Taltrylleri med kvadrater

En studie i cykliske numeriske differenser

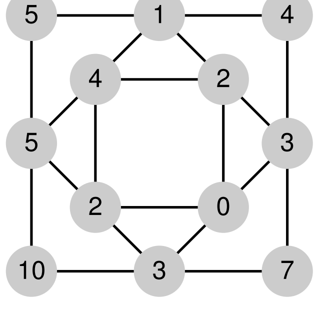
Hans Christian Hansen

Københavns Dag- og Aftenseminarium
Bybjergvej 25
DK–2740 Skovlunde
Hans.Christian.Hansen@skolekom.dk

Danmarks Matematiklærerforening (grundskolen) offentliggør sommetider nogle »grublere« på sin hjemmeside. Her er grubleren for torsdag i uge 41 år 2003:

Taltrylleri med kvadrater

Tryllekunstneren spurgte Peter om fire tal. Peter gav ham tallene 5, 4, 7 og 10. Tryllekunstneren smilede. Han tegnede nu et kvadrat og anbragte de fire tal i hvert sit hjørne af kvadratet. Så tegnede han et mindre kvadrat indeni det første kvadrat. I hvert hjørne i det nye kvadrat, skrev han et nyt tal:



Fortsæt nu med at tegne mindre kvadrater på denne måde. Hvor mange kvadrater skal du tegne, før tallene i kvadratets hjørner er 0? Prøv forfra med fire nye tal.

Denne grubler var beregnet for begyndertrinnet og er meget motiverende i forbindelse med træning af simpel subtraktion, fordi det ikke varer så længe, før alt bliver 0. Det er knap så enkelt at bevise, at det faktisk altid vil gå sådan. Og hvad hvis man i stedet var startet med en trekant, en femkant eller en n-kant? Problemstillingen viser sig rig på matematik.[1] Hypoteser om situationen melder sig hurtigt, så snart man får problemet ind på et regneark, og de kan let afprøves eksperimentelt. Efter en sådan eksperimentel udforskning melder sig problemet om passende notation og sekvensering af de øjensynligt sande hypoteser, så de bliver modne til bevis. Denne artikel giver et bud på en sådan sammenhængende teori for området.

En generel teori for tal i en n-kant

Definitioner: Ved et *n-sæt* $\mathbf{x}$ vil vi forstå et ordnet sæt på n ikke-negative hele tal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Et *binært n-sæt* består af kun 0-er og 1-taller eller er et sådant 0–1-sæt ganget op med et naturligt tal som for eksempel $(5, 5, 0, 0, 0)$. Et *konstant n-sæt* er et n-sæt af formen $(a, a, \ldots, a)$. Et *strengt binært* sæt må ikke være konstant.

For et givet n defineres funktionen (transformationen) T i mængden af n-sæt ved:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (|x_n - x_1|, |x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, \ldots, |x_{n-1} - x_n|)$$

Ved *ordenen* af et n-sæt $\mathbf{x}$ forstår vi det mindste m således, at m gentagne anvendelser af T på $\mathbf{x}$ giver 0-sættet: $T^m(\mathbf{x}) = (0, 0, \ldots, 0)$. Hvis der ikke findes et sådant m, siges $\mathbf{x}$ at have *uendelig orden.*

Sætning 1 *Hvis n er ulige har ethvert ikke-konstant n-sæt uendelig orden.*

Bevis: Antag at der findes et ikke-konstant n-sæt med endelig orden. Vi regner baglæns fra, hvor det ønskede resultat $(0, 0, \ldots, 0)$ indtræffer første gang. Det kan kun komme fra et konstant sæt $(a, a, \ldots, a)$, hvor a er et naturligt tal. Lad $(a, a, \ldots, a)$ komme fra $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, hvor n er ulige, altså $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a, a, \ldots, a)$. Dette vil vi føre til modstrid.

Lad os se på x_i, x_{i+1} og x_{i+2}. Afvigelsen mellem de to første koordinater i denne tripel er a og ligeledes mellem de to sidste. Altså er afvigelsen mellem den første og den sidste, $|x_i - x_{i+2}|$, et lige antal a (faktisk enten $0a$ eller $2a$). Successiv anvendelse af denne tripelregel fører til at afvigelsen mellem x_i og x_{i+2m} også er et lige antal a for ethvert naturligt tal m. Men da n er ulige, er $(n-1)/2$ et sådant helt tal således, at afvigelsen mellem x_1 og $x_{1+2(n-1)/2}$ er et lige antal a.

Imidlertid er $1+2\cdot(n-1)/2 = n$, hvorfor konklusionen er, at afvigelsen mellem x_1 og x_n er et lige antal a. Men det betyder at $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (|x_1 - x_n|, \ldots) =$ (lige antal $a, \ldots$) hvilket klart er forskelligt fra $(a, a, \ldots, a)$. Modstriden beviser sætningen. $\square$

Ved hjælp af Sætning 1 ser man således, at hverken trekant eller femkant kan få samme taludvikling som et kvadrat. Hvis ikke en polygon med et ulige antal hjørner

[1] Det var gennem diskussioner med mine kolleger på KDAS, at problemets matematiske rigdom trådte frem.

starter med det samme tal i alle hjørner, vil den aldrig nå frem til 0-sættet. Hvis man undersøger sagen eksperimentelt, vil man imidlertid bemærke, at disse ulige talsæt på et tidspunkt går i en periodisk svingning. Vi sigter derfor på i resten af artiklen at bevise:

Hovedsætningen for cykliske numeriske differencer

1) *Hvis n er en potens af 2, da har ethvert n-sæt endelig orden.*

2) *Hvis n er ulige, da er alle ikke konstante n-sæt af uendelig orden og går på et tidspunkt i svingninger med et regulært gentaget mønster af binære n-sæt*

3) *Hvis n både har lige og ulige faktorer, $n = u \cdot 2^k$, hvor u er ulige, da vil sådanne periodiske svingninger af binære n-sæt også være det typiske. Hvis $\mathbf{x}$ har periode 2^k, da har $\mathbf{x}$ dog endelig orden.*

Hovedstrategien i beviset for denne sætning består i at følge udviklingen af det største tal M i et n-sæt. Det minimale tal i et n-sæt $\mathbf{x}$ kan uden tab af generalitet sættes lig med 0, idet det mindste tal i sættet kan subtraheres i hver koordinat uden at dette får indflydelse på $T(\mathbf{x})$. Hvis $\mathbf{x}$ ikke er et binært n-sæt, indeholder koordinaterne desuden mindst et tal m med $0 < m < M$, et såkaldt *mellemtal.* Hvis vi får brug for notation for flere af dem kaldes de m', m'' o.s.v.

