

Morleys hjerte – lek med et geometrisk teorem – del 2

Signe Holm Knudtzon[†] og Johan F. Aarnes[‡]

[†] Avdeling for lærerutdanning
Høgskolen i Vestfold
Boks 2243
NO–3103 Tønsberg
Signe.H.Knudtzon@hive.no

[‡] Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NO–7491 Trondheim
johana@math.ntnu.no

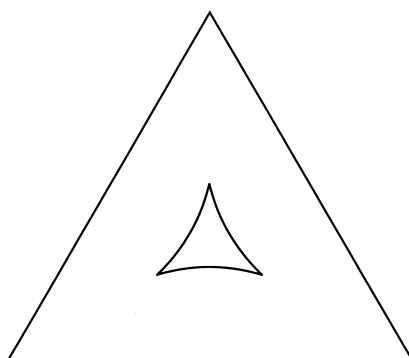
Innledning

I første del av denne artikkelen [2] diskuterte og beviste vi Morleys teorem og noen generaliseringer av denne berømte setningen. Vi så også på mønsteret som «Morley-trekantene» dannet, og at de på naturlig vis inngikk i et kjeglesnitt. I denne delen dukker også kjeglesnittene opp, men på en annen og uventet måte. Vi skal se at de danner det vi har kalt «Morleys hjerte». En interaktiv versjon av denne artikkelen finnes på nettstedet <http://shk.ans.hive.no/>.

Sentrum for innskrevet sirkel

Halverer vi vinklene A , B , C i en trekant ABC vil halveringslinjene møtes i ett punkt, senteret til den innskrevne sirkel. Det er klart at dette senteret ligger innenfor Morley-trekanten abc (for terminologi, presiseringer og Morleys teorem henviser vi til del 1 av denne artikkelen). Holder vi abc fast, men varierer tredelingsvinklene α , β , γ , så vil også trekanten ABC bevege seg. Det er lett å se at også senteret for den innskrevne sirkelen vil bevege seg, men det er ikke umiddelbart klart hvordan dette skjer, og innenfor hvilket område senteret vil ligge. Ved hjelp av dynamisk programvare, som for eksempel geometriprogrammet CABRI som vi har benyttet, er det imidlertid enkelt å *spore* senterets vandringer innenfor trekanten abc når

denne holdes fast. Ved å la en av vinklene, f.eks. α , være lik 0, og variere de to andre, vil en kunne spore en bit av konturlinjen til området. Setter vi så de to andre lik 0 etter tur, får vi konturen til hele området (figur 1). Vi stiller spørsmålet: *Hva slags kurve er denne konturlinjen?*



Figur 1.

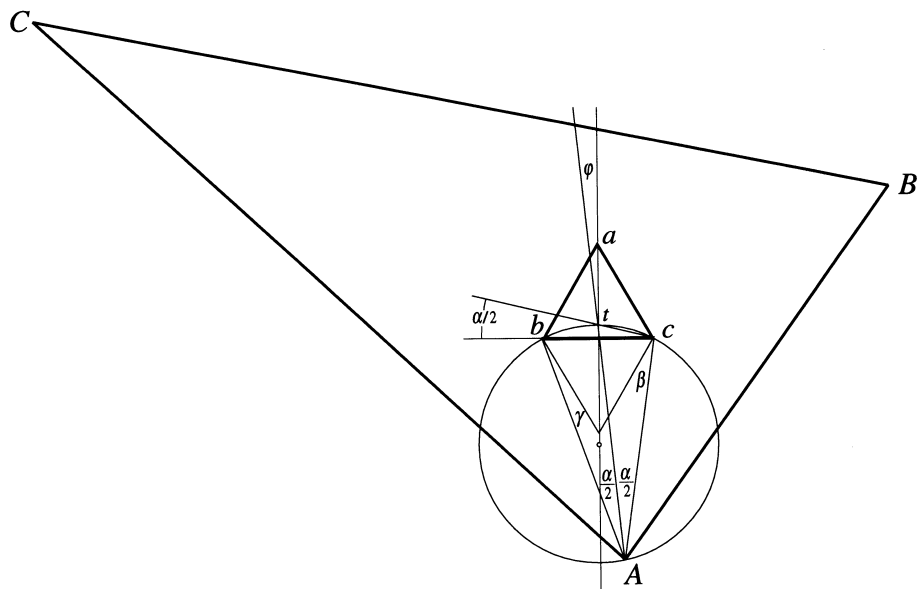
Ved første blick kan det se ut som om dette spørsmålet vil la seg besvare relativt enkelt ved analytisk regning. Senteret er bestemt som skjæringspunkt mellom halveringslinjer (det greier seg med to), og kan følgelig regnes ut når linjene er gitt. Haken er at når hjørnene A , B og C beveges, så følger halveringslinjene med. Det gjør at det blir mange parametre å holde styr på som alle blander seg inn i ligningen for den søkte kurven. Konklusjonen er at denne fremgangsmåten gir mye regning og et resultat som ikke er lett å tolke.

