. Forfattaren er professor ved Blekinge Tekniska Högskola, og han har i mange år hatt ei internasjonalt leiande rolle innan moderne Lie-gruppe analyse av differensiallikningar. Læreboka [1] frå 1989 er på russisk, og er basert på forelesningar gitt ved universitet i Moskva, medan etterfølgaren [2] er ein omarbeidd og utvida engelsk versjon. Den nye og svenske utgåva frå 2002, som er ei modifisert oversetting av [2], har også eit nytt første kapittel som gir ei kort innføring i den basale teorien for første ordens lineære partielle differensiallikningar. Boka har i alt 8 kapittel som dekkjer det meir tradisjonelle stoffet, men med to unntak. Det eine spesielle er Sophus Lies ikkje-lineære superposisjonsprinsipp i kapittel 5, gyldig når likninga har ei bestemt generalisert form for separasjon av variable. Det andre er nyare tids anvendelser innan finansmatematikk (jfr. Black–Scholes likninga) i siste kapittel. Det er dessutan fint at forfattaren gir mange eksempel for å konkretisere, og i tillegg har boka fine øvingsoppgåver for den interesserte student.

Som ein liten smakebit til slutt, la oss belyse Sophus Lies symmetribegrep for differensiallikningar og anvende gruppeanalysen på ei første ordens ordinær likning på normalform

$$\text{(i)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

eller

$$\text{(ii)} \qquad P dx + Q dy = 0.$$

Faktisk finst det den dag idag ingen generell metode som løyser alle slike likningar. Det er altså nødvendig med «tilleggsinformasjon» i kvart enkelt tilfelle. Lies observasjon er at likninga i hovudsak er karakterisert av alle sine løysingar, nemleg funksjonar $y(x)$ i tilfelle (i), eller meir generelt kurver i xy-planet i tilfelle (ii). Vi kan difor uttrykke løysingsmengda som ein 1-parameter familie $\Phi(x, y; C) = 0$ av kurver, der C er ein integrasjonskonstant. Omvendt så vil ein gitt 1-parameter kurvefamilie, ved implisitt derivasjon og eliminasjon av C, gi oss ei 1. ordens differensiallikning med denne familien som løysingar.

Ved kontinuerleg variasjon av C glir ei gitt kurve i familien over i ei anna kurve i familien. Men på den andre side finst det også transformasjonar $T\colon (x, y) \mapsto (x', y')$ av xy-planet som avbildar kurvefamilien inn i seg sjølv – det er slike transformasjonar vi kallar ein *symmetri.* I analogi med Galoisteorien skulle altså kjennskap til ei tilstrekkeleg stor gruppe av symmetriar gi oss ein metode for å finne løysingane? Hausten 1873 gjorde Lie ei stor oppdaging i denne retning.

Lie hadde teke fatt på sitt omfattande studium av kontinuerlege grupper $G = \{T_a\}$ av transformasjonar med r parametrar $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Men først oppdaga han at 1-parametergrupper kan omformast, ved variabelskifte og reparametrisering, til den kanoniske forma T_t slik at $T_s + T_t = T_{s+t}$ og $T_0 = \mathrm{Id}$ er oppfylt. Det er nettopp slike 1-parametergrupper, med $T_t = \exp(tX)$, som oppstår ved integrasjon av eit dynamisk system svarande til eit gitt vektorfelt $X = (R, S) = R\mathbf{i} + S\mathbf{j}$, der funksjonane R og S er x- og y-komponentane.

Då vil integralkurva som ved tidspunktet $t = 0$ går gjennom punktet p vere gitt ved $t \mapsto (t, p) = T_t(p)$.

Ved å omskrive differensiallikninga (ii) ovanfor som eit dynamisk system

$$\frac{dx}{dt} = Q, \quad \frac{dy}{dt} = -P$$

med vektorfelt $A = (Q, -P)$ ser vi at integralkurvene $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ faktisk er kurvene i vår familie $\Phi(x, y; C) = 0$. Sophus Lie fann hausten 1873 kriteriet for at ei 1-parameter gruppe $\{\exp(tX)\}$ er ei symmetrigruppe for differensiallikninga med vektorfelt A, nemleg at kommutator-relasjonen

$$[X, A] = XA - AX = \lambda(x, y)A$$

er oppfylt for ein passande funksjon λ. Som ein konsekvens av denne relasjonen kunne han skrive opp formelen

$$K = \frac{1}{QS + PR}$$

for ein integrerande faktor (også kalla Euler multiplikator) til differensiallikninga (ii). Med dette meiner vi at multiplikasjon med K gir ei eksakt likning

$$K(P\,dx + Q\,dy) = dF = 0$$

der funksjonen F kan finnast ved kvadratur. Dermed må vår søkte kurvefamilie $\Phi(x, y; C) = 0$ vere lik familien av nivåkurver $F(x, y) =$ konst til funksjonen F som vi nettopp fann.

Kommutatorproduktet $[X, Y]$ ovanfor spelar ei sentral rolle i Lies teori om kontinuerlege gruppe og deira struktur, men her skal vi ikkje gå nærmare inn på dette og viser heller til tidlegare artiklar [3]–[5] i Normat.

Referansar

[1] Nail H. Ibragimov, *Primer of the Group Analysis* (på russisk). Moskva: Znanie, No.8 (1989).
[2] ——, *Introduction to modern group analysis.* Ufa: Tay, 2000.
[3] Eldar Straume, Sophus Lie – eit tverrsnitt av hans liv og arbeid. *Normat* **32**, 97–110 (1984).
[4] ——, Lies kontinuerlige og infinitesimale grupper. *Normat* **40**, 160–170 (1992).
[5] ——, Sophus Lie og differensialligninger. *Normat* **40**, 171–179 (1992).

Eldar Straume