Det gør beviset for næste sætning mere gennemskueligt, hvis vi indfører et biologisk sprog for udviklingen af et n-sæt $\mathbf{x}$. $T(\mathbf{x})$ bliver således den *næste generation* og $T^r(\mathbf{x})$ den *r'te generation* efter $\mathbf{x}$. Så længe maksimum i $\mathbf{x}$ (M) stadig optræder i følgende generationer vil vi sige at M-slægten *overlever*, ellers er den *uddød.* Det naturlige i denne tankegang fremgår måske bedst af et eksempel, der også illustrerer, at der er fraktallignende mønstre på spil i dette problem.

Eksempel 1 (se næste side). For $n = 16$ og i det hele taget, hvis n er en potens af 2, optræder der et slægtstræ af en fraktal struktur. I eksemplet er

$$\mathbf{x} = (69, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

hvor altså $M = 69$. M får en stor efterslægt. I den 15. generation er alle koordinaterne i 16-sættet således efterkommere af dette M, hvilket dog bevirker at M helt uddør i den 16. generation. Bemærk, at M ville uddø blot tallene i den 16. generation er mindre end 69 – de behøver ikke at være lig med 0.

Følgesætning 1 *Hvis n er en potens af 2 og $\mathbf{x} = (M, 0, \ldots, 0)$ eller et andet n-sæt med netop én koordinat, der afviger fra 0, så har $\mathbf{x}$ den endelige orden n.*

Bevis: Hvis $n = 16$, så fremgår dette af eksempel 1, hvor M sættes ind i stedet for 69. Det får ingen indflydelse, hvis M i udgangspositionen står i en anden koordinat end den første, da en cyklisk forskydning af $\mathbf{x}$ blot giver den tilsvarende cykliske forskydning på $T(\mathbf{x})$. Hvis $n = 32$ er der yderligere 16 nuller til højre for de viste. Dette får klart ingen indflydelse på udviklingen frem til generation nr. 15, men generation nr. 16 bliver:

$$(69, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}_{\text{i alt 15 nuller}}, 69, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}_{\text{i alt 15 nuller}}).$$

Eksempel 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	69	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	0	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	69	69	69	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	69	0	0	0	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	69	69	0	0	69	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	69	0	69	0	69	0	69	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	69	69	69	69	69	69	69	69	0	0	0	0	0	0	0	0
8	69	0	0	0	0	0	0	0	69	0	0	0	0	0	0	0
9	69	69	0	0	0	0	0	0	69	69	0	0	0	0	0	0
10	69	0	69	0	0	0	0	0	69	0	69	0	0	0	0	0
11	69	69	69	69	0	0	0	0	69	69	69	69	0	0	0	0
12	69	0	0	0	69	0	0	0	69	0	0	0	69	0	0	0
13	69	69	0	0	69	69	0	0	69	69	0	0	69	69	0	0
14	69	0	69	0	69	0	69	0	69	0	69	0	69	0	69	0
15	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Det betyder, at skemaet fra Eksempel 1 gentager sig endnu engang i to kopier således, at det konstante 32-sæt $(69, 69, \ldots, 69)$ optræder i generation nr. $15+16 = 31$, hvorefter $(0, 0, \ldots, 0)$ opnås i generation 32. Det er visuelt klart, at den fraktale struktur gentages for $n = 64$ og enhver potens af 2. Det ses, at sætningen gælder for toerpotenser mindre end 32 ved simpel inspektion. □

Vi skal først anvende denne følgesætning noget senere, men da den følger så visuelt naturligt af det viste eksempel, har vi givet beviset her. Eksemplet viser, at et maksimum kan overleve i mange generationer, men følgende sætning giver en øvre grænse.

Sætning 2 *Maksimum i et ikke-binært n-sæt $\mathbf{x}$ uddør senest i den $(n-1)$'ste generation.*

Bevis: Lad $\mathbf{x}$ være et vilkårligt n-sæt med maksimum M, minimum 0 og mindst ét mellemtal. En 0–M-kæde i $\mathbf{x}$ er en sekvens af koordinater, hvoraf mindst én er M og resten M eller 0, og som er afgrænset af to mellemtal m' og m'', der kan vise sig at være samme tal, hvis længden af sekvensen faktisk er $n-1$.

$$\mathbf{x} = (\ldots, a, m', 0, M, M, 0, 0, 0, M, m'', b, \ldots)$$

Lad placeringen af grænserne være således, at $x_i = m'$ og $x_j = m''$. Tallene a og b kan være både 0, M eller mellemtal. Vi vil undersøge, hvordan denne 0–M-kæde udvikler sig i næste generation, $T(\mathbf{x})$. Den i'te koordinat af $T(\mathbf{x})$ bliver et mellemtal idet $T(\mathbf{x})_i = |a - m'|$, hvor $0 \leq a \leq M$, mens m' ligger i det åbne interval. $T(\mathbf{x})_{i+1}$ er $|m' - 0|$ eller $|m' - M|$, i begge tilfælde et mellemtal m'''. $T(\mathbf{x})_j$ er $|M - m''|$ eller $|0 - m''|$, i begge tilfælde et mellemtal m''''. $T(\mathbf{x})$ vil på alle koordinater mellem $i+1$ og j igen få udelukkende 0 og M, idet disse koordinater udregnes som numeriske differenser af elementer fra mængden $\{0, M\}$. Vi får altså:

$$T(\mathbf{x}) = (\dots c, m''', M, M, 0, 0, 0, M, m'''', \dots).$$

Og vi kan konkludere, at den betragtede 0–M-kæde i $\mathbf{x}$ i næste generation bliver én koordinat kortere. Dette gælder for enhver 0–M-kæde i $\mathbf{x}$. Der kan ikke opstå nye 0–M-kæder i $T(\mathbf{x})$ ud fra mellemtal; for skønt der godt kan opstå 0'er, kan der aldrig opstå et M ud fra andet end et 0 og et M. Derfor vil også den længste 0–M-kæde i $T(\mathbf{x})$ være én mindre end den længste kæde i $\mathbf{x}$.