Vi blir derfor nesten tvunget til å bruke en geometrisk angrepsmåte: Kan vi se hva det er som foregår? Vår første ambisjon blir å få kontroll over halveringslinjene. Halverer vi vinkel A i trekanten ABC , så halverer vi også $\angle cAb$ i trekanten bAc , se figur 2 (her og i det følgende er alle vinkler gitt i forhold til positiv omløpsretning). Konstruerer vi den omskrevne sirkel til denne trekanten, må den ha sitt senter på midtnormalen på linjen bc . Denne midtnormalen skjærer sirkelen i et punkt t . Siden periferivinkler over like store buer er like store, må halveringslinjen også gå gjennom t . Av figuren ser vi at at linjen bA danner vinkelen $30^\circ - \gamma$ med midtnormalen. Halveringslinjen danner da en vinkel $\varphi = 30^\circ - \gamma - \frac{1}{2}\alpha$ med midtnormalen. Utregning gir $\varphi = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Videre er $\angle tcb = \frac{1}{2}\alpha$ siden også denne vinkelen er periferivinkel over buen bt .

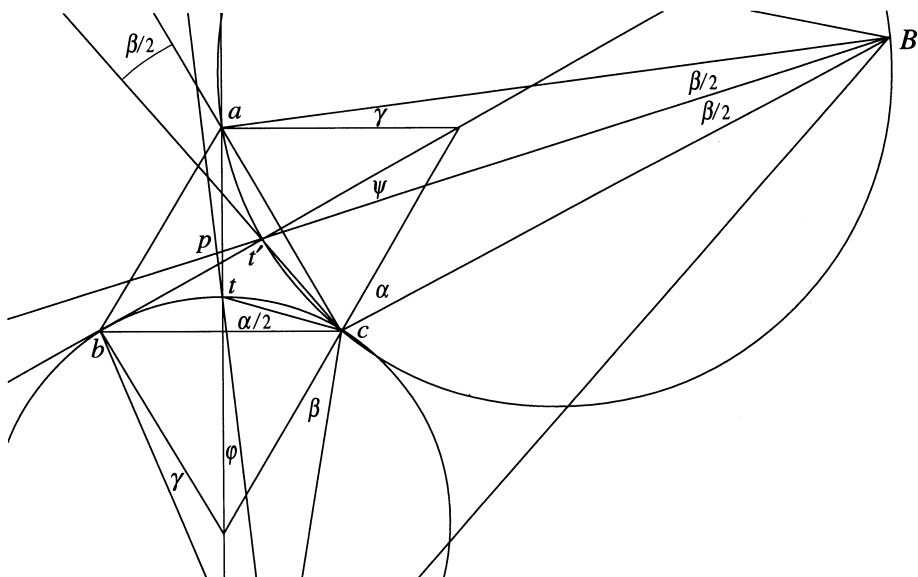
Gjentar vi denne konstruksjonen ut fra hjørnet B finner vi et nytt skjæringspunkt t' og punktet p som skjæringspunkt mellom de to halveringslinjene (figur 3). Halveringslinjen for vinkel B danner en vinkel $\psi = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)$ med midtnormalen på linjen ca , og vi får $\angle act' = \frac{1}{2}\beta$.

Vi har dermed kommet *innenfor* den likesidete trekanten abc og kan fortsette arbeidet der. Den drakelignende firkanten $tct'p$ er nå bestemt, og nesens på draken, punktet p , er senter for den innskrevne sirkel i ABC .

