Oppgaver

441. For hvilke fyrstikktrekanter får vi arealet ved å telle fyrstikkene? Med andre ord: Bestem alle tripler (a, b, c) av hele lengdetall for sidene i en trekant med arealtall $a + b + c$. (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

442. Betrakt en glatt kurve i planet som er slik at krumningen er strengt voksende når vi beveger oss langs kurven (i den ene retningen). Vis at kurven ikke kan ha dobbeltpunkter. (Innsendt av Harald Hanche-Olsen, Trondheim, NO.)

443. La (a, b, c) være et primitivt pytagoreisk trippel, dvs. a, b og c er positive heltall med $\gcd(a, b, c) = 1$ og $a^2 + b^2 = c^2$.

(a) Vis at $c - a$ og $c + a$ ikke kan være sidelengder i en og samme pytagoreiske trekant.

(b) Vis at ingen av tallene $c^2 + 4ab$, $c^2 - 4ab$ og $c^2 - 9a^2$ kan være kvadrattall. (Innsendt av Kent Holing, Trondheim, NO.)

Løsninger

419. Gi et kombinatorisk bevis for den binomiske identiteten

$$\sum_{k=x}^{n-y} \binom{k}{x}\binom{n-k}{y} = \binom{n+1}{x+y+1}, \qquad n \geq x+y,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0.$$

(Innsendt av Ivar Skau, Bø, NO.)

Løsning: (Etter *Peter Kirkegaard*, Gentofte, DK.) Høyre side i ligningen angir antall «bitstrenger» av lengde $n+1$ med $x+y+1$ 1-tall. Venstre side teller opp det samme, idet det summeres over posisjonen av 1-tall nummer $x+1$. For hvis denne posisjonen er $k + 1$, så kan de x 1-tallene som ligger til venstre plasseres på $\binom{k}{x}$ måter, men de y 1-tallene til høyre kan plasseres på $\binom{n-k}{y}$ måter.

Også løst av: Pål Grønås, Stjørdal, NO, og Johan Moldestad, Vereide, NO.

420. Bevis at det eksisterer positive heltall m og n slik at

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2001}\right| < 10^{-8}.$$

(Fra den 51. hviterussiske matematikkolympiaden i 2001.)

Løsning: (Etter *Lars Höglund*, Uppsala, SE.) Sett $A = \sqrt{2001}$ og $\varepsilon = 10^{-8}$. Da er

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - A\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ A - \varepsilon < \frac{m^2}{n^3} < A + \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n^{3/2}\sqrt{A-\varepsilon} < m < n^{3/2}\sqrt{A+\varepsilon}.$$

Lengden av intervallet $(n^{3/2}\sqrt{A-\varepsilon}, n^{3/2}\sqrt{A+\varepsilon}\,)$ er $n^{3/2}(\sqrt{A+\varepsilon}-\sqrt{A-\varepsilon}\,)$, som går mot ∞ når $n \to \infty$. Det fins derfor et naturlig tall n_0 som er slik at når $n \geq n_0$, er lengden av intervallet større enn 1, og da vil intervallet inneholde minst ett naturlig tall m. Litt regning viser at vi kan la $n = n_0 = 764\,789$, og da får vi $m = 4\,473\,260\,823$.

Det er selvsagt ingen grunn til å tro at dette er de minste brukbare verdiene av m og n (også et kort intervall kan jo slumpe til å inneholde et heltall). For eksempel angir *Hans Georg Killingbergtrø*, Leksvik, NO, at $n = 2413$, $m = 792771$ er en mulig løsning.

Et rent eksistensbevis er gitt av *Henrik Meyer*, Birkerød, DK: La (a, b) være et vilkårlig intervall i $\mathbb{R}_+$. Da mengden $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall er tett i $\mathbb{R}$, fins det et rasjonalt tall p/q som er slik at $\sqrt[6]{a} < p/q < \sqrt[6]{b}$. Da er $a < p^6/q^6 < b$, og $p^6/q^6 = (p^3)^2/(q^2)^3$. Dette argumentet kan lett utvides til å gi oss konkrete verdier for p og q.