Da den længst mulige 0–M-kæde i noget n-sæt $\mathbf{x}$ med et mellemtal har længde $n-1$, vil sådanne kæder senest i $(n-1)$'ste generation alle have længden 0. M uddør altså efter senest $n-1$ generationer. □

Sætning 3 *Ethvert ikke-binært n-sæt med maksimum M bliver til et binært n-sæt senest i den $(M-1) \cdot (n-1)$'ste generation.*

Bevis: Dette bevises ved induktion efter M.

1) Hvis M er lig med 1, så er der allerede tale om et binært n-sæt, da vi arbejder med hele ikke negative tal. Dette stemmer med, at sætningen udsiger, at det sker senest i 0'te generation.

2) Antag at sætningen er bevist for alle $M \leq N$. Vi vil bevise, at den også gælder for $M = N + 1$. Lad $\mathbf{x}$ være et ikke-binært n-sæt, altså et n-sæt med mindst ét mellemtal, et minimum, som vi kan tillade os at sætte til 0 samt maksimum $M = N + 1$. Vi skal bevise, at $\mathbf{x}$ efter $\big((N+1) - 1\big) \cdot (n-1)$ generationer bliver et binært n-sæt. Ifølge Sætning 2 uddør $\mathbf{x}$'s maksimum $(N+1)$ senest efter $n-1$ generationer. Derefter gælder altså for $\mathbf{y} = T^{(n-1)}(\mathbf{x})$ med det nye maksimum M, at $M \leq N$. Hvis $\mathbf{y}$ allerede er et binært n-sæt, så induktionstrinnet færdigt. Ellers benytter vi induktionsantagelsen til at fastslå, at $\mathbf{y}$ senest efter $(N-1) \cdot (n-1)$ trin bliver til et binært n-sæt. Da $\mathbf{y} = T^{(n-1)}(\mathbf{x})$ ses, at $\mathbf{x}$ efter senest $(N-1) \cdot (n-1) + (n-1) = N \cdot (n-1)$ generationer bliver til et binært n-sæt. Dette var netop kravet i induktionstrinnet, og hermed er induktionsbeviset fuldført. □

Det kan hænde, at udviklingen af et sådant n-sæt helt overspringer fasen som strengt binært og i stedet bliver konstant for derefter straks at blive nulsættet. Et eksempel på dette er givet i det senere Eksempel 2.

Teorien for binære talsæt

Vi har i det foregående afsnit bevist, at ethvert n-sæt udvikler sig til et binært n-sæt, altså et sæt hvori der kun benyttes to tal 0 og M. Vi kan i det følgende sætte $M = 1$, idet $T[M \cdot \mathbf{b}] = M \cdot T[\mathbf{b}]$ for ethvert binært n-sæt $\mathbf{b}$, og vi kun er interesseret i spørgsmål om sættenes orden og eventuelle periodicitet. Vi vil altså i det følgende lade binære n-sæt betyde n-sæt bestående af kun tallene 0 og 1. Mængden af binære n-sæt bliver således lig $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2$. Vi vil desuden benytte os af den additive struktur i $(\mathbb{Z}_2, +)$ således at »+« i det følgende refererer til denne algebraiske struktur.

Hjælpesætning 1 *Hvis* $\mathbf{b}$ *er et binært* n*-sæt, så kan* T *defineres koordinatvis ved* $T(\mathbf{b})_i = b_i + b_{i-1}$. T *bliver således en homomorfi, altså* $T(\mathbf{b} + \mathbf{b}') = T(\mathbf{b}) + T(\mathbf{b}')$ *for alle binære* n*-sæt* $\mathbf{b}$ *og* $\mathbf{b}'$*.*

Bevis: Per definition er $T(\mathbf{b})_i = |b_{i-1} - b_i| = |b_{i-1} + b_i| = b_{i-1} + b_i$, hvor vi har benyttet, at normal subtraktion i mængden $\{0, 1\}$ svarer til subtraktion modulo 2, når vi søger numerisk værdi, samt at $+$ og $-$ er den samme operation modulo 2. Herefter finder vi for to binære n-sæt $\mathbf{b}$ og $\mathbf{b}'$ at

$$T(\mathbf{b} + \mathbf{b}')_i = (\mathbf{b} + \mathbf{b}')_{i-1} + (\mathbf{b} + \mathbf{b}')_i = (b_{i-1} + b_i) + (b'_{i-1} + b'_i) = T(\mathbf{b}) + T(\mathbf{b}').$$

Altså er $T(\mathbf{b} + \mathbf{b}') = T(\mathbf{b}) + T(\mathbf{b}')$ for alle binære n-sæt $\mathbf{b}$ og $\mathbf{b}'$. □

Vi har her kun vist, at T er en homomorfi i $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2, +)$. Den er faktisk også lineær med hensyn til multiplikation med en skalar, som vi så overfor: $T[M \cdot \mathbf{b}] = M \cdot T[\mathbf{b}]$.

Hvor teorien for numeriske differenser i forrige afsnit måtte trække på *ad hoc*-løsninger på problemerne, kan vi nu i det følgende trække på mere rutineprægede teknikker fra homomorfier og lineære afbildninger.

