Arabernes matematikk 1*

Audun Holme

Matematisk institutt
Johs. Brunsgate 12
Universitetet i Bergen
NO–5008 Bergen
holme@mi.uib.no

Innledning

Når vi taler om arabernes matematikk skal vi være klar over at mennesker med mange ulike etniske bakgrunner tok del i den. Men språket som ble brukt var arabisk. Etter sammenbruddet i det vestromerske riket og Bysants' langsomme tilbakegang og stagnasjon, ble vitenskap og filosofi fortsatt dyrket av araberne. De første erobringene etter Muhammad ga dem tilgang til denne kulturskatten, som de tok godt vare på. De sørget for oversettelser av mange klassiske verker til arabisk. Arabiske handelsmenn og andre reisende kom i kontakt med India og Kina, og de lærde var høyt ansett, ikke minst i Syd-Spania. Deres legevitenskap lå langt foran den europeiske.

Arabernes astronomi var den fremste i verden; disse astronomene konstruerte og brukte astrolaber med stor dyktighet. De hadde utarbeidet stjernekart, og dette har vi tydelige vitnesbyrd om den dag i dag: Våre navn på stjernebilder og planetene stammer nok fra latin, men navnene på de viktigste *stjernene* er arabiske: *Altair, Deneb, Rigel, Sirius, Aldebaran, Betelgeuse.* Det samme gjelder mange av de astronomiske begrepene: *Asimut, almanakk, sodiak.*

Araberne nådde langt i utviklingen av tallsystem, tallregning og algebra. Tallene, slik vi skriver dem, kommer via araberne fra Kina og India. Begrepet og symbolet for *null* ble også formidlet til oss fra araberne. Ordene *algebra* og *algoritme* stammer fra arabernes arbeid, og er forvanskninger som skyldes misforståelser av uvitende europeere. Fra Kina hadde de tatt opp *kulerammen*, som de brukte med stor dyktighet.

*Artikkelen er av plasshensyn delt i to deler. Den andre delen kommer i neste nummer av Normat.

Det er en utbredt oppfatning at arabernes innsats besto i at de tok vare på vitenskap og kultur i den «mørke middelalderen»; de var kulturbevarere og budbringere, og uten dem hadde renessansen i Europa kommet mye senere. Slik finner en gjerne arabernes rolle i matematikkens historie beskrevet i vestlig litteratur.

Mot denne fremstillingen hever det seg en annen oppfatning. Ifølge den blir arabernes innsats grovt undervurdert ved en slik fremstilling. Dessverre har det i altfor stor grad vært slik at matematikkens historie, ja all vitenskapshistorie, har vært fiksert på *Europa*. Dette har ikke bare gått ut over araberne. *Babylonernes* innsats var lenge ukjent. Det ble sett på som noe uforklarlig, nesten et mystisk under, at gresk matematikk så hurtig, på noen få hundre år, utviklet seg fra de spede begynnelser hos Tales fra Miletos til de senere pytagoreernes omfattende og dype innsikter. Men da de babylonske leirtavlene ble tydet først på 1900-tallet kom det for dagen at grekerne bygde på en bred og solid matematisk tradisjon, som ikke bare stammet fra Egypt, men ikke minst var forankret i den sumerisk-akkadisk-babylonske sivilisasjonen. Den hadde blomstret i det en gjerne kaller *sivilisasjonens vugge*, som var området mellom elvene Eufrates og Tigris i dagens Irak.

Den eminente matematikkhistorikeren *Roshdi Rashed* tar i [9] og i [10] et oppgjør med den behandlingen arabernes matematiske innsats har fått i vår vestlige historie og i våre vestlige lærebøker. Han karakteriserer det bildet som tegnes av arabisk vitenskap på denne måten [9], side 333:

> . . . et museum for arven fra grekerne, forbedret med enkelte tekniske nyskapninger, og formidlet intakt til de rettmessige arvtagere av den klassiske vitenskapen.

Ja, *de rettmessige arvtagerne*, europeerne, ble dessuten gitt æren for svært mange av de vesentlige oppdagelsene som de arabiske matematikerne fant! Denne velvillige men litt nedlatende holdningen uttrykker altså dette: Araberne bevarte arven fra grekerne gjennom de «mørke århundrene» til forholdene igjen lå til rette for en gjenfødelse av den klassiske sivilisasjonen i Europa. Så langt fra å være en anerkjennelse er dette en nedtoning av den originale arabiske innsatsen i matematikken!

Det er tankevekkende at det fortsatt er kontroversielt å peke på dette. Det er også viktig å understreke et annet av Rasheds poenger: Nemlig at det blir galt å knytte matematikkhistorien til religion, folkeslag eller politisk historie. Bør en ikke heller se hele middelhavsområdet som en fruktbar arena der matematikken utviklet seg?

Denne artikkelen er primært basert på mine to bøker [4] og [6] og kildene brukt der, også min bok om geometrien og dens historie [5] er en kilde. For ytterligere kilder viser jeg til litteraturlisten i denne artikkelen og til de tre bøkene omtalt ovenfor, der detaljerte henvisninger til de mer primære kildene blir gitt. Av disse kildene må jeg, foruten de siterte bøkene av R. Rashed, spesielt fremheve [8] og [13].

Portrettskissene er utført av meg selv; de er basert på vel kjente bilder som en for eksempel kan finne i [8] og i [13]. Jeg kan selvsagt ikke innestå for den eventuelle portrettlikheten med de historiske personene.

Bergen, januar 2004
Audun Holme

1 Visdommens Hus i Bagdad

I 789 ble Harun al-Rashid eller *Harun den ortodokse* den femte kalifen i abbasidedynastiet, han ble da hersker over et rike som strakte seg fra Middelhavet til India. Han grunnla biblioteket i sin hovedstad Bagdad på slutten av 700-tallet. Han har stått som en strålende og generøs hersker for ettertiden, han er kalifen fra Tusen og en natt, og han samlet om seg diktere og lærde ved sitt hoff. Bagdad lå midt i det fruktbare Mesopotamia, ikke langt fra der byen *Babylon* en gang hadde ligget. Her samlet fortsatt de gamle handelsveiene seg, og de kulturelle røttene til fortiden eksisterte fremdeles.

Sønnen al-Mamun fortsatte å bygge ut biblioteket i Bagdad, det fikk etter hvert en lignende betydning til det tidligere biblioteket i Aleksandria. Han grunnla akademiet *Visdommens Hus*, og lot dessuten bygge astronomiske observatorier, der arabiske astronomer kunne videreføre tidligere tiders kunnskaper om stjernene og planetene.

Manuskripter ble samlet inn til biblioteket fra ulike akademier i Midtøsten, dit lærde fra Athen og Alexandria hadde reist da forholdene ble vanskelige. Blant disse fantes mange klassiske greske verker, de ble nå oversatt til arabisk. Ved Visdommens Hus ble dette arbeidet fortsatt, her ble dessuten tekster fra India og sikkert også Kina oversatt og studert. Og selvfølgelig tok dette vitenskapelige miljøet opp i seg de impulsene som fortsatt var til stede i området fra den gamle babylonske matematikken.

Katz peker i [8] på at i denne perioden av islamsk kultur ble *verdslig kunnskap* ikke satt i noen motsetning til tro og fromhet, men snarere sett på som en vei til å tilegne seg også den *hellige kunnskapen*.

2 Al-Khwarizmi

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi var av en familie som stammet fra Khwarizm, syd for Aralsjøen, som nå er en del av Usbekistan og Turkmenistan. Dette området har en omfattende historie, og har vært kjent under mange navn. Ett av dem er *Khorasan*, som i dag er navnet på den største provinsen i Iran. Den omfatter en del av det gamle Khwarizm. Han var en av de første lærde som arbeidet i Visdommens Hus i Bagdad.