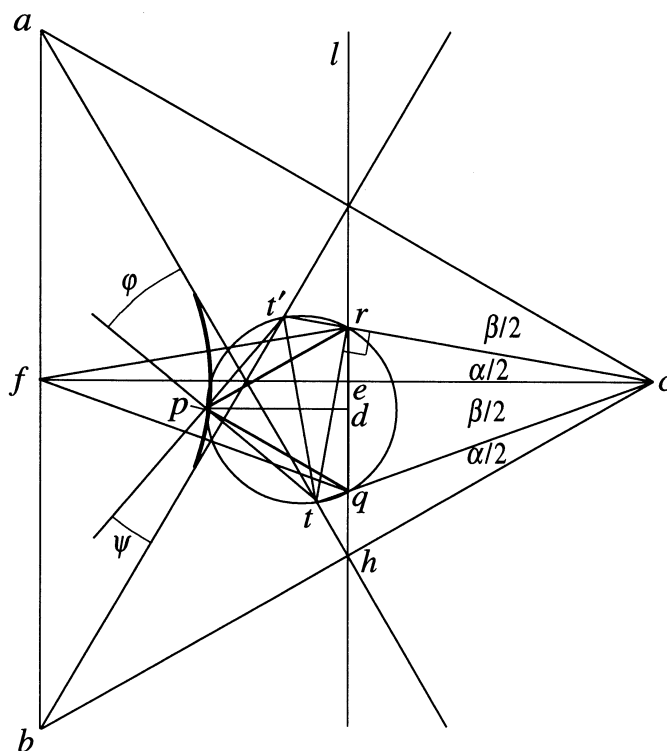
Vi ønsker å bestemme konturlinjen, eller en del av denne, og setter derfor $\gamma = 0$, og varierer α og β (figur 4).



Figur 2.



Figur 3.



Figur 4.

Vi har altså

$$\gamma = 0, \quad \alpha + \beta = 60^\circ, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{1}{2}\beta, \quad \psi = \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) = -\frac{1}{2}\alpha.$$

Av figuren fremgår videre: $\angle ctp = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \varphi = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 120^\circ$. Analogt er $\angle pt'c = 120^\circ$. Videre er $\angle t'ct = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 30^\circ$ og dermed $\angle tpt' = 90^\circ$ siden vinkelsummen i en firkant er 360° (de fire drakevinklene). Punktet p som konstruert ligger på kurven $\gamma = 0$. La ℓ være midtnormal på linjen fc , dvs. ℓ går gjennom h , midtpunktet på bc . La videre r og q være skjæringspunkt mellom ℓ og henholdsvis ct' og ct .

Den bestemmelsen av konturlinjen som vi gir her baserer seg på *Apollonios'* (262–190 f.Kr.) generelle karakterisering av kjeglesnitt: Vi har da gitt et punkt f (brennpunkt), en rett linje ℓ (direktrise) og en ikke-negativ konstant e (eksentrisitet). Et kjeglesnitt er bestemt som lokus for de punkt p som oppfyller

$$\frac{pf}{p\ell} = e$$

der pf og $p\ell$ er avstandene fra p til henholdsvis f og ℓ . Kjeglesnittet kalles ellipse, parabel eller hyperbel ettersom $e < 1$, $e = 1$ eller $e > 1$.

Teorem 1 Kurven $\gamma = 0$ gjennom p er en del av en hyperbel som har brennpunkt i f , direktrise ℓ og eksentrisitet $e = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Dette vil følge av

Lemma 1 Δpqr er likesidet.

Bevis for teoremet basert på lemma. Δrfq er speilingen av Δrcq om ℓ , slik at $\angle qfr = 30^\circ$. $\angle qpr = 60^\circ$ (fra lemma), så $\angle qfr$ er periferivinkel over buen qr i en sirkel med sentrum i p og radius pr (denne er ikke tegnet inn). Det betyr spesielt at f ligger på denne sirkelen slik at

$$pf = pr = \frac{2}{3}\sqrt{3}pd$$

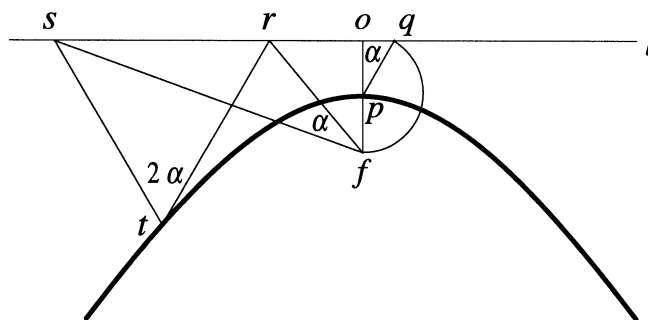
(via lemma), som viser teoremet.