Sætning 4 *Hvis* n *er en toerpotens og* $\mathbf{b}$ *et binært* n*-sæt, så er* $\mathbf{b}$*'s orden højst* n*.*

Bevis: I Følgesætning 1 så vi, at hvis $\mathbf{b}$ kun har et enkelt 1-tal og resten er nuller, så har $\mathbf{b}$ orden n, altså $T^n(\mathbf{b}) = (0, 0, \ldots, 0)$. Da alle andre binære n-sæt kan skrives som endelige summer af sådanne simple n-sæt, og da T (og dermed T^n) er en +-homomorfi, bliver $T^n(\mathbf{b}) = (0, 0, \ldots, 0)$ for ethvert binært $\mathbf{b}$. Ethvert binært $\mathbf{b}$ har altså orden højst n. □

Følgesætning 2 *Hvis* n *er en toerpotens og* $\mathbf{x}$ *er et vilkårligt* n*-sæt, så har* $\mathbf{x}$ *endelig orden.*

Bevis: Hvis $\mathbf{x}$ er et konstant sæt, har det orden 1. Hvis $\mathbf{x}$ er strengt binær følger sætningen af sætning 4. Hvis $\mathbf{x}$ ikke er binær og har maksimum M, bliver den senest i generation $(M - 1) \cdot (n - 1)$ til et binært talsæt, ifølge sætning 3. Ifølge sætning 4 bliver resultatet efter senest yderligere n generationer til 0-sættet. $\mathbf{x}$'s orden er således højst $(M - 1) \cdot (n - 1) + n$. □

Hermed er første del af hovedsætningen om cykliske numeriske differencer bevist. Den sidste del dækkes af følgende sætninger.

Sætning 5 *Hvis* $\mathbf{b}$ *er et binært* n*-sæt, hvor* $n = u \cdot 2^k$*, hvor* u *er ulige, større end* 1 *og* $k \geq 0$*, og så har*

1) $\mathbf{b}$ *endelig orden, hvis* $\mathbf{b}$ *er koordinatmæssig periodisk med perioden* 2^k*.*

2) $\mathbf{b}$ *uendelig orden ellers.* $T^m(\mathbf{b})$ *vil for* m *passende stort gå i periodiske svingninger som funktion af* m.

Bevis:

1) Hvis $k = 0$ er sagen klar, da $\mathbf{b}$ så bliver konstant. Hvis $k > 0$ og $\mathbf{b}$ er et binært $u \cdot 2^k$-sæt, der er koordinatmæssig periodisk med perioden $p = 2^k$, så kan $\mathbf{b}$ skrives som $(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{b}}, \ldots.., \tilde{\mathbf{b}})$, hvor $\tilde{\mathbf{b}}$ angiver de første p koordinater af $\mathbf{b}$ og altså er en repræsentant for perioden. Vi skriver $\tilde{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ og $\mathbf{b}$ kan altså skrives som: $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_p; b_1, b_2, \ldots, b_p; \ldots; b_1, b_2, \ldots, b_p)$ og derfor

$$T(\mathbf{b}) = (|b_p - b_1|, |b_1 - b2_|, |b_2 - b_3|, \ldots, |b_{p-1} - b_p|; |b_p - b_1|, \ldots, |b_{p-1} - b_p|).$$

Det er klart, at $T(\mathbf{b})$ er periodisk, når $\mathbf{b}$ var det, men vi ser også, at de p første koordinater af $T(\mathbf{b})$ er lig med $T(\tilde{\mathbf{b}})$, hvor T nu opfattes som en funktion i mængden af p-sæt. Altså $T(\mathbf{b}) = \big(T(\tilde{\mathbf{b}}), T(\tilde{\mathbf{b}}), \ldots.., T(\tilde{\mathbf{b}})\big)$. Gentages hele dette argument finder vi: $T^m(\mathbf{b}) = \big(T^m(\tilde{\mathbf{b}}), T^m(\tilde{\mathbf{b}}), \ldots.., T^m(\tilde{\mathbf{b}})\big)$. Vi kan nu konkludere, at $\mathbf{b}$ højst har orden p, idet $\tilde{\mathbf{b}}$ ifølge sætning 4 højst har denne orden. Så $\mathbf{b}$ har endelig orden.

2) Vi går igen ud fra $n = u \cdot 2^k$, hvor u er ulige og lader $\mathbf{b}$ være et vilkårligt binært n-sæt. Vi vil vise:

$$T(\mathbf{b}) \text{ er periodisk med perioden } p = 2^k \Rightarrow \mathbf{b} \text{ er periodisk med perioden } p = 2^k.$$

Hvis dette kan vises, så vil et ikke-periodisk $\mathbf{b}$ aldrig efter nok så mange transformationer med T kunne blive periodisk og dermed heller ikke blive til $(0, 0, \ldots, 0)$, der jo bl.a. har perioden 2^k. Vi vil altså have uendelig orden som hævdet i sætningens pkt. 2.

Vi går derfor ud fra, at $T(\mathbf{b})$ er periodisk med perioden $p = 2^k$. Vi vil først vise, at der findes mindst ét i således at $b_{i+p} = b_i$. Antag at dette aldrig er tilfældet, altså at vi for alle i har $b_{i+p} \neq b_i$. Da vore tal befinder sig i $\mathbb{Z}_2$ betyder det, at $b_{i+p} = b_i + 1$ for alle i og dermed $b_{i+2p} = b_i + 2 = b_i$ for alle i o.s.v. således, at $b_{i+up} = b_i + u = b_i + 1$, da u er ulige. Men $b_{i+up} = b_{i+n} = b_i$, hvilket ikke er lig med $b_i + 1$. Denne modstrid viser, at der findes et i således at $b_{i+p} = b_i$. Da ingen plads har særlig forrang i disse cykliske talsæt, har vi lov at antage at $i = 1$, altså at $b_{1+p} = b_1$. Vi har fra hjælpesætning 1, at $T(\mathbf{b})_i = b_i + b_{i-1}$ for alle i. Det kan omskrives til

$$(*) \qquad b_i = T(\mathbf{b})_i - b_{i-1},$$

hvilket kan anvendes til at overføre den periodiske egenskab fra $T(\mathbf{b})$ til $\mathbf{b}$. Vi vil med et induktionsbevis vise at $b_{m+p} = b_m$ for alle m (hvis indeks er større end n regner vi modulo n). Vi har netop vist, at udsagnet passer for $m = 1$. Derfor antager vi, at det gælder for $m < i$ og vil vise, at det også gælder for $m = i$.

Vi antager altså, at $b_{(i-1)+p} = b_{i-1}$ og vil gerne vise at $b_{i+p} = b_i$.