Katz forteller i [8] at al-Khwarizmi også arbeidet som astrolog, og at han stilte kalifens horoskop og forsikret ham om et langt liv, at han skulle leve i femti år til. Men kalifen døde etter ti dager!

Al-Khwarizmi ble født i 780 i Bagdad, tre år før grunnleggeren av Visdommens Hus Harun al-Rashid ble kalif. Han døde i 850.

Som en del av sitt arbeid i Visdommens Hus utførte al-Khwarizmi oversettelser av de gamle greske matematiske skriftene. Han arbeidet også med original og banebrytende forskning innen geometri, algebra og astronomi. Al-Khwarizmis mest berømte verk har tittelen *Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-al-muqabala*, forkortet til *Hisab al-jabr wa-l-al-muqabala*. Den fulle tittelen kan oversettes til *Den kondenserte bok om regning (aritmetikk) ved al-jabr og al-muqabala.*

Dette er historiens første rene algebrabok. Faktisk er det slik at denne bokens tittel ga opphav til ordet *algebra*, for ordet *al-jabr* er blitt til vårt *algebra*. Al-jabr betyr egentlig noe slikt som å «sette sammen». Dermed ble det til at enkelte steder i middelalderen ble *algebraiker* brukt som betegnelse på en *barberer*. Det henger sammen med at barberen gjerne også var kirurg og spjelket benbrudd, altså var den som *satte sammen* benbrudd. Ordet *hisab* betyr regning eller aritmetikk, *muqabala* betyr gjenopprette eller balansere.

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

Vi skal forklare den rent matematiske betydningen av al-jabr og al-muqabala, utført med moderne symboler som al-Khwarizmi ikke benyttet.

Begrepene knytter seg til løsning av ligninger, og refererer til skritt i en løsningsalgoritme. Overgangen fra ligningen

$$8x + 5 = 9 - 2x$$

til

$$10x + 5 = 9$$

er en *al-jabr*, mens den videre overgangen til

$$10x = 4$$

er en *al-muqabala.*

Al-Khwarizmi har dessuten gitt opphav til et annet ord vi bruker daglig i matematikk og informatikk, nemlig ordet *algoritme*. Det er en forvanskning av navnet «al-Khwarizmi»: En sa noe slikt som: «Etter alkvarismi skal en gjøre det slik...», og etter hvert ble det til: «Etter algoritmen skal en ...». Al-Khwarizmi formulerer formålet med sin algebrabok på denne måten, gjengitt etter [13]:

> Den kjærlighet til vitenskap som Gud har utmerket de troendes leder Imam al-Mamun med, den elskverdighet og beskyttelse han viser overfor de lærde, den beredvillighet han viser i sin støtte i å kaste lys over det som ligger i mørke og i å fjerne det som er vanskelig, dette har ansporet meg til å sette sammen dette kortfattede arbeidet om regning med al-jabr og al-muqabala. Jeg innskrenker det til å forklare det som er lettest, men også mest nyttig, i regnekunsten.
>
> Dette er slikt som en hele tiden har bruk for når en skal fordele arv, sette opp testamenter eller fordele på annen måte. En trenger også disse kunnskapene når en skal føre rettssaker, eller i handel, i det hele tatt overalt når folk skal gjøre opp seg imellom. Dessuten må en bruke dette når en skal grave ut

> kanaler, eller måle opp jordstykker og eiendommer. Men også til geometriske problemer og mange andre oppdrag av forskjellige slag trenger en å beherske denne regnekunsten.
>
> Da jeg tenkte over hva folk søker etter når de bruker regnekunsten, kom jeg til at det alltid er et tall de ønsker å finne. Alle tall er satt sammen av enere: Hvert tall kan deles opp i enere. På denne måten kan tallene fra en til ti settes sammen slik at det neste tallet overstiger det forrige med en ener. Deretter kan tieren fordobles og tredobles og så videre, på sammen måten som eneren ble for tallene fra en til ti. Slik oppstår tyve, tredve, og så videre opp til hundre. Så fordobles og tredobles hundre til to hundre, tre hundre og så videre, til en får tidoblingen som er tusen. Slik kan en fortsette til den ytterste grense for opptelling.

Så al-Khwarizmi beskriver altså representasjonen av tall i *titallsystemet*. Han ville gi en praktisk regnebok, ikke en teoretisk avhandling. Likevel ville han *bevise* at de algebraiske prosedyrene han ga var riktige, og etter gresk mønster ga han disse bevisene i en geometrisk form. Men bevisene var ikke de *greske* bevisene, se for eksempel [8] side 244, de ser derimot ut til å følge et mønster fra babylonsk matematikk. For de prosedyrene som al-Khwarizmi ga, ligner på de regnemessige og geometriske metodene som vi finner på de babylonske matematiske leirtavlene. På samme måte som hos babylonerne finner en mange eksempler hos al-Khwarizmi, men i tillegg gir han detaljerte forklaringer på de metodene som brukes, og en detaljert klassifikasjon av de problemene som behandles. I Rasheds ord, [9] side 8: *Denne boken fremstår som kulminasjonen av tidligere virksomhet, men samtidig som noe radikalt nytt.*

Formuleringen «Da jeg tenkte over hva folk søker etter når de bruker regnekunsten, kom jeg til at det alltid er et tall de ønsker å finne» går direkte på hovedtemaet i hans algebrabok, nemlig å finne løsning av kvadratiske ligninger.

Størrelsene han arbeider med, er av *tre typer*: Kvadrater, røtter og tall, eller mer presist: *ukjent kvadrert, ukjent og tall.* Et kvadrat er, med våre betegnelser, x^2 og roten er x. Ett av problemene som al-Khwarizmi gir kan formuleres slik: *Et kvadrat er lik førti røtter fratrukket fire kvadrater.* Ved al-jabr omformes dette til *Fem kvadrater er lik førti røtter.* Problemet er dermed omformet til et spesialtilfelle av den første av de problemtypene han stiller opp:

(1) Kvadrater lik røtter, $ax^2 = bx$.

der den siste formuleringen er omskrivningen til våre symboler. På tilsvarende vis bruker han al-jabr og al-muqabala til å omforme alle problemer med størrelsene *kvadrater, røtter* og *tall* til dette eller ett av de grunnleggende problemene 2–6 nedenfor:

(2) Kvadrater lik tall, $ax^2 = c$.

(3) Røtter lik tall, $bx = c$.

(4) Kvadrater og røtter lik tall, $ax^2 + bx = c$.

(5) Kvadrater og tall lik røtter, $ax^2 + c = bx$.

(6) Røtter og tall lik kvadrater, $bx + c = ax^2$.

Men han går videre i det systematiske studiet av slike ligninger: Ved divisjon eller ved multiplikasjon reduserer han til det tilfellet at $a = 1$, som vi ville uttrykke det. Al-Khwarizmi gir altså en systematisk prosedyre, *en algoritme*, som reduserer enhver ligning der det inngår kvadrater, røtter og tall som vist ovenfor, til en av de seks *kanoniske formene*

1. Kvadrat lik røtter, $x^2 = bx$.
2. Kvadrat lik et tall, $x^2 = c$.
3. Rot lik et tall, $x = c$.
4. Kvadrat og røtter lik et tall, $x^2 + bx = c$.
5. Kvadrat og et tall lik røtter, $x^2 + c = bx$.
6. Kvadrat lik røtter og et tall, $x^2 = cx + c$.

Al-Khwarizmis løsning av de første tre typene er rett frem, og følger metoder som var vel etablert fra babylonernes og grekernes tid. For tilfelle 3 har vi løsningen allerede, tilfelle 1 gir selvsagt $x = b$, og tilfelle 2 innebærer at det må trekkes ut en kvadratrot.