Bevis for lemma 1. Siden $\Delta rec \simeq \Delta thc$ er $rc/tc = ec/hc$, som sammen med $\angle rct = \angle ech$ medfører at $\Delta rct \simeq \Delta ech$. Da er $\angle ctr = 60^\circ$ og vi ser også at $\angle trt' = 90^\circ$ som medfører at r ligger på sirkelen K med diameter tt' (sentrum midt på tt' , radius = $\frac{1}{2}tt'$). Symmetrisk argument gir samme konklusjon for q , slik at $\square trqt'$ har alle fire hjørner på K . Nå vet vi fra før at $\angle tpt' = 90^\circ$ og spenner over diameteren tt' . Da ligger også p på K . Siden t og q begge ligger på K må $\angle rqp = \angle rtp$ siden de er periferivinkler over samme bue pr . Men $\angle rtp = \angle ctp - \angle ctr = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, slik at $\angle rqp = 60^\circ$. Analogt er $\angle prq = 60^\circ$ som gir påstanden.

En hyperbelkonstruksjon

I argumentet ovenfor ligger innebygget konstruksjon av en hyperbel. Denne metoden er kanskje ikke allment kjent, og vi tar derfor med den generelle versjonen her. Vi vil konstruere en hyperbel når:

Brennpunkt f , direktrise ℓ og eksentrisitet $e > 1$ er gitt (se figur 5).



Figur 5.

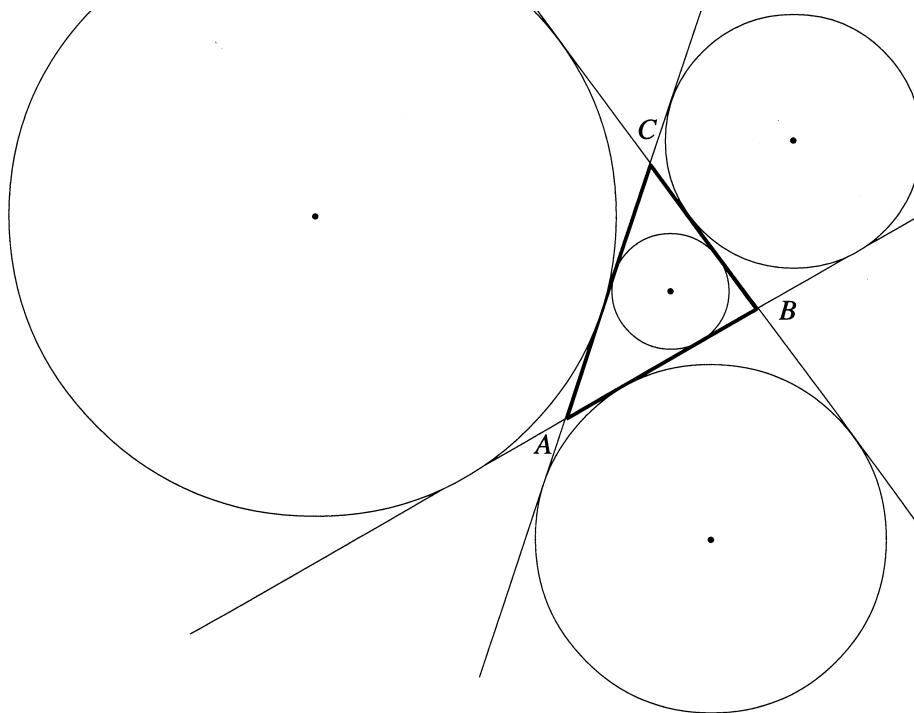
Del of i punkt p slik at $pf = e \cdot op$.

Slå buen med radius pf om p til den skjærer ℓ i et punkt q . La $\alpha = \angle opq$, og avsett en vinkel α med toppunkt i f vilkårlig. Vinkelbenas skjæringspunkter med ℓ betegnes med r og s , dvs. $\angle rfs = \alpha$. Konstruer likebent trekant rst med grunnlinje rs og toppvinkel $= \angle rts = 2\alpha$. Da ligger t på hyperbelen.

I den spesielle situasjonen vi diskuterte i forbindelse med Morley-trekanten var trekanten likesidet og toppvinkelen lik 60° .