Vi har endvidere $T(\mathbf{b})_{i+p} = T(\mathbf{b})_i$, da vort udgangspunkt er at $T(\mathbf{b})$ er periodisk med perioden p. Vi får nu ved at anvende $(*)$ to gange for $i = i$ og $i = i + p$: $b_i = T(\mathbf{b})_i - b_{i-1} = T(\mathbf{b})_{i+p} - b_{(i-1)+p} = b_{i+p}$, hvorefter induktionstrinnet er bevist, og dermed er første del af påstand 2) bevist. Anden del følger af, at der kun er endeligt mange binære n-sæt, hvorfor $T^m(\mathbf{b})$ på et tidspunkt, som funktion af m, må løbe ind i gentagelser. □

Sætning 6 *Hvis* $\mathbf{x}$ *er et* n*-sæt, hvor* $n = u \cdot 2^k$*,* u *er ulige, og* $k \geq 1$*, så har* $\mathbf{x}$ *endelig orden, hvis* $\mathbf{x}$ *er periodisk med perioden* 2^k*.*

Bevis: Hvis $\mathbf{x}$ er periodisk med perioden $p = 2^k$ (altså at $x_i = x_{i+p}$ for alle i med indices regnet modulo n), så er $T(\mathbf{x})$ også periodisk med perioden p. Thi $T(\mathbf{x})_i = |x_i - x_{i-1}|$ og $T(\mathbf{x})_{i+p} = |x_{i+p} - x_{i+p-1}|$, og de to koordinatdifferenser er ens, da $\mathbf{x}$ er periodisk med perioden p. Men så er også $T\big(T(\mathbf{x})\big)$ periodisk med perioden p ud fra samme argument, og i det hele taget er $T^m(\mathbf{x})$ periodisk med samme periode for ethvert naturligt tal m, hvilket let bevises ved induktion. Ifølge sætning 3 er $T^m(\mathbf{x})$ et binært n-sæt for et passende naturligt tal m. Ifølge det netop beviste er $T^m(\mathbf{x})$ desuden periodisk med perioden p. Ifølge sætning 5 er $T^m(\mathbf{x})$ da af endelig orden, og dermed er $\mathbf{x}$ per definition også af endelig orden. □

Eksempel 2 Sætning 6 karakteriserer ikke endeligt n-sættene af endelig orden, hvis for eksempel $n = 12 = 3 \cdot 2^2$. Sætningen sikrer, at for eksempel $(10, 10, 7, 4, 10, 10, 7, 4, 10, 10, 7, 4)$ har endelig orden, men det har også $(10, 10, 13, 16, 10, 10, 7, 4, 10, 10, 7, 4)$, idet T taget på de to 12-sæt giver samme resultat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	10	10	13	16	10	10	7	4	10	10	7	4
1	6	0	3	3	6	0	3	3	6	0	3	3
2	3	6	3	0	3	6	3	0	3	6	3	0
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Hermed er hovedsætningen vist. Vi har i hovedsætningen hele tiden arbejdet med n-sæt, hvor de enkelte koordinater skulle være ikke-negative hele tal. Men sætningerne gælder for alle de hele tal og alle rationale tal, idet man, som vi har set, kan gange et n-sæt med et helt tal og addere et helt tal uden at det ændrer på sættets orden eller periodicitet. Så et givet n-sæt $\mathbf{q}$ med rationale koordinater ganges først med sættes fællesnævner, og derefter adderes numerisk værdien af det mindste tal i det nu heltallige sæt til alle koordinater. Så har sættet fået ikke-negative heltallige koefficienter og den beviste teori kan anvendes. Alle de beviste sætninger overføres da umiddelbart til $\mathbf{q}$ og altså til alle talsæt med rationale koordinater.

Irrationale koordinater i talkvadratet

Den generelle teori i foregående afsnit gælder i mængden af rationale tal. Vi vil derfor her undersøge, i hvilket omfang teorien kan overføres til de reelle tal, idet vi dog holder os til talkvadratet. Vi vil også undersøge, om der skulle findes en maksimal grænse for ordenen af elementer i talkvadratet.

En eksperimentel undersøgelse med et matematikprogram tyder på hosstående fordeling for firesæts ordner. Dette er, hvad børn ville nå frem til, hvis de vælger talsæt af formen $(0, a, b, c)$, hvor a, b, c vælges frit mellem 1 og 100. Hvor den generelle teori i foregående afsnit kun giver en øvre grænse på $(100 - 1)(4 - 1) + 4 = 301$ for ordenen af sådanne talsæt, giver denne simulering af hvad børn ville finde en maksimal orden på 13. Udvider man talområdet skal man til at tage regnetiden i betragtning, men finder dog op til 1000-grænsen et talsæt som $(0, 298, 460, 548)$ med orden 16.

Hvis man vil prøve at bevise, at man typisk får så lave ordner også med reelle talsæt, så kan man igen nøjes med at betragte talsæt af formen $(0, a, b, c)$, idet man blot fratrækker minimum fra et givet talsæt og forskyder så 0 kommer på førstekoordinaten. Det er for mange kombinationer af de reelle tal a, b, c muligt at bevise, at ordenen er et endeligt og lille tal, som det fremgår af oversigten nedenfor.

En million talsæt

Orden	Hyppighed
0	0
1	0
2	50
3	9900
4	505000
5	176700
6	220700
7	58770
8	21260
9	5512
10	1684
11	360
12	104
13	28
14	0
15	0