Løsningen av 4, 5 og 6 gjør al-Khwarizmi ved å anvende en rendyrket *geometrisk algebra*. Noen mener at han bygger på Euklids elementer, mens andre hevder at han neppe kjente til dette verket. Men det er ikke usannsynlig at han kjente Euklids elementer, ikke minst i betraktning av det omfattende oversettingsarbeidet som pågikk i Visdommens Hus. På den annen side følger al-Khwarizmis beskrivelser av de algebraiske prosedyrene samme mønster som de gamle babylonske skriverne fulgte! Vi skal nå gjengi denne beskrivelsen, og følger [9], side 12. Vi skal først se hva han skriver om et konkret tilfelle av ligningstypen 4, nemlig

$$x^2 + 10x = 39:$$

> Hva er kvadratet som øket med 10 av sine egne røtter, blir 39? Regelen i dette problemet er at du deler røttene i to halvparter. I dette problemet er det 5, som multiplisert med seg selv er 25. Dette legger du til til 39, da har du 64. Kvadratroten av dette er 8, du trekker fra halvparten av røttene, altså 5, det blir 3 igjen, som er roten til kvadratet du søker, og kvadratet er 9.

Dette er en rent algebraisk fremgangsmåte, men formulert i ord istedenfor med symboler slik vi ville gjøre det. Denne løsningen ved *kompletteringen av kvadratet* uttrykker vi på denne måten:

$$\begin{gathered}
x^2 + 10x = 39 \\
x^2 + 10x + 5^2 = 39 + 25 = 64 \\
(x+5)^2 = 64 \\
x + 5 = 8 \\
x = 8 - 5 = 3 \\
x^2 = 3^2 = 9.
\end{gathered}$$

Med moderne symboler kan en si at al-Khwarizmi gir løsningen av annengradsligningen $x^2 + bx = c$ som

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2},$$

der formelen for løsningen uttrykkes med ord, og beviset for at formelen er riktig blir gitt i form av en geometrisk figur. Regneoperasjonene, *aritmetikken*, og figurene, altså *geometrien*, flyter nå sammen i den nye vitenskapen *algebra*. Som Rashed skriver i [9]: «At koeffisientene er gitte tall, endrer ikke det faktum at dette er generelle resonnementer.»

Al-Khwarizmis løsning av ligninger av type 5 er interessant, for her tar han et langt skritt videre i forhold til babylonsk og gresk matematikk. Med våre symboler et altså problemet å løse en ligning av typen

$$x^2 + c = bx,$$

og han gir løsningen i den formen som vi skriver slik:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Selvsagt forekommer det ingen slik *formel*, men al-Khwarizmi skriver at en

> ...får to løsninger ved at *halvparten av antall røtter* [altså $\frac{1}{2}b$], fratrekkes eller legges til roten av det en får når dette tallet multipliseres med seg selv og fratrekkes tallet som skal legges sammen med kvadratet [altså c]. Dersom halvparten av antall røtter multiplisert med seg selv [altså $(\frac{1}{2}b)^2$] er mindre enn dette tallet [altså c], da er oppgaven umulig. Men hvis produktet er like stort som tallet, da er svaret halvparten av antall røtter, uten at en må legge til eller trekke fra noe.

Hos al-Khwarizmi finner vi at ligninger ikke bare er noe som oppstår i arbeidet med å løse ulike praktiske geometri- eller regneproblemer, men *ligningene selv* er de objekter som studeres. Dermed er skrittet tatt fra aritmetikken til den nye vitenskapen *algebra*, og al-Khwarizmi fremstår som denne vitenskapens grunnlegger.

Al-Khwarizmi skrev også et verk om bruk av det vi i dag kaller det *indisk–arabiske* tallsystemet, altså bruken av sifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 og 0. Vi har bare en latinsk oversettelse av deler av dette verket; for eksempel mangler hans utregning av kvadratrøtter.

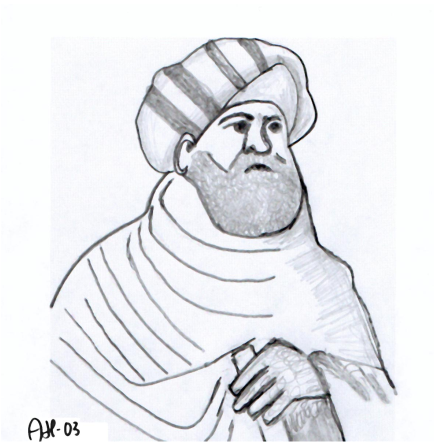
En annen matematiker som levde i tiden umiddelbart etter al-Khwarizmi er *Abd al-Hamid ibn Wasi ibn Turk al-Jili.* Vi vet nesten ingen ting om ham, og alt vi har fra ham er et eneste kapittel fra et større verk som også har tittelen *Kitab al-jabe wa'l muqabala.* Han analyserer løsningsmetoden fra al-Khwarizmi mer detaljert. Han beskriver også multiplikasjon av algebraiske uttrykk analogt til multiplikasjon av tall, og han behandler produkter av to tall der en eller begge faktorene er negative, og angir de rette fortegnene.

3 Ibn Qurra og Al-Battani

Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani kom fra Harran, syd i det nåværende Tyrkia, der han ble født i 826. Han døde i 901 i Bagdad.

Thabit tilhørte en religiøs sekt som dyrket *stjernene*. Som ung var han pengeveksler, etter det noen kilder vet å fortelle. Han skal imidlertid ha vært meget velstående, og kom fra en rik familie i området. Da lærde fra Visdommens Hus i Bagdad besøkte Harran, ble de imponert over denne ungdommens evner, og sørget for at han fikk komme til Bagdad der han studerte under deres ledelse.

I Bagdad fikk Thabit undervisning i matematikk, men også i medisin, noe som var vanlig i høyere arabisk utdanning på denne tiden. Sekten som Thabit kom fra hadde tidligere snakket *gresk*, og selv om de tok opp arabisk da de konverterte til islam, talte mange av dem fortsatt det greske språket flytende.



Thabit ibn Qurra al-Harrani.

Men Thabit kom fra et *syrisktalende* område. Denne språkmektigheten, sammen med hans førsteklasses matematiske kvaliteter, gjorde at han kom til å bli en sentral oversetter av de gamle greske matematikkverkene til arabisk. Blant disse verkene som ble oversatt var *Euklids Elementer*, dette verket var oversatt før Thabits tid, men ble revidert av ham. Det er denne reviderte oversettelsen som ligger til grunn for de senere arabiske versjonene av Euklids Elementer.

Thabit kjente Jamblikos' biografi av Pytagoras, derfor visste han at Pytagoras og pytagoreerne hadde vært interessert i *vennskapstall*. To tall er vennskapstall dersom det ene er lik summen av alle tall som går opp i det andre, bortsett fra tallet selv, og omvendt. Et eksempel som Jamblikos gir er tallene 220 og 284. Hvis et tall er vennskapelig med seg selv, kalles det et *perfekt* tall. Et *overskuddstall* er et tall der summen av alle de ekte divisorene er større enn tallet selv, og tilsvarende defineres et *underskuddstall*.

Både vennskapstall og perfekte tall spilte en betydelig rolle i arabernes tallteori. Og denne interessen starter med Thabit ibn Qurra, påpeker Rashed i [9], side 277. Thabit skriver: «Siden dette temaet har begynt å oppta meg, og siden jeg har funnet bevisene, vil jeg ikke skrive om disse reglene uten å gi fullstendige bevis...»

I studiet av vennskapstall benytter Thabit en *aritmetisk funksjon*, som i dag gjerne betegnes med $\sigma_0(n)$: Det er summen av de ekte divisorer $1 \leq d < n$ i det naturlige tallet n. Dette er en ny teknikk i tallteorien, og denne nye teknikken er kan hende vel så betydelig som objektene den brukes til å studere, nemlig parene av vennskapstall. Thabit beviser dette resultatet; vi gir et bevis i [6]:

La $n > 1$ være et helt tall, og la $p_n = 3 \cdot 2^n - 1$ og $q_n = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$. Dersom p_{n-1}, p_n og q_n er primtall, da er $a = 2^n \cdot p_{n-1} \cdot p_n$ og $b = 2^n \cdot q_n$ vennskapstall. a er et overskuddstall og b er et underskuddstall.