Utsirkler og utsentre

Halverer vi to utvendige vinkler i en trekant ABC , slik at for eksempel BC er et felles vinkelben, og halverer vinkel A innvendig, vil de tre halveringslinjene møtes i et punkt som kalles et *utsenter*. Om dette punktet kan vi slå en *utsirkel* som tangerer siden BC og forlengelsen av de to andre. Se figur 6. Her er det tre muligheter, så til enhver trekant er det knyttet tre utsentre og tre utsirkler, og i tillegg har vi altså *innsenteret*, dvs. senteret for den innskrevne sirkel. Alt dette finner vi på figuren, men her ønsker vi nå å se på disse sentrene og sirklene ut fra et annet og samlende objekt, Morley-trekanten.

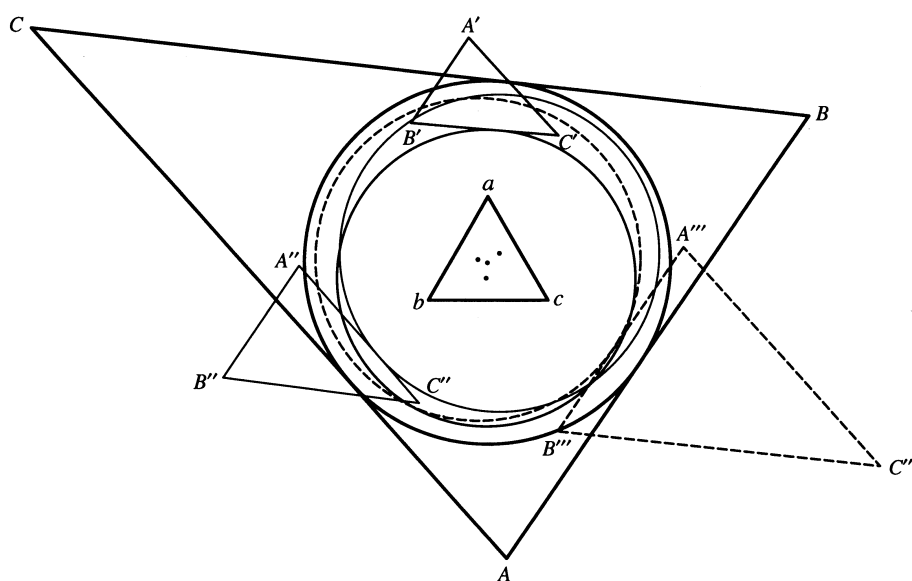


Figur 6.

Det innebærer at vi må snu perspektivet. Vi starter med en gitt likesidet trekant, og angir vilkårlige vinkler A, B, C med sum lik 180° . I første del av denne artikkelen

fant vi ut hvor trekanten ABC måtte befinne seg for å produsere den gitte likesidede trekanten ved utvendig tredeling.

I tillegg til den opprinnelige trekant ABC som ved innvendig tredeling produserer Morley-trekanten, har vi nå fått tre mindre kopier av ABC som ved utvendig tredeling gjør det samme. I hver av disse er en av vinklene A , B eller C tredelt innvendig, de to andre utvendig. Litt refleksjon gjør det klart at de tre utsentrene også må ligge innenfor Morley-trekanten. Ved å variere vinklene viser CABRI at sentrene ikke faller sammen, men oppfører en slags kvartettdans. Noen av dem nærmer seg, går fra hverandre, men berører hverandre aldri. CABRI indikerer også at de tre utsireklene alle faller *innenfor* den innskrevne sirkel i trekanten ABC ! Se figur 7.

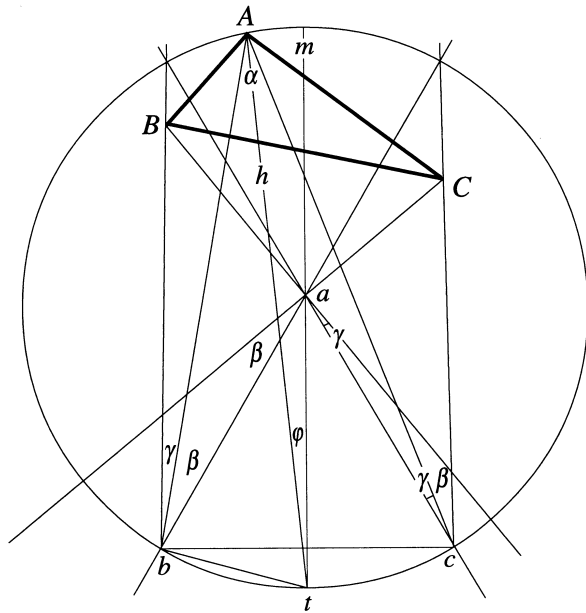


Figur 7.