Maksimal orden af talsæt på formen $(0, a, b, c)$

	Orden
1) b mindst	≤ 4
2) a mindst	
2.1) $0 \leq a \leq c \leq b$	≤ 6
2.2) $a \leq b \leq c$	
2.23) $a + c \leq 2b$ og $2a \leq b$	≤ 5
2.22) $2b \leq a + c$ og $b \leq 2a$	≤ 7
2.24) $2b \leq a + c$ og $2a \leq b$	
2.241) $0 \leq c + a - 3b$	≤ 8
2.242) $c + 3a - 3b \leq 0$	≤ 8
2.243) $c + a - 3b \leq 0 \leq c + 3a - 3b$	
2.2431) $6b - 2c - 4a$ og $4b - 2c$ har ens fortegn	≤ 9
2.2432) $4b - 2c < 0 < 6b - 2c - 4a$	
2.24321) $0 < 10b - 4a - 4c$ og $0 < 4b + 2a - 2c$	≤ 10
2.24322) $10b - 4a - 4c \leq 0 < 4b + 2a - 2c$	vilkårlig stor!
2.24323) $10b - 4a - 4c \leq 0$ og $4b + 2a - 2c \leq 0$	≤ 8
2.21) $a + c \leq 2b$ og $b \leq 2a$	
2.211) $0 \leq c + b - 3a$ og $0 \leq 3b - 3a - c$	
2.2111) $2a \leq c$	≤ 6
2.2112) $c < 2a$	≤ 8
2.212) $c + b - 3a \leq 0 \leq 3b - 3a - c$	≤ 6
2.214) $c + b - 3a \leq 0$ og $3b - 3a - c \leq 0$	≤ 6
2.213) $3b - 3a - c \leq 0 \leq c + b - 3a$	
2.2131) $4a - 2c \leq 0$ og $4b - 6a \leq 0$	≤ 7
2.2132) $4a - 2c \leq 0 \leq 4b - 6a$	≤ 7
2.2133) $4b - 6a \leq 0 \leq 4a - 2c$	≤ 9
2.2134) $0 \leq 4a - 2c$ og $0 \leq 4b - 6a$	vilkårlig stor!

Som illustration af hvorledes man beviser påstandene i skemaet, gives et udpluk af de vigtigste sætninger. Først ser vi på en hjælpesætning, der ofte benyttes.

Hjælpesætning

1) *Firesæt af formen* (a, b, a, b) *har højst ordenen 2.*

2) *Firesæt af formen* (a, a, b, b) *har højst ordenen 3.*

3) *Firesæt med et adskilt par ens (altså af typen* (x, b, y, b)*) har ordenen højst 4.*

Bevis:

1) $T^2(a, b, a, b) = T(|a-b|, |a-b|, |a-b|, |a-b|) = (0, 0, 0, 0)$.

2) $T(a, a, b, b) = (|a-b|, 0, |a-b|, 0)$, men ifølge 1) har sådanne firesæt højst orden 2. Derfor har (a, a, b, b) højst orden 3.

3) $T(x, b, y, b) = (|x-b|, |x-b|, |y-b|, |y-b|)$, der ifølge 2) har orden højst 3. Derfor har (x, b, y, b) højst orden 4. □

Beviset vil nu dele sig op i en række særtilfælde afhængig af størrelsesforholdene mellem de ikke-negative tal a, b og c. Tilfældene er nummereret som i oversigtsskemaet. Når vi i det følgende taler om, at noget er mindst, så tillader vi, at andet er lige så småt.

1) Hvis b er mindst, så er $T(0, a, b, c) = (c, a, a-b, c-b)$ og $T(c, a, a-b, c-b) = (b, |c-a|, b, |c-a|)$. Her opstår allerede efter to transformationer et firesæt med to par ens og endda af formen omtalt i hjælpesætningens punkt 1, hvis ordenen bliver højst 2. Det følger heraf, at firesæt, der i geometrisk forstand har de to mindste tal stående diametralt modsat, har orden højst 4.

2) Hvis b ikke er mindst, så kan vi tillade os at antage, at a er mindst. Thi hvis c var mindst, kunne vi spejlvende rækkefølgen af koordinater, hvilket klart ikke ville have nogen indflydelse på påstandene i sætningen. Man kan sige, at påstandene er invariante under spejlvending, ligesom de er invariante under cyklisk forskydning, hvilket begge dele er åbenlyst i den originale geometriske repræsentation af problemet.

2.1) Hvis desuden c er mindre end eller lig med b, altså $0 \leq a \leq c \leq b$, så får vi et par adskilte ens allerede efter to transformationer, thi $T^2(0, a, b, c) = T(c, a, b-a, b-c) = (|b-2c|, c-a, |b-2a|, c-a)$. Kombineres med hjælpesætningens punkt 3 ses, at ordenen i dette tilfælde højst bliver 6. Geometrisk udtrykt betyder det, at hvis de to mindste tal i $\mathbf{x}$ står som naboer og de to største også er naboer, men i modsat orden, så har $\mathbf{x}$ højst orden 6.

2.2) Hvis b er mindre end eller lig med c, altså $0 \leq a \leq b \leq c$ så bliver vi nødt til at dele op i mange undertilfælde for at kunne gennemregne resultatet. Allerede $T^2(0, a, b, c)$ giver problemer, idet $T^2(0, a, b, c) = T(c, a, b-a, c-b) = (b, c-a, |2a-b|, |2b-(a+c)|)$ giver symbolsk forskellige resultater afhængigt af om følgende uligheder (2.21 – 2.24) holder:

2.21) Hvis $a + c \leq 2b$ og $b \leq 2a$, så er: $T^2(0, a, b, c) = T(c, a, b-a, c-b) = (b, c-a, 2a-b, 2b-a-c)$. Vi slutter fra ulighederne, at $c-a-b = (a+c)-2a-b \leq$

$2b-2a-b=b-2a\le 0$, hvorfor $a+b-c$ er ikke-negativ og får: $T^3(0,a,b,c) = T(b,c-a,2a-b,2b-a-c) = (a+c-b,a+b-c,|c+b-3a|,|3b-3a-c|)$. Her bliver igen en række undertilfælde.

2.211) Hvis $0\le c+b-3a$ og $0\le 3b-3a-c$, så er $T^3(0,a,b,c) = (a+c-b,a+b-c,c+b-3a,3b-3a-c)$. Heraf bestemmes $T^4(0,a,b,c) = (2c-4b+4a,2c-2b,|2c-4a|,2c-2b)$. I dette tilfælde får vi altså efter fire transformationer et par adskilte ens. Ifølge hjælpesætningen bliver ordenen da højst 8, og i dette tilfælde kan den samlede orden blive 8 for eksempel for $\mathbf{x} = (0,25,46,49)$. Hvis $2a\le c$, kan numerisktegnet hæves, hvorefter det let vises, at $T^5(0,a,b,c)$ har $(4a-2b)$ på alle koordinater og $(0,a,b,c)$ derfor kun får orden 6.