Som vi ser gir $n = 2$ paret 220, 284. $n = 3$ kan ikke brukes, mens $n = 4$ gir 17296, 18416. Thabit ibn Qurras teorem om vennskapstall ble som så mye annen arabisk matematikk forbigått da matematikken igjen begynte å bli dyrket i Europa. Dette teoremet ble tilskrevet Fermat og Descartes, inntil 1852 da det kom en fransk oversettelse av Thabit ibn Qurras arbeid.

Noen mener at Thabit var den første som fant paret av vennskapstall 17296, 18416; i alle tilfelle var dette allmenn felles kunnskap innen arabisk matematikk i hvert fall fra slutten av 1200-tallet, som det pekes på i [9], se spesielt note 1 side 330. Dette paret av vennskapstall tilskrives likevel fortsatt Fermat.

Thabit regnet med *forhold* mellom geometriske størrelser, analogt til regning med tall. På denne måten ble han en av pionerene eller forløperne for innføringen av de reelle tallene.

Thabit generaliserte det pytagoreiske teoremet til generelle trekanter, noe som var gjort tidligere av Pappos, og han arbeidet med vinkelens tredeling og *parabelens kvadratur.* Det siste er problemet med å finne arealet av et parabelsegment, noe som Arkimedes hadde vært opptatt av, og som har vært en del av motivasjonen bak fremveksten vår tids matematiske analyse. I arbeidet med parabelens kvadratur benytter Thabit metoder som kommer nær opp til våre dagers bestemte integrasjon.

Thabit brukte begrepet *bevegelse* i et geometrisk bevis, slik sett sto han for et annet syn enn det vi finner hos Platon og i gresk geometri ellers. Men slike tanker dukker opp hos Arkimedes og hos Arkytas, og er sentrale i Newtons mye senere oppdagelse av derivasjonsbegrepet i form av det han kalte *fluxioner.*

Abu Abdallah Mohammad Ibn Jabir Ibn Sinan al-Raqqi al-Harrani al-Sabi al-Battani ble født i 850 i Harran, akkurat som Thabit ibn Qurra, og døde i 929 i Qasr al-Jiss, i nåværende Irak. I vestlig litteratur finner vi ham med aliasene *Albategnius, Albategni* eller *Albatenius.*

Al-Battani gjorde meget nøyaktige astronomiske observasjoner, av solen, månen og planetene, nøyaktigere enn dem som er gitt av Ptolemaios i Almagest. Han var også opptatt av astrologi.

Al-Battanis viktigste arbeid er *Kitab al-Zij*, som inneholder 57 kapitler. Her beskriver han dyrekretsen på himmelen, og oppdelingen i grader. Den matematiske bakgrunnen blir gitt med regning i sekstitallsystemet. I tidlig arabisk trigonometri brukte en både *korden* til en vinkel, som Ptolemaios, og *den halve korden til den dobbelte vinkelen*, det vi kaller *sinus.* Hos al-Battani er det ikke sinus som brukes, han er den første som benytter seg av det vi kaller for *cosinus*, «sinus til komplementet» (til 90°): Med våre symboler blir det $\cos(x) = \sin(90° - x)$.

4 Abu Kamil og al-Baghdadi

Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja ble født i 850, muligens i Egypt, og døde 930. Han gikk også under navnet *al-Hasib al-Misri*, eller *Regnemesteren fra Egypt.*

Han var en av al-Khwarizmis umiddelbare etterfølgere, og han understreker at det var al-Khwarizmi som fant opp algebraen: «Det var han som først lyktes med en bok om algebra, han var pioneren som fant opp alle prinsippene i den.» Dette er det tydeligvis nødvendig å presisere, siden det har vært personer som har villet frata den store al-Khwarizmi denne æren. Abu Kamil skriver dette, sitert etter [9], note 3 på side 19: «I min andre bok har jeg etablert at autoriteten og prioriteten tilhører Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, og jeg har gitt svar til den freidige mannen Ibn Barza, som tilskriver dette til Abd al-Hamid, som han sier var hans bestefar.» Abu Kamil bygde på grunnlaget lagt av al-Khwarizmi, og står som et bindeledd til den meget betydelige matematikeren *Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji*.

I tillegg til denne rollen kommer det at mange, i likhet med Katz i [8], mener Abu Kamils arbeider er kilden for Leonardo fra Pisas svært innflytelsesrike bok *Liber Abaci*. Slik sett ble Abu Kamil av enorm betydning for matematikken i Europa senere.

Abu Kamils algebrabok består av tre deler: Første del er om løsning av kvadratiske ligninger, andre del handler om anvendelse av algebra på den regulære femkanten og den regulære tikanten, og den tredje delen er om diofantiske ligninger og om *underholdningsmatematikk*. I en annen bok behandler han ubestemte ligninger, Abu Kamil er den første arabiske matematikeren som løser problemer av samme type som vi finner hos Diofantos.

Abu Mansur ibn Tahir al-Baghdadi ble født i 980 i Bagdad og døde i 1037. Al-Baghdadi kalles også Ibn Tahir i litteraturen.

Han vokste opp i Bagdad, men fulgte så med sin far da han flyttet til Nishapur. Han skal først og fremst ha vært teolog, men han skrev i hvert fall to bøker om matematikk. Av disse er det *al-Takmila fi'l-Hisab* som har størst betydning.

Her behandler al-Baghdadi ulike regnemetoder. Han behandler *fingerregning*, regning i *sekstitallsystemet* og regning med de *indiske tallsymbolene*, og med brøk. Han behandler dessuten regning med *irrasjonale tall*, regning i handel og forretninger. Dette er en allsidig og omfattende innfallsvinkel til regning, og han vurderer fordelene ved de ulike metodene. Alle har sine fordeler, men han ser ut til å konkludere at de indiske tallsymbolene byr på de fleste fordelene.

Al-Takmila gir henvisninger til arbeider av al-Khwarizmi som nå er tapt, og slik kan en få holdepunkter for hva som sto i noen av disse tapte arbeidene.

I boken *Risala fi'l-maquadir wq'l mutabayana*, eller «Avhandling om kommensurable og inkommensurable størrelser», tar han utgangspunkt i Bok X av Euklids elementer som handler om dette temaet. Hos Euklid er det et fundamentalt skille mellom *tall* og *geometriske størrelser*. Al-Baghdadi etablerer forbindelsen mellom disse begrepene, og er slik med på å legge grunnen for vårt moderne tallbegrep. Han regner sikkert med irrasjonale størrelser, og er ikke lenger bundet til å regne med røtter av hele tall.

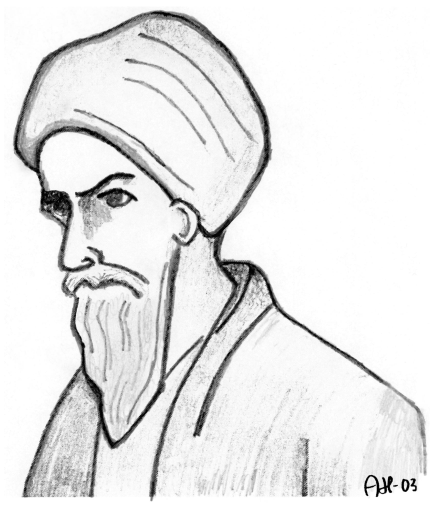
Al-Baghdadi arbeidet også med pytagoreernes *polygontall*, og de avledede *pyramidetallene* og mer generelt figurtall. For dette interessante temaet må vi henvise til [6].