Også løst av: Niels Bejlegaard, Vanløse, DK; Pål Grønås, Stjørdal, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Inge H. A. Pettersen, Kongshavn, NO;

421. En fotballspiller løper fra cornerflagget med konstant fart. Han løper på en slik måte at synsvinkelen til målet hele tiden øker raskest mulig. Finn den kurven han følger. (Med synsvinkelen fra et punkt menes vinkelen mellom linjene fra punktet gjennom målstengene.) (Innsendt av Ivar Skau, Bø i Telemark, NO.)

Løsning: Perferivinkel-betraktning viser at nivåkurvene til synsvinkelen er sirkler som går gjennom målstengene, mer presist den delen av hver slik sirkel som ligger inne på banen. La oss kalle disse sirklene synsvinkelsirkler. Løsningen er derfor den kurven som står ortogonalt på disse og går gjennom cornerflagget.

La l betegne avstanden fra cornerflagget til midtpunktet i målet, og la a være halve bredden av målet. La så P være et punkt på dødlinjen i avstand x fra dette midtpunktet (på samme side som cornerflagget). Punktet P har da samme potens med hensyn på alle synsvinkelsirklene, nemlig $x^2 - a^2$. Dette viser at tangentene fra P til synsvinkelsirklene alle har lengde $\sqrt{x^2 - a^2}$. Sirkelen med P som sentrum og denne lengden som radius, står derfor ortogonalt på synsvinkelsirklene. Den av disse sirklene om P som går gjennom cornerflagget, er dermed løsningen. Vi må ha $l - x = \sqrt{x^2 - a^2}$. Dette gir $x = (l^2 + a^2)/2l$ som Ps posisjon, og radien blir lik $(l^2 - a^2)/2l$.

Løst av: Con Amore Problemgruppe, København, DK; Oddvar Iden, Bergen, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

422. *ABCD* er en ikke nødvendigvis plan firkant i rommet. Punktene E, F, G og H halverer sidene $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ og $[DA]$. Hvilke betingelser må A, B, C og D oppfylle for at firkanten *EFGH* skal være plan, ha areal > 0 og være (i) et parallellogram, (ii) et rektangel, (iii) en rombe, (iv) et kvadrat? (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

Løsning: La stedsvektorene til A, B, …, H være henholdsvis $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, …, $\mathbf{h}$. Da er

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),\;\; \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),\;\; \mathbf{g} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}),\;\; \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}),$$

og vi får $\mathbf{f}-\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = \mathbf{g}-\mathbf{h}$. Dette viser at linjestykkene $[EF]$ og $[HG]$ er like lange og parallelle. Det følger at firkanten *EFGH* faktisk *alltid* er et parallellogram.

Dette parallellogrammet har areal 0 hvis og bare hvis H ligger på linjen EF, altså hvis og bare hvis $\mathbf{h}-\mathbf{e}=t(\mathbf{f}-\mathbf{e})$ for et passende tall t. Det er lett å se at denne ligningen er ekvivalent med $\mathbf{d}-\mathbf{b}=t(\mathbf{c}-\mathbf{a})$, som igjen er ekvivalent med at BD er parallell med AC. I dette tilfellet vil $ABCD$ ligge i et plan som inneholder punktene A, B og C, og da vil AD skjære BC eller AB vil skjære CD, eller alle punktene vil ligge på en og samme linje. Så med mindre vi aksepterer degenererte firkanter eller firkanter med selvskjæringer, vil $EFGH$ alltid ha areal forskjellig fra 0.

Parallellogrammet $EFGH$ er et rektangel hvis og bare hvis

$$FG \perp EF \iff \mathbf{g}-\mathbf{f} \perp \mathbf{f}-\mathbf{e} \iff \mathbf{d}-\mathbf{b} \perp \mathbf{c}-\mathbf{a} \iff BD \perp AC,$$

altså hvis og bare hvis BD står ortogonalt på minst ett plan som AC ligger i.

Videre: $EFGH$ er en rombe $\iff |FG|=|EF| \iff \|\mathbf{g}-\mathbf{f}\|=\|\mathbf{f}-\mathbf{e}\| \iff \|\mathbf{d}-\mathbf{b}\|=\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\| \iff [BD]$ og $[AC]$ er like lange.

Endelig er firkanten $EFGH$ et kvadrat hvis og bare hvis den er både et rektangel og en rombe, altså hvis og bare hvis linjestykkene $[AC]$ og $[BD]$ er like lange og står ortogonalt på hverandre.