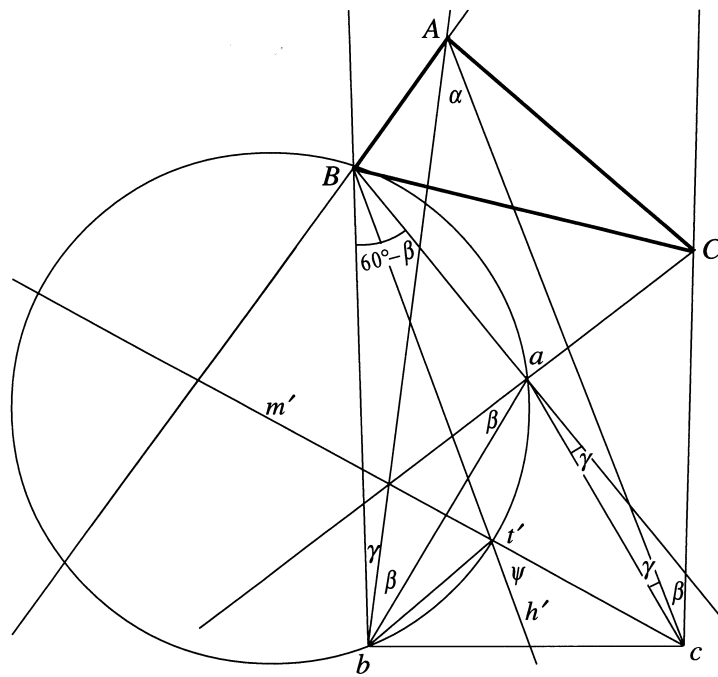
Konturlinjer for utsentre

De tre utsentrene vil ligge i hvert sitt område, som alle grenser opp mot området for innsenteret, som vi har vist på figur 1, og bestemt gjennom Teorem 1. Nå vil vi ta for oss problemet å bestemme konturlinjen for et utsenter.

I prinsippet går vi frem på samme måte som da vi fant konturlinjen for innsenteret, men får litt mer å holde styr på. Vi velger den av de ytre trekantene hvor *vinkel A er tredelt innvendig*. Tredelingslinjene fra A går gjennom hjørnene b og c og danner en trekant bAc . Vi konstruerer den omskrevne sirkel til denne trekanten. Den har sitt senter på midtnormalen m på bc , og skjærer m i et punkt t . Se figur 8. Halveringslinjen h for vinkel A halverer også $\angle bAc$ og må gå gjennom t av samme grunn som før. Vi kan legge merke til at t ligger *utenfor* Morley-trekanten.



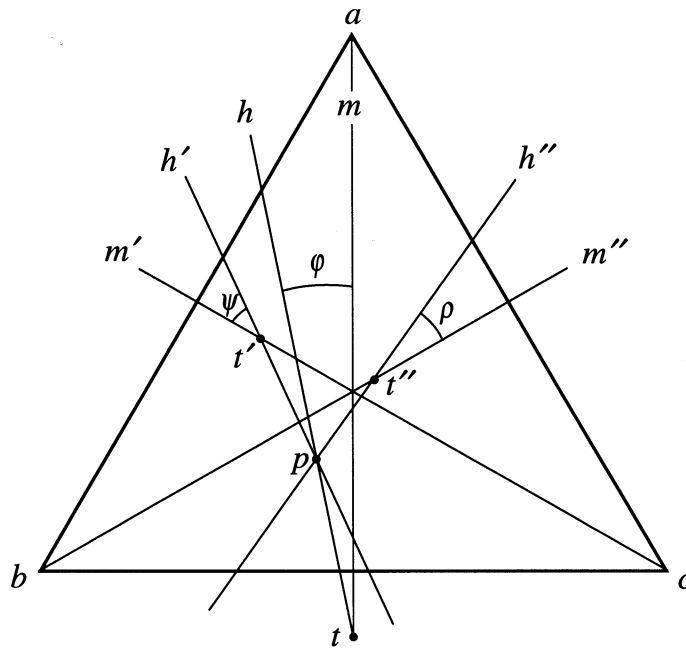
Figur 8.