5 Ibn al-Haytham, også kalt Alhazen

Abu Ali al-Hasan Ibn al-Haytham ble født i 965, sannsynligvis i byen *Basra*, dengang i Persia, nå i Irak. Han døde i 1040, etter alt å dømme i Kairo. I vestlig litteratur er han noen ganger gitt det forvanskede latiniserte navnet *Alhazen*. Ibn al-Haytham er en meget betydelig matematiker, mange av hans viktige oppdagelser og teknikker er senere blitt tilskrevet europeiske matematikere som Fermat, Descartes, Euler og andre av de store navn fra opplysningstidens matematikk.

Det finnes en selvbiografi av ham fra 1027, men her står det ikke noe om hans levnetsløp, derimot en hel del om hans vitenskap og åndelige utvikling. I Egypt hersket kalifene av fatimide-dynastiet på denne tiden. De har navn etter Fatima, profeten Muhammads datter, som dette dynastiet skal ha nedstammet fra. De hadde som målsetting å vinne makten i hele den islamske verden. Derfor anerkjente de ikke kalifene av abbasidedynastiet i Bagdad.

Fatimidekalifene etablerte seg i Nordafrika og på Sicilia tidlig på 900-tallet, og i 969 erobret de Nildalen og grunnla byen Kairo. Dette skjedde altså under Ibn al-Haythams barndom i Basra.



Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham.

I sin selvbiografi forteller han at han som ungdom tenkte mye over de ulike religiøse retningene som sto mot hverandre, og at han kom til at ingen av dem forvaltet Sannheten. Han utdannet seg for en stilling i kalifens administrasjonsapparat, men var særlig interessert i matematikk, naturvitenskap og filosofi. Han ble da også utnevnt til guvernør for Basra og omegn. I denne stillingen fortsatte han å arbeide med religiøse emner, men til slutt bestemte han seg for å gå helt over til naturvitenskap og matematikk. Han kastet seg nå over Aristoteles' skrifter, som han hadde tilgang til. Aristoteles' ideer holdt han fast på hele livet.

Etter at han trakk seg fra sin administrative stilling gikk det en del år før han dro til Egypt. I Basra hadde han imidlertid rukket å få en solid posisjon som en av de mest betydelige lærde, og i Kairo var kalifen interessert i matematikk og naturvitenskap; han het *al-Hakim bi-Amr Allah*, Hersker ved Guds vilje. Han var den andre av fatimidekalifene. Den første hadde vært hans far som het al-Aziz. Han var blitt kalif i 975 men døde i 996 mens han gjorde seg klar til krig mot Bysants. Al-Hakim var bare 11 år gammel da han etterfulgte sin far som kalif.

Al-Hakim var en brutal hersker, som ikke hadde noen skrupler med å rydde sine fiender av veien. Men samtidig var han en beskytter av vitenskap og kultur, og samlet om seg mange betydelige matematikere og astronomer. En medvirkende årsak til dette kan også ha vært hans store interesse for astrologi. Al-Hakim skal ha vært temmelig lunefull, det sies at han beordret en by brent ned uten noen fornuftig grunn. Og siden han ikke likte å høre på hundeglam lot han alle hunder innen rekkevidde drepe, og han forbød visse grønnsaker og dessuten skjell! Men han hadde astronomiske instrumenter i sin residens, og samlet et betydelig bibliotek som bare sto tilbake for biblioteket i Bagdad, i Visdommens Hus 150 år tidligere.

Det fortelles at Ibn al-Haythams kontakt med al-Hakim skyldtes at Ibn al-Haytham hadde foreslått en plan for å regulere vannstanden i Nilen, og dette kom al-Hakim for øre. Han mente at det ville være en god idé, hvilket det selvsagt også var. En slik regulering av Nilen er i dag realisert ved Aswan-dammen, et enormt løft for Egypt som har hatt store og gunstige virkninger for hele samfunnet der. Al-Hakim ba altså Ibn al-Haytham om å komme til Egypt for å sette planene ut i livet. Al-Hakim utnevnte ham til prosjektleder for regulering av Nilen, og sendte ham i vei som leder for et team som reiste oppover elven for å ta situasjonen i øyesyn. Imidlertidig, etter som de reiste lenger og lenger oppover, ble Ibn al-Haytham mer og mer pessimistisk til prosjektet sitt. Til slutt kom han til den bedrøvelige konklusjonen at dette ikke lot seg gjøre med den teknologien han rådde over. Og det var nok riktig vurdert, i betraktning av at det skulle ta omtrent ett årtusen til før tiden var moden for å regulere Nilen!

Ibn al-Haytham returnerte altså med sitt team til al-Hakim og avla rapport om at prosjektet måtte skrinlegges. Den mektige oppdragsgiveren al-Hakim var ikke fornøyd, tvertimot temmelig skuffet og misfornøyd med Ibn al-Haythams mangelfulle kompetanse.

Nå har en ulike versjoner av hva som så hendte. En versjon går ut på at Ibn al-Haytham flyktet fra Kairo til Syria, der han tilbrakte resten av sitt liv. Men denne versjonen er ikke særlig troverdig, siden det synes å gå frem av Ibn al-Haythams egne skrifter at han fortsatt befant seg i Egypt. Noen mener at han bare besøkte Bagdad en kort tid, før han dro tilbake til Egypt. Han kan også ha besøkt Syria.

Den mest troverdige versjonen av det som videre skjedde er at Ibn al-Haytham fikk en administrativ stilling av kalif al-Hakim, og at han virket i denne jobben en tid. Men etter hvert innså han at han levde farlig; al-Hakim var en lunefull mann som ikke hadde tilgitt det skrinlagte prosjektet med Nilens regulering. Nå forteller historien at Ibn al-Haytham lot som om han hadde mistet forstanden, og dermed ble han holdt innesperret i sitt hus. Dette varte til al-Hakim døde i 1021. Eller rettere sagt, al-Hakim forsvant. Han dro avsted på en mystisk reise til al-Muqattam fjellene, og kom aldri tilbake. Under sin husarrest arbeidet Ibn al-Haytham videre med sin vitenskap, og etter at al-Hakim var borte kunne han altså vise at han ikke var gal, men hadde måttet simulere for å redde livet. Ibn al-Haytham bodde deretter resten av sitt liv nær al-Azhar Moskeen i Kairo, skrev sine matematiske tekster, underviste og kopierte vitenskapelige skrifter. Ibn al-Haytham har etterlatt seg omfattende skrifter, totalt visstnok hele 92 arbeider, og av disse er så mange som 55 bevart. Emnene inkluderer optikk, en teori for lys og en teori for syn, astronomi og matematikk.

Ibn al-Haytham løste problemer om *kongruensregning*. Kongruensregning utgjør en viktig del av tallteorien, og har sine røtter i kinesisk matematikk fra før 200-tallet e.Kr. Her benyttet han et resultat som vi i dag har gitt navn etter den britiske matematikeren *John Wilson* (1741–1793), nemlig at dersom p er et primtall, da vil p gå opp i tallet $1 + (p-1)! = 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-1)$. Dette resultatet ble ikke bevist av Wilson; han kom frem til det som en formodning ut fra mange eksempler. Det er *Lagrange* som vanligvis blir gitt æren av å ha funnet beviset for denne setningen. Dette forteller vi mer om i [6].

I likhet med Thabit Ibn Qurra har også Ibn al-Haytham arbeidet med perfekte tall. I Bok IX beviser Euklid denne setningen som Setning 36, gjengitt etter [3]:

> Hvis så mange tall som vi ønsker, begynnende med en enhet og fortsatt med fordobling inntil summen av dem alle er et primtall, og hvis vi gir et tall som denne summen multiplisert med det siste, da er dette tallet perfekt.