2.212) Hvis $c+b-3a\le 0$ og $0\le 3b-3a-c$, så fås $c+b-3a\le 0\le 3b-3a-c$ eller $2c\le 2b$. Med andre ord er $b=c$ i dette tilfælde, og vi finder $T^3(0,a,b,c) = (a,a,|3a-2b|,|2b-3a|)$. Efter tre transformationer opnår vi altså to par ens. Ordenen bliver i dette tilfælde således højst 6 ifølge hjælpesætningens punkt 2.

2.213) Hvis $0\le c+b-3a$ og $3b-3a-c\le 0$, så er $T^3(0,a,b,c) = (a+c-b,a+b-c,c+b-3a,c-3b+3a)$. Heraf bestemmes $T^4(0,a,b,c) = (2b-2a,2c-2b,|4a-2c|,|4b-6a|)$. For at komme videre skal vi igen opdele i undertilfælde.

2.2131) $4a-2c\le 0$ og $4b-6a\le 0$. Adderes disse uligheder fås: $4b\le 2c+2a$. Sammen med en af de definerende uligheder for 2.21, $a+c\le 2b$ giver det at $a+c=2b$. Kombineres dette med $4a-2c\le 0$ og $4b-6a\le 0$ fås hhv $3a\le 2b$ og $c\le 2a$. Hvis $c<2a$, så er $a+c<3a\le 2b$, eller $a+c<2b$, hvilket strider med $a+c=2b$. Altså er $c=2a$. Heraf følger $a=\frac{2}{3}b$ og $c=\frac{4}{3}b$. Vi kan nu let reducere $T^4(0,a,b,c) = (2b-2a,2c-2b,2c-4a,6a-4b)$ til $(a,a,0,0)$. Vi får altså i dette tilfælde et dobbelt par i fjerde transformation og ordenen bliver ifølge hjælpesætningen højst 7.

2.2132) $4a-2c\le 0\le 4b-6a$. Hæver vi numerisktegnene får vi: $T^4(0,a,b,c) = (2b-2a,2c-2b,2c-4a,4b-6a)$, hvoraf vi kan beregne $T^5(0,a,b,c) = (4a-2b,4b-2a-2c,4a-2b,4b-2a-2c)$. Ifølge hjælpesætningen har et sådant adskilt dobbeltpar orden 2, og ordenen af $\mathbf{x}$ bliver derfor højst 7.

2.2133) $4b-6a\le 0\le 4a-2c$. Hæver vi numerisktegnene får vi: $T^4(0,a,b,c) = (2b-2a,2c-2b,4a-2c,6a-4b)$, hvoraf vi kan beregne $T^5(0,a,b,c) = (|8a-6b|,4b-2a-2c,|4c-2b-4a|,4b-2a-2c)$. Her fremkommer altså et adskilt par efter 5 transformationer. Ifølge hjælpesætningen bliver ordenen af $\mathbf{x}$ højst 9.

2.2134) $0\le 4a-2c$ og $0\le 4b-6a$. Vi vil reducere dette tilfælde til tilfælde 2.24, idet det let vises, at $T^2(0,a,b,c) = (b,c-a,2a-b,2b-a-c)$ henhører under tilfælde 2.24. Problemet er imidlertid som vi straks skal se, at der findes et »hul« i kategorien 2.24, hvor der ikke er øvre grænse på ordnerne. Og i dette tilfælde kan man faktisk havne i hullet 2.24322.

2.214) Hvis $c+b-3a\le 0$ og $3b-3a-c\le 0$, så er $T^3(0,a,b,c) = (a+c-b,a+b-c,3a-b-c,c-3b+3a)$. Heraf bestemmes $T^4(0,a,b,c) = (2b-2a,2c-2b,2b-2a,2c-2b)$, altså to par ens efter fire transformationer. Talsættets orden bliver ifølge hjælpesætningen således højst 6.

Hermed er der gjort rede for alle resultaterne under kategorien 1, 2.1 og 2.21 i oversigtsskemaet. De andre tilfælde bevises på tilsvarende vis.

Talsæt af uendelig orden

Af oversigtsskemaet fremgår, at de allerfleste 4-talsæt har en lille endelig orden. Den eneste kategori, der volder bevistekniske problemer er 2.24322. Hvis man her kunne bevise, at ordnerne havde en uniform øvre grænse ville den samme grænse plus 2 gælde for det andet mulige hul ved 2.2134. Beviset kan imidlertid aldrig findes, idet der findes et positivt irrationalt 4-sæt med uendelig orden. Da et sådant irrationalt talsæt kan approksimeres vilkårlig godt med rationale talsæt, findes der positive rationale talsæt med vilkårlig stor orden og dermed også (ved multiplikation med fællesnævneren) naturlige talsæt med vilkårlig stor orden. Talsættet af uendelig orden findes ved følgende overvejelse: Den eksperimentelle undersøgelse af talsæt med høj orden viser, at de generation efter generation forbliver strengt aftagende – næsten som en geometrisk række – hen gennem koordinaterne. Vi vil derfor prøve at konstruere et talsæt, der beviseligt har denne egenskab, og forsøger med et geometrisk aftagende sæt $(c^3, c^2, c, 1)$ hvor altså $c > 1$. Hvis vi kan bestemme c, således at også $T(c^3, c^2, c, 1)$ er geometrisk aftagende med faktoren $1/c$, så ville vi have at $T(c^3, c^2, c, 1) = k \cdot (c^3, c^2, c, 1)$, og dermed $T^2(c^3, c^2, c, 1) = T\big(k \cdot (c^3, c^2, c, 1)\big) = k \cdot T(c^3, c^2, c, 1) = k \cdot k \cdot (c^3, c^2, c, 1)$. Heraf ses at hele efterslægten til $(c^3, c^2, c, 1)$ ville være en – fra nulrækken forskellig – geometrisk række med faktor c. Heraf ville så følge at $(c^3, c^2, c, 1)$ havde uendelig orden. Men kravet er, at vi kan få $T(c^3, c^2, c, 1)$ til at være geometrisk aftagende med faktoren $1/c$. Da $T(c^3, c^2, c, 1) = (c^3-1, c^3-c^2, c^2-c, c-1)$ er denne betingelse ensbetydende med: $(c^3-1):(c^3-c^2) = c$, $(c^2-c):(c-1) = c$ og $(c^3-c^2):(c^2-c) = c$. Da de to sidste ligheder er opfyldt for enhver værdi af c, finder vi det egentlige krav til c fra den første lighed, der kan omskrives til $c^4 - 2c^3 + 1 = 0$. Vi kan faktorisere $c^4 - 2c^3 + 1$ til $(c-1) \cdot (c^3 - c^2 - c - 1)$. Da løsningen $c = 1$ giver et konstant talsæt, må vi finde brugbare c-værdier blandt løsningerne til $c^3 - c^2 - c - 1 = 0$. Denne tredjegradsligning har imidlertid kun en enkelt reel løsning, der ved Cardanos metode findes til:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{297}+19}{27}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{297}-19}{27}} + \frac{1}{3} = 1.8392867552.$$