Figur 9.

La oss nå halvere vinkel B *utvendig*, med BC som det ene vinkelbenet, se figur 9. Tredelingslinjene fra B går gjennom a og b og danner trekanten aBb . Vi konstruerer igjen den omskrevne sirkel til denne trekanten, og finner skjæringspunktet t' med midtnormalen m' på ab . Halveringslinjen h' for vinkel B må gå gjennom t' .

Vi gjentar prosessen med vinkel C , og finner punktet t'' på halveringslinjen h'' . De tre halveringslinjene h , h' og h'' møtes i et punkt p , utsentret vi ønsker å lokalisere. Se figur 10.

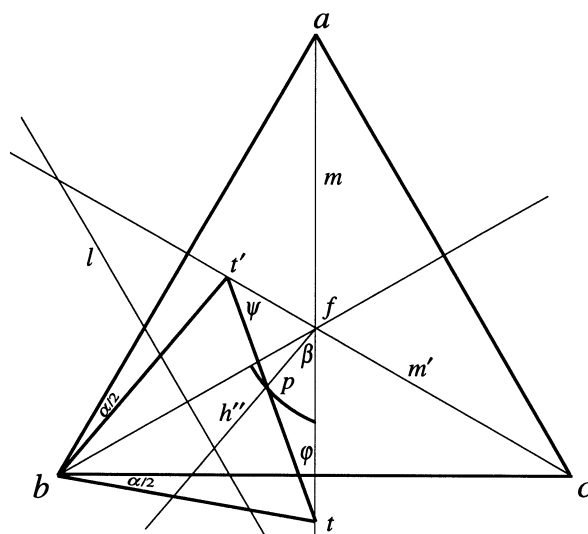


Figur 10.

På samme vis som for innsentret finner vi ved å studere figurene ovenfor (la $\angle(l, k)$ betegne vinkelen mellom linjer l og k , positivt orientert fra l til k):

$$\begin{aligned} \angle(m, h) &= \varphi = \frac{1}{2}(\beta - \gamma), & \angle tbc &= \frac{1}{2}\alpha, \\ \angle(m', h') &= \psi = -30^\circ + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha), & \angle t'ba &= \frac{1}{2}(60^\circ - \beta), \\ \angle(m'', h'') &= \rho = 30^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \alpha), & \angle t''ca &= \frac{1}{2}(60^\circ - \gamma). \end{aligned}$$

For å finne konturlinjen setter vi nå $\gamma = 0$ (dvs. $\angle C = 0$). Vi får da $\alpha + \beta = 60^\circ$ og at $t'' = f =$ sentrum i trekanten abc , se figur 11. Spesielt vil altså h'' gå gjennom f . Videre er $\varphi = \frac{1}{2}\beta$, $\psi = -(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha)$, $\angle tbc = \angle t'ba = \frac{1}{2}\alpha$, som medfører at trekanten $tt'b$ blir likesidet. Vi påstår nå at de to halveringslinjene h og h' faller sammen med linjestykket tt' . Det følger av at $|\psi| + \varphi + \angle tft' = 30^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + 120^\circ = 180^\circ$, som er vinkelsummen i trekanten $t'ft$. Punktet p ligger derfor på linjen tt' , i skjæringspunktet med halveringslinjen h'' . Vi har $\rho = 30^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ siden $\gamma = 0$, som gjør det mulig å beregne kurven til p . La ℓ være midtnormal på linjestykket bf .



Figur 11.

Teorem 5 Kurven $\gamma = 0$ er en del av en parabel med brennpunkt i f og direktrise ℓ .

Bevis. tt' er en side i den likesidete trekant tbt' som har sidelengde $d = 1/\cos(\frac{1}{2}\alpha)$ (sidelengde i abc lik 2). Vi vil uttrykke $fp = r$ ved d . Sinusproporsjonen i $\triangle ft'p$ gir

$$t'p = r \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha)} = 2r \cos(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha),$$