Så følger et bevis, som selvsagt er geometrisk. Siden vi med våre symboler har

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

kan vi reformulere Euklids setning IX.36 som

> Dersom $2^k - 1$ er et primtall, da er $2^{k-1}(2^k - 1)$ et perfekt tall.

Denne regelen kan vi selvsagt også formulere slik: Dersom tallet $N = 2^k - 1$ er et primtall, da er tallet $M = 1 + 2 + 3 + \cdots + N$ perfekt.

Ifølge [9], side 320 og følgende, formulerte Ibn al-Haytham dette resultatet med bevis. Han formulerte også en omvending, som han forsøkte å bevise, nemlig at alle perfekte tall er av denne typen. Det er fortsatt et åpent problem om denne omvendingen er riktig.

6 Al-Karaji og hans algebraiske skole

Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji ble født i 951 i Bagdad og døde i 1029. En vet praktisk talt intet om hans liv. Selv navnet er usikkert; noen gir det som *al-Karkhi*. Vi vet imidlertid at han levde og skrev mesteparten av sine verker i Bagdad på slutten av 900- og begynnelsen av 1000-tallet, og at han deretter forlot denne byen og dro til det området som araberne kalte «fjell-landene». Dette var Aserbajan, Nord-Irak, områder i Persia og fjellområder ved Kaspihavet. Her sluttet han å arbeide med matematikk. Isteden ofret han seg for ingeniøroppgaver av ulike slag.

Al-Karajis arbeid er viktig i matematikkens historie fordi algebraen nå tok en ny retning. Nå ble de aritmetiske operasjonene, som tidligere var reservert for kjente størrelser, også tatt i bruk for *ukjente* størrelser. Al-Karaji gir regler for addisjon, subtraksjon, og multiplikasjon for det han kaller «sammensatte størrelser», eller summer av monomer. Divisjon beskrives i det tilfelle at divisor er et monom. Han gir også en metode til å finne kvadratroten av en sammensatt størrelse som ikke trenger å være et fullstendig kvadrat, men han forutsetter at koeffisientene til de monomene som inngår er positive.

Al-Karaji bruker også en forløper for et moderne induksjonsbevis. Først beviser han påstanden for $n = 1$, så bruker han dette tilfellet til å bevise påstanden for $n = 2$, så bruker han tilfellet med $n = 2$ til å behandle tilfellet $n = 3$, og så videre et stykke oppigjennom. Omkring $n = 5$ er tiden moden til å trekke konklusjonen: Dette kan fortsettes i det uendelige, påstanden er dermed riktig for alle $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Al-Karaji bruker denne formen for induksjon til å bevise *binomialteoremet.* I boken *Al-Fakhri* regner han ut $(a + b)^3$ som $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, og i *Al-Badi* regner han tilsvarende ut $(a-b)^3$ som $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ og $(a+b)^4$ som $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Den generelle konstruksjonen av «Pascals triangel» ga han i et arbeid som er gått tapt, men som *al-Samawal*, en av hans etterfølgere som vi forteller om i neste avsnitt, gjengir. Al-Samawal skriver dette, sitert etter oversettelsen [1], gjengitt etter [13], som vi viser til for flere detaljer:

> La oss minne om prinsippet for å finne de tallene vi må multiplisere disse gradene med for et tall som er delt i to deler. Al-Karaji sa at for å lykkes må vi først plassere en ener i en tabell og en ener til under den første. Så må vi flytte den første eneren til en kolonne nummer to, og legge den første eneren til den eneren som står under den. Da får vi tallet «to», som vi setter under den eneren vi skrev i kolonne nummer to. Så setter vi den andre eneren i den første kolonnen under toeren i kolonne nummer to. Når vi flytter den første eneren i den andre søylen til en tredje søyle, så skal vi legge den første eneren i andre søyle til toeren under den, vi får «tre», som skal skrives under eneren i tredje søyle. Hvis vi så legger toeren fra andre søyle til eneren under den får vi «tre», så skriver vi «en» under denne treeren.

Slik fortsetter han opp til femte kolonne. Dette gir det såkalte «Pascals triangel» skrevet sidelengs som følger:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 3 & 6 & 10 \\ & & 1 & 4 & 10 \\ & & & 1 & 5 \\ & & & & 1 \end{array}$$

Al-Karaji viser at summen av de n første naturlige tallene er $n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n)$, og han ga summen av de første n kvadrattallene, og av de første n tredjepotensene.

De første fem bøkene av Diofantos' Aritmetika ble oversatt til arabisk av *ibn Liqa* rundt 870, og disse bøkene ble studert grundig av al-Karaji. Innflytelsen fra Diofantos kan en se tydelig, og han var opptatt av å videreutvikle og generalisere Diofantos' resultater. Fermat og al-Karaji var også på denne måten beslektede sjeler.

Selv om al-Karaji ga vesentlige bidrag til algebra og tallteori, som han i en viss forstand frigjorde fra geometrien, var han også opptatt av å utforske geometrien som sådan. Men dette skjedde ut fra en aktuell praktisk oppgave, nemlig i et arbeid om oppmåling og veiing av bygninger og andre strukturer.

7 Al-Samawal og algebraens aritmisering

Ibn Yahya al-Maghribi Al-Samawal ble født i 1130 i Bagdad, og døde i 1180 i Maragha i Persia. Al-Samawal var jøde, og kom fra en familie der kunnskap og kultur ble satt høyt. Han begynte tidlig å studere medisin og matematikk. Han lærte det indiske tallsystemet og de indiske regnemetodene, og arbeidet med astronomiske tabeller. På denne tiden var Bagdad ikke det fremragende matematikksenteret byen hadde vært tidligere, og al-Samawal hadde snart lært seg den matematikken som hans lærere kunne, nemlig grunnleggende landmåling, elementær algebra og de første fem bøkene av Euklids Elementer.

Al-Samawal var nå henvist til selvstudier, og han leste arbeidene til Abu Kamil, al-Karaji og andre verker som var tilgjengelige i Bagdad. Som attenåring skal han ha mestret så å si all den matematiske litteraturen som var tilgjengelig i Bagdad! Arbeidene til al-Karaji gjorde størst inntrykk på ham, og han begynte å arbeide med utfyllende kommentarer og forbedringer. Han skrev boken *Al-Bahir fi'l-jabr*, som er oversatt i [1]. Tittelen betyr «Den briljante i algebra». Da al-Samawal skrev denne boken, var han 19 år gammel. Boken er verdifull for oss i dag, ikke bare for de ideene til al-Samawal som den inneholder, men også fordi vi her får kjennskap til arbeider av al-Karaji som er gått tapt i originalen.

Arabiske matematikere før al-Samawal, ikke minst al-Karaji, hadde begynt det vi i dag kaller *algebraens aritmetisering*. Al-Samawal gir dette «programmet» denne presise beskrivelsen, sitert etter [13]:

> [Algebraikeren] opererer på ukjente størrelser med alle aritmetikkens teknikker, på samme måte som aritmetikeren opererer på kjente størrelser.

Al-Samawal utviklet med andre ord begrepet *polynomring*. I første bok av al-Bahir definerer han potensene $x, x^2, x^3, \ldots$ og $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots$ Han definerer polynomer, og beskriver addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Han gir også metoder for å trekke ut røtter av polynomer. Al-Samawal hadde en fullstendig forståelse av negative tall, noe som var en forutsetning for hans behandling av potenser av en ukjent størrelse. Han bruker også 0 i denne sammenhengen, og skriver dette, sitert etter [1]:

> Hvis vi trekker et positivt tall fra en tom potens, da er resten det samme negative tallet.

Med dette mente han at $0 - a = -a$. Og videre:

> Hvis vi trekker det negative tallet fra en tom potens, da er resten det samme tallet.

Her mener han tilsvarende at $0 - (-a) = a$.