Løst av: Con Amore Problemgruppe, København, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK.

423. La $p(x)$ være et polynom med komplekse koeffisienter. Vis at de polynomer $f(x)$ som er slik at $p(x_1)=p(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$, er av formen $f(x)=\Phi\big(p(x)\big)$, hvor $\Phi(x)$ er et polynom. (Innsendt av Allan Pedersen, Søborg, DK.)

Løsning: Vi bruker oppgavegiverens løsning. Han forteller for øvrig at oppgaven er inspirert av den første halve siden av en posthum artikkel af Jacobi: Werke VI, p. 203.

Vi kan anta at $p(x)$ er monisk og av positiv grad, og har bare enkle, dvs. ikke-multiple nullpunkter. For hvis setningen gjelder for $p(x)$, så gjelder den også for $p(x)+c$, der c er en vilkårlig konstant, og ved å velge c slik at $p(x)+c \neq 0$ for alle nullpunkter i $p'(x)$, oppnår vi at $p(x)+c$ har bare enkle nullpunkter.

Vi går nå frem ved induksjon med hensyn på graden n av $f(x)$. Setningen er klar for $n=0$, så la $n>0$. La $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ være (de distinkte) nullpunktene for $p(x)$. Siden $p(\alpha_1)=\cdots=p(\alpha_m)=0$, har vi $f(\alpha_1)=\cdots=f(\alpha_m):=C$. Derfor er $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ nullpunkter for $f(x)-C$. Dette gir $f(x)-C=q(x)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)=q(x)p(x)$, der $q(x)$ er et polynom. Vi ser at hvis $p(x_1)=p(x_2)\neq 0$, så er $q(x_1)=q(x_2)$. Ved kontinuitet følger det at $p(x_1)=p(x_2) \Rightarrow q(x_1)=q(x_2)$. Induksjonshypotesen gir nå at $q(x)$ er et polynom i $p(x)$, og dermed er også $f(x)$ et polynom i $p(x)$.

Løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

424. La $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være komplekse tall. Vis at det finnes et punkt x i $[0,1]$ som er slik at

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n} a_k e^{2\pi i k x}\right| \geq 1.$$

(Innsendt av Peter Lindqvist, Trondheim, NO.)

Løsning: (Etter *Peter Kirkegaard*, Gentofte, DK.) Vi betrakter summen $s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{2\pi ikx}$ som en funksjon av x. Det er klart at $s(x)$ er periodisk med periode 1. Videre er middelverdien av s åpenbart lik 0: $\int_0^1 s(x)\,dx = 0$. Det følger at $s(x)$ ikke kan ha positiv realdel for alle x i $[0,1]$, så det fins en x_0 med $\mathrm{Re}\big(s(x_0)\big) \le 0$. Men da er

$$|1 - s(x_0)| \ge 1 - \mathrm{Re}\big(s(x_0)\big) \ge 1.$$

Løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

425. Summer rekkene

(a) $$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \frac{x^8}{1-x^{16}} + \cdots, \qquad |x| < 1,$$

(b) $$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}+1} + \cdots, \qquad |x| > 1.$$

(Innsendt av Peter Lindqvist, Trondheim, NO.)

Løsning: (Etter *Hans Georg Killingbergtrø*, Leksvik, NO.)

(a) Ved oppspalting av leddene kan vi skrive rekken som en «teleskoprekke»:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^n}} \Big).$$

Den N-te delsummen er da $x/(1-x) - x^{2^N}/(1-x^{2^N})$, som åpenbart konvergerer mot $x/(1-x)$ når $N \to \infty$.

(b) Her bruker vi en lignende oppspalting, og får en ny teleskoprekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^{2^n}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2^n}{x^{2^n}-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}}-1} \Big)$$

Summen av de N første leddene er $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2^N}{x^{2^N}-1}$. Med $x > 1$ er det klart at den siste brøken går mot 0 når $N \to \infty$, siden $\lim_{t\to\infty} t/(x^t - 1) = 0$. Den gitte rekken konvergerer altså mot $1/(x-1)$.

Også løst av: Con Amore Problemgruppe, København, DK; Bjørn Elstad, Oslo, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Norvald Midttun, Bergen, NO; Jakob Try, Søgne, NO; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 30. september 2004. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.