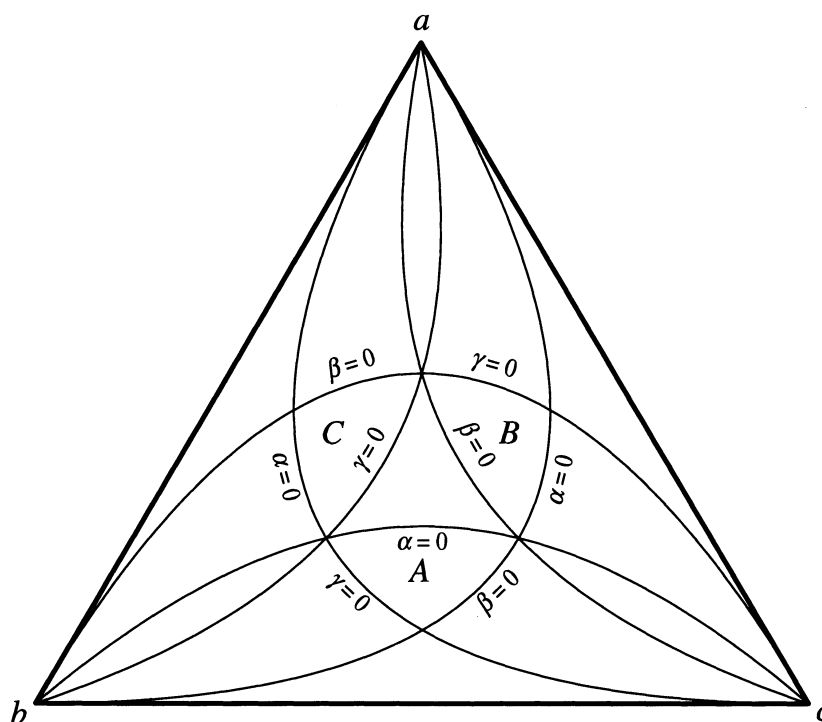
og analogt i $\triangle fpt$

$$\begin{aligned} tp &= 2r \cos(30^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \\ d &= t'p + tp = 2r(\cos(30^\circ + \frac{1}{2}\alpha) + \cos(30^\circ - \frac{1}{2}\alpha)) = 2r\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}\alpha \\ r &= \frac{d}{2\sqrt{3} \cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{1 + \cos \alpha} \end{aligned}$$

som er parabelens ligning i polarkoordinater.

Konturlinjen vil bestå av den delen av parabelen som fremkommer når vi lar α variere mellom 0 og 60° i polarform-uttrykket ovenfor. Analogt, ved å sette $\beta = 0$, finner vi en ny bit av den samme parabelen som ligger på den andre siden av fb . Se figur 12 for det fullstendige bildet. Her er de tre utsenter-områdene merket henholdsvis A , B og C , som angir hvilken vinkel som er delt innvendig i de tre ytre trekantene.

Detaljene her overlater vi til leseren å verifisere.



Figur 12.

Morleys hjerte

Vi har brukt uttrykket «Morleys hjerte» om den «fire-kamrede» figuren inne i Morley-trekanten, og skal begrunne det litt nærmere. Vi har sett at til hvert trippel (α, β, γ) som oppfyller $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ svarer ett punkt i hvert kammer; sentrene for de tilhørende inn- og utsirkler. Det *omvendte* er imidlertid også riktig, selv om vi ikke har vist det her. Velger vi et vilkårlig punkt i *ett* av de fire kamrene, så bestemmer det på entydig vis et trippel (α, β, γ) som ovenfor. Dette triplet bestemmer igjen de tre andre sentrene, ett i hvert kammer, som er kontrollert av det første punktet. Alle trekanter, sentre og sirkler er dermed fastlagt. All informasjon knyttet til konstruksjonene i denne artikkelen er på denne måten «kodet» ved punktene innenfor «hjertet».

Det er fristende å ta med en ekstra historisk kuriositet, som vi først ble oppmerksom på etter at denne artikkelen var skrevet. I Morleys opprinnelige arbeid [3] hvor det som i dag kalles Morleys teorem dukket opp for første gang, var denne setningen nærmest et biprodukt av en større undersøkelse. Et av problemene i dette arbeidet var å studere hvordan senteret til en kardoide, en «hjertekurve», innskrevet i en trekant, kan bevege seg.

Litteratur

- [1] Coxeter, H. S. MacDonald: *Introduction to Geometry* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Inc., New York 1980.
- [2] Knudtzon, Signe Holm og Aarnes, Johan F.: Morleys hjerte – lek med et geometrisk teorem – del 1, *Normat* **51**:4, 145–154 (2003).
- [3] F. F. Morley: On the Metric Topology of the N-line, *Trans. Amer. Math. Soc.* **1**, 97–115 (1900).