Multiplikasjon med negative tall behersket han også:

> Produktet av et negativt tall med et positivt tall er negativt, og med et negativt er positivt.

I Bok 2 av al-Bahir behandler han annengradsligninger geometrisk, et litt forbausende tilbakeskritt i forhold til sine store forløpere som for eksempel al-Khwarizmi og al-Karaji.

R. Rashed omtaler, i [9], side 89 og følgende og i note 8 på side 143, et uhyre viktig arbeid av al-Samawal som han fullførte i 1172, 8 år før sin død. Boken har tittelen *al-Qiwami fi al-Hisab al-Hindi,* eller *Avhandling om aritmetikk.* Denne boken er bare delvis bevart, i dag kjenner en bare et fragment med en misvisende tittel. Likevel kan en trekke den krystallklare konklusjonen at al-Samawal i 1172 var i besittelse av den såkalte «Horner–Ruffinis metode».

8 Omar al-Khayyami

Omar al-Khayyami ble født 1048 og døde i 1131 i Nishapur, Persia. Katz forteller denne anekdoten i boken [8]. Da han var ung student, sluttet al-Khayyami en pakt med to andre studenter, *Nizam al-Mulk* og *Hassan ibn Sabbah*, om at den av dem som som først fikk en høy stilling, skulle hjelpe de to andre. Det var Nizam som ble den heldige, han steg i gradene og ble *vesir* eller statsminister for den seljukiske sultanen *Jalal al-Din.* Han oppfylte sitt løfte, og Hassan ble utnevnt til kammerherre ved sultanens palass.

Men Hassan var utakknemlig, og viste seg som en dårlig venn. For han begynte å baktale sin velgjører hos sultanen, og forsøkte å overta Nizams høye stilling. Dette gikk ille for Hassan, og han ble forvist fra hoffet. Men al-Khayyami avslo tilbudet om en høy stilling, og ba isteden om å få en beskjeden fast lønn, slik at han kunne studere matematikk og andre vitenskaper, og dyrke sin poesi.

Al-Khayyamis liv ble preget av de politiske begivenhetene, i likhet med det mange andre matematikere har fått erfare gjennom tidene. Sultanen for de seljukiske tyrkerne Toghril Beg holdt sitt inntog i Bagdad i 1055. Dette var en urolig brytningstid, med politisk og religiøs strid. Al-Khayyami var ikke bare matematiker, men også *poet* og *filosof* i Aristoteles' tradisjon. Da han var student ble han ansett som svært begavet, men han klager over de dårlige forholdene for studier og vitenskap. Han skrev dette om sin situasjon, ifølge [2]:

> Jeg kunne ikke vie meg nok til studiet av denne algebraen, og konsentrere meg om den, fordi jeg ble forhindret av tidens lunefullhet. For vi har mistet våre lærde, bortsett fra en fåtallig gruppe som med mange vanskeligheter forsøker å finne litt anledning, i roligere øyeblikk, til å arbeide med sin vitenskap. Det store flertall later som om de er filosofer, og forveksler sannhet med det motsatte! Alt de driver med er narrespill. De later som om de har kunnskap som de ikke har i virkeligheten. Og den kunnskapen de har bruker de bare til materielle og nederdrektige ting. Og når de treffer på et menneske som søker sannheten, og gjør sitt beste for å tilbakevise usannhet og løgn, og som bekjemper hykleri og svindel, da gjør de bare narr av ham!

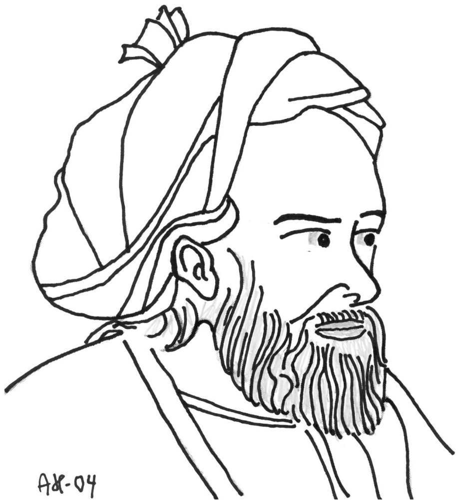
Al-Khayyami er kjent både som en fremragende astronom og matematiker. Han var en av åtte *vise menn* som sto bak en kalenderreform av den gamle persiske tidsregningen, som trådte i kraft i 1079. Denne kalenderen var svært nøyaktig, men den ble senere erstattet av den muslimske kalenderen. Som matematiker er han mest kjent for sitt verk om tredjegradsligninger, *Avhandling om løsning av problemer ved al-jabr og al-muqabala.*

Denne boken ble skrevet i Samarkand i Usbakistan, dit han hadde flyttet i 1070. Her hadde han gode arbeidsforhold, han ble støttet av Samarkands øverste jurist, *Abu Tahir.*

Toghril Beg, som grunnla det seljukiske dynastiet, hadde gjort Isfahan til sin hovedstad. Kort tid etter at *Melik Shah*, hans sønnesønn, var blitt sultan i 1073, flyttet al-Khayyami igjen, denne gangen til Isfahan etter invitasjon fra den nye sultanen, for å lede det astronomiske observatoriet. Isfahan var den gangen en praktfull by. Den skal ha hatt så mange som en million innbyggere.

Her ble han i 18 år, og det var i denne tiden han deltok i utarbeidelsen av kalenderreformen omtalt ovenfor. Under Melik Shah og hans opplyste *vezir* eller statsminister *Nizam al-Mulk*, som vi allerede har hørt om, opplevde Persia en blomstringstid, der det blant annet ble opprettet flere nye universiteter.

Men det var urolige tider. Fra borgen *Alamut* i Elburz-fjellene sendte *Hassan Sabbah*, lederen for de såkalte *Assassinerne* ut geriljagrupper mot fyrster og andre fremstående personer. I 1092 ble veziren drept under en reise til Bagdad, og Melik Shah døde kort tid etter. Han ble etterfulgt som hersker av en sønn ved navn *Barkiaruk*, som imidlertid viste seg svak, og ikke kunne forhindre at hans regjeringstid ble dominert av sammensvergelser og indre strid.



Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami.

Al-Khayyamis arbeidsforhold ble nå adskillig vanskeligere, ikke minst fordi hans studiekamerat og venn veziren nå var borte. Observatoriet fikk ingen penger mer, og han ble angrepet av rettroende muslimer for fritenkeri. Han fortsatte likevel å arbeide, og skrev positivt om de tidligere herskerne i Persia. Men i 1105 kom en bror av Barkiaruk ved navn *Muhammed* til makten, han gjorde slutt på indre strid og uro med, som det heter, *kraft og grusomhet.*

I 1118 kom så en tredje bror, *Sanjar* til makten. Han flyttet hovedstaden til *Merv*, og dit dro al-Khayyami ikke lenge etterpå. Der opprettet Sanjar et senter for islamsk vitenskap og kultur, og al-Khayyami arbeidet her i noen år. Han døde i 1131 i Nishapur, der han er gravlagt i et mausoleum som fortsatt eksisterer.

Avhandling om løsning av problemer ved al-jabr og al-muqabala handler om løsning av tredjegradsligninger. Motivet for arbeidet var å gi algoritmer for løsning av tredjegradsligninger, analoge til de tre algoritmene som Khwarizmi hadde angitt for de tre typene av ligninger av grad 2. Men han må konstatere at «Hverken vi eller andre som arbeider med algebra har vært i stand til å gjøre dette. Kan hende noen som kommer etter oss vil klare det.»

Han ga imidlertid en fullstendig klassifisering av tredjegradsligninger, med geometriske løsninger funnet ved skjæringspunkter mellom kjeglesnitt.