Tillægges c denne værdi, vil alle talsæt af formen $k_1 \cdot (c^3 - k_2, c^2 - k_2, c - k_2, 1 - k_2)$, hvor $k_1 \leq 0$ og k_2 er vilkårlige reelle tal, samt cykliske forskydninger og spejlvendinger af sådanne sæt have uendelig orden. Det synes at være et rimeligt »conjecture«, at ingen andre 4-sæt har uendelig orden.

Tilsvarende findes der irrationale n-sæt med uendelig orden for alle andre n som er potenser af 2, fraregnet 2^1. For $n = 8$ findes dette talsæt på analog måde som for $n = 4$. Vi finder således at $T(c^7, c^6, c^5, c^4, c^3, c^2, c^1, 1) = k \cdot (c^7, c^6, c^5, c^4, c^3, c^2, c^1, 1)$, hvor både k og c er positive, netop hvis $c^7 - c^6 - c^5 - c^4 - c^3 - c^2 - c^1 - 1 = 0$, hvilket giver $c = 1.99196419660503$.

Et 16-sæt af uendelig orden bestemmes til

$$(c^{15}, c^{14}, c^{13}, c^{12}, c^{11}, c^{10}, c^9, c^8, c^7, c^6, c^5, c^4, c^3, c^2, c^1, 1)$$

hvor $c = 1.999969$. Ved stigende potens af 2 konvergerer denne c-værdi hurtigt mod 2.

Den gyldne trisektion

Hvis vi deler liniestykket med længden a i tre stykker, der i faldende størrelsesorden benævnes b, c, 1 og inspireret af det gyldne snit forlanger, at $a/b = b/c = c/1$, så fås $b = c^2$ og $a = c^3$. Endvidere skal det hele være lig med summen af delene, altså $c^3 = c^2 + c + 1$, hvilket netop er definitionen på vor c-værdi i foregående afsnits behandling af 4-sæt. Det vil være naturligt at kalde dette en gylden trisektion af liniestykket a.

Inspireret af at det klassiske gyldne snit opnås som grænseværdien af forholdet mellem to på hinanden følgende led i Fibonaccis talfølge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, hvor hvert led er summen af de to foregående, definerer vi en T-følge[2] således:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 1, \quad T_3 = 1, \quad T_4 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\text{og generelt } T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}.$$

Vi vil eksperimentelt sondere om denne følge har vor c-værdi, 1.83928, som grænseværdi for sine kvotienter:

T_n	1	1	1	3	5	9	17	31	57	105	193	355	653	1201
T_n/T_{n-1}	1	1	1	3	1.67	1.8	1.89	1.82	1.84	1.842	1.838	1.839	1.8394	1.8392

Hvis vi går langt ud i talrækken bekræftes denne tendens med så mange decimaler som regnearket råder over. Vi vil her springe over beviset, der naturligt kan trække på ideerne fra det tilsvarende bevis for det klassiske gyldne snit. T-følgen kan bruges til at finde gode heltallige approksimationer til elementet af uendelig orden.

$$T_{22} = 157305 \quad T_{23} = 289329 \quad T_{24} = 532159 \quad T_{25} = 978793$$

Således opnår 4-sættet $(157305, 289329, 532159, 978793)$ ordenen 34, og bliver sandsynligvis (modulo addition af en konstant i alle koordinater) det eneste 4-sæt med tal mindre en 1 million med så høj en orden. Ændres nogle af sættets koordinater med $+1$ eller -1 falder ordenen med cirka 8. Tilsvarende finder vi et 4-sæt med koordinaterne mindre en 100 milliarder og orden lig 61, som det følgende der starter med T_{40}

$$T_{40} = 9129195487 \quad T_{41} = 16791208345 \quad T_{42} = 30883847113 \quad T_{43} = 56804250945$$

Igen er talsættets orden så følsomt, at blot en variation på $+1$ eller -1 i en enkelt koordinat reducerer tallets orden med mindst 16. Så man skal ikke afvige for meget fra den »gyldne middelvej«, der i dette tilfælde er den gyldne trisektion.

Didaktisk efterskrift

En problemstilling som den her behandlede falder uden for det sædvanlig indhold i matematikholdige uddannelser. Men da man nu i stigende omfang går over

[2]Der referes til denne T-følge som Tribonacci følgen i litteraturen om på nettet.

til at beskrive mål i kompetencetermer, kan problemstillingen vise sig pædagogisk interessant, da den trækker på og aktiverer en række matematikkompetencer som tankegangs-, ræsonnements- og problembehandlingskompetencen. De indgår i de danske læseplaner for læreruddannelsen fra sommeren 2004, hvor for eksempel problembehandlingskompetencen beskrives kort som: Strategier og værktøjer til formulering og løsning af matematiske problemer for eksempel: specialisering og generalisering, analyse og syntese, skift af repræsentationsform og brug af relevante hjælpemidler, herunder IT.

I udgangspunktet så vi på en opgave for 3. klasse. Det interessante er imidlertid, at problemstillingen giver anledning til en række delproblemstillinger, som eleven eller den studerende selv kan være med til at opstille og løse på alle niveauer fra 3. klasse til ind på de første år af matematikstudiet. Der er rig mulighed for at eksperimentere ved hjælp af regneark; de vigtigste resultater kan findes eksperimentelt og de letteste beviser er der chancer for at kunne konstruere selv i dialog med læreren.