Al-Khayyami arbeidet bare med positive tall. Derfor måtte han føre opp separat de ulike tredjegradsligningene som kunne ha positive røtter. Av disse var det 14 ulike typer som ikke kunne reduseres til lineære eller kvadratiske ligninger. Han samlet disse i tre grupper. Vi gjengir standard former for disse gruppene i vår moderne algebraiske notasjon, og tar utgangspunkt i den vanlige skrivemåten for en ligning av grad 3 som

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

slik at koeffisienten for tredjegradsleddet er $a \neq 0$ så vi kan ta $a = 1$, siden det virkelig skal være en ligning av grad 3, for annengradsleddet er koeffisienten betegnet med b, osv. Men vi skal bare operere med positive tall, og da må de negative leddene flyttes fra venstre side til til høyre side av likhetstegnet, og da som positive ledd.

Den første gruppen består av en ligning med to ledd:

$$x^3 = d$$

Så er det en gruppe med med seks ligninger, hver med tre ledd:

$$\begin{gathered}
x^3 + cx = d \\
x^3 + d = cx \\
x^3 = cx + d \\
x^3 + bx^2 = d \\
x^3 + d = bx^2 \\
x^3 = bx^2 + d
\end{gathered}$$

Den tredje og siste gruppen har syv ligninger med fire ledd:

$$\begin{gathered}
x^3 + bx^2 + cx = d \\
x^3 + bx^2 + d = cx \\
x^3 + cx + d = bx^2 \\
x^3 = bx^2 + cx + d \\
x^3 + bx^2 = cx + d \\
x^3 + cx = bx^2 + d \\
x^3 + d = bx^2 + cx
\end{gathered}$$

Det er klart at vi nå har alle muligheter for ligninger av grad 3, der koeffisientene alle skal være positive tall. Her er ligningene gitt med vår moderne algebraiske notasjon. Det gjør det enklere for oss å forstå hva al-Khayyami gjorde rent matematisk, men blir litt misvisende historisk. Den første ligningen formulerte al-Khayyami for eksempel slik:

Et tall lik en kube,

mens den andre ligningen ble presentert ved

Et tall lik kube og sider.

I alle 14 tilfellene viser al-Khayyami hvorledes en kan konstruere løsninger ved hjelp av kjeglesnitt. Løsning av den første av disse ligningene består jo i å trekke ut kubikkroten. Denne konstruksjonen er umulig med passer og linjal, og dette uløselige problemet med $d = 2$ er jo kjent som *Problemet om kubens fordobling.* Greske geometere ble imidlertid nokså fort klar over at problemet lar seg løse dersom en benytter kjeglesnitt, og ikke bare rette linjer og sirkler på den foreskrevne måten i en euklidsk konstruksjon. For detaljer om dette viser vi til [4], [5] og [6].

Hans arbeid ble videreført av andre arabiske matematikere, ikke minst Sharaf al-Din, som utviklet videre den algebraen som er nødvendig for å finne formelen for løsningen til den generelle tredjegradsligningen. Dette skal vi gå nærmere inn på i det neste avsnittet.

Al-Khayyami refererer til et verk som er gått tapt. I dette verket har han etter det vi forstår benyttet binomialkoeffisientene etter Pascals trekant, og han har brukt dem i en metode til å finne n-te røtter.

Hans andre hovedverk er kommentarer til Euklid, med tittel «Forklaring av vanskelighetene i Euklids postulater». Her drøfter han Eudoxos' teori for *forhold*, slik den er fremstilt i Bok 10 av Euklids Elementer. al-Khayyami behandler slike forhold som tall, slik at han for eksempel opererer med forholdet mellom en diagonal og en side i et kvadrat som et *tall*, nemlig det irrasjonale tallet som vi betegner med $\sqrt{2}$, eller forholdet mellom omkrets og diagonal i en sirkel, som blir det reelle tallet vi betegner med π. Slik kan en si at al-Khayyami på en stringent måte innførte de *positive reelle tallene*, lenge før dette ble fullført i Europa gjennom Dedekinds arbeid. Grekerne hadde ikke betraktet forhold som tall. Men selv om al-Khayyami behandler forhold som tall, så hevder han ikke at de *er tall,* selv om han reiser spørsmålet.

Et annet viktig poeng som al-Khayyami bidro med i utviklingen av det moderne tallbegrepet, var at han beviste at de to definisjonene av forhold som vi finner hos grekerne er ekvivalente: Eudoxos' definisjon er ekvivalent med definisjonen en tilskriver Aristoteles, nemlig at de to størrelsene har samme *antanairesis.* Vi minner om at for inkommensurable størrelser leder den siste definisjonen til en utvikling i *kjedebrøk*; se [4] for detaljer om dette.

I sine kommentarer til Euklid forsøkte al-Khayyami også å bevise Euklids Femte Postulat. Han definerte to linjer som parallelle dersom de overalt hadde *samme avstand*, altså i motsetning til egenskapen at de ikke skjærer hverandre. Dette arbeidet med å bevise det femte postulatet lyktes ikke, selvsagt siden vi nå vet at det finnes geometriske systemer der det femte postulatet ikke gjelder, men de øvrige fire av Euklids postulater holder, nemlig de såkalte *ikke-euklidske geometriene.* Men under arbeidet med dette umulige prosjektet fant han resultater som vi i dag ser som de første teoremene i ikke-euklidsk geometri. Slik ble han en forløper for de senere oppdagerne av disse geometriene, *Bolai og Lobachevski.*

Al-Khayyami var på alle måter en fremragende representant for arabisk åndsliv. Som poet har han satt dype spor etter seg, og som filosof var han også betydelig. Al-Khayyami er blitt kalt *Persias Voltaire*, men kan hende det hadde vært mer passende å kalle Voltaire for *Frankrikes Khayyami.*

Referanser

[1] S. Ahmad og R. Rashed (ed.) *"Al-Bahir" en algèbre d'Al-Samaw'al.* Damascus, 1972.

[2] C. C. Gillispie *The Dictionary of Scientific Biography.* 16 bind, 2 suppl. Charles Scribner's Sons, New York 1979–1990.

[3] T. L. Heath. *Euclid: The thirteen books of the Elements.* Translated from the text of Heiberg. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. 3 bind. Dover Publications, New York 1956.

[4] A. Holme. *Matematikkens historie 1. Fra Babylon til mordet på Hypatia.* Fagbokforlaget, Bergen 2001.

[5] A. Holme. *Geometry. Our Cultural Heritage.* Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 2002.

[6] A. Holme. *Matematikkens historie 2. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel.* Fagbokforlaget, Bergen 2004.

[7] R. Jafariyan. *The Alleged Role of Khawajah Nasir al-Din al-Tusi in the Fall of Baghdad.* Artikkel i den iranske journalen Kayhan-e Andisheh, (No. 22). Tilgjengelig på `http://www.al-islam.org/al-tawhid/tusi/baghdad.htm`.

[8] V. J. Katz. *A History of Mathematics.* Harper Collins College Publishers, New York 1992.

[9] R. Rashed. *The development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra.* Kluver Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London. 1994.

[10] R. Rashed. *Al-Khayyam and Descartes on algebraic geometry.* Foredrag ved konferansen om arabisk matematikk arrangert av Norsk Matematikkråd og UNESCO-kommisjonen i Oslo 21-23 mai 2001. Foredragene er under samlet utgivelse i bokform.

[11] F. Rosen. *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Algebra.* London, Oriental Translation Fund 1831. Boken er i dag vanskelig å finne, men det foreligger en nyere oversettelse fra en latinsk oversettelse ved L. Karpinski, University of Michigan Press 1930.

[12] Sharaf al-Tusi. *Sharaf al-Din al-Tusi. Oeuvres Mathematiques.* Oversatt av R. Rashed. To bind. Paris 1986.

[13] University of St. Andrews. *The MacTutor History of Mathematics Archive.* `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`.