Pytagoras satt i bås av Liu Hui

D. G. Rogers

Dedicated to Siu Man-Keung: five cycles; six decades; and
a quarter of a century of the history of mathematical ideas
at the University of Hong Kong.

Oversatt og tilrettelagt av Christoph Kirfel

I et lite sammendrag [4] i *Mathematical Spectrum* ble leserne utfordret med to forskjellige uttrykk for radien r av den innskrevne sirkelen i en rettvinklet trekant der katetene har lengde a og b og der hypotenusen har lengde c:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

og

$$r = \frac{ab}{a+b+c}.$$

Noen elementære omforminger skal til for å avsløre at «forsoningen» av disse to likningene ligger i et atskillig mer kjent resultat fra den Euklidske geometrien, nemlig Pytagoras' læresetning:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Kan denne sammenhengen også vises på en rent geometrisk måte? For å kunne svare på dette spørsmålet tar vi en utflukt til den kinesiske geometritradisjonen som man finner i den klassiske oppgavesamlingen, *Jiu Zhang Suan Shu* (Matematiske metoder i ni kategorier, eller, som det vanligvis blir oversatt til, Ni kapitler om matematikkens kunst) og de like klassiske kommentarene fra Liu Hui. *Jiu Zhang Suan Shu* slik den foreligger i dag skriver seg fra minst 1900 år tilbake, mens Liu Hui skriver vel 150 år senere.[1]

Alle de tre nevnte likningene er (nemlig) kjent i en eller annen form i denne tradisjonen. Faktisk er det niende og avsluttende kapittelet i *Jiu Zhang Suan Shu* en samling av oppgaver rundt (1), den berømte sammenhengen som – i kinesisk terminologi – knytter sammen *gou* (kroken), *gu* (beinet, som står loddrett på kroken) og *xian* (buestrengen som strekker seg mellom de åpne endene av kroken og beinet). Det ser også ut som om den kinesiske tradisjonen har foretrukket å arbeide med diameteren $d = 2r$ av den innskrevne sirkelen slik at de to uttrykkene for r fra sammendraget i *Mathematical Spectrum* får følgende ekvivalente form:

$$c + d = a + b \tag{2}$$

og

$$d(a + b + c) = 2ab. \tag{3}$$

Oppgave 16 i det niende kapittelet av *Jiu Zhang Suan Shu* etterspør en demonstrasjon[2] av (3), og Liu Hui gir ikke mindre enn tre i sin kommentar (alle tre er diskutert i [5]).

Liu Hui hadde stor sans for innfallsrike oppdelingsargumenter, slik at et bevis som for oss fortoner seg som et regnestykke med arealer, fortoner seg som pusling med løvsagbrikker for ham. I tillegg er det også på det rene at Liu Hui illustrerte sin tekst med fargerike figurer som hjelp til bedre forståelse. Det er synd at hans demonstrasjon av *gou–gu*-resultatet (1) for oss ser ut til å være ugjennomtrengelig bortsett fra at en kan se at en eller annen form for arealoppdeling må være involvert – tegningene ville vært verd tusen ord, den gang som nå. Hans lesere den gangen kunne nok se klart for seg hva han hadde i tankene.

På den annen side er hans første direkte demonstrasjon av (3) rekonstruert og er et mønstereksempel på eleganse.

Liu Hui hadde enda en demonstrasjon av (3) som benytter seg av formlikheten av noen trekanter. Men her gir vi en annen demonstrasjon[3] som bygger på enda en likning for d:

$$d^2 = 2(c - a)(c - b). \tag{4}$$

[1]Fullstendige oversettelser til og kommentarer på engelsk er først de siste ti årene blitt tilgjengelig (se [1] og [3]). En lett tilgjengelig innføring til denne delen av matematikklitteraturen finnes i [6]. Vi vil også nevne artikkelen [5] skrevet av Siu Man-Keung. I [2] stiller Christopher Cullen seg noe skeptisk til hvorvidt den kinesiske tradisjonen kunne gjøre krav på å ha et «bevis» av (1). Logoen for International Congress of Mathematicians (ICM) som ble avholdt i Beijing i august 2002 (se også figur 4 (i)) legger opp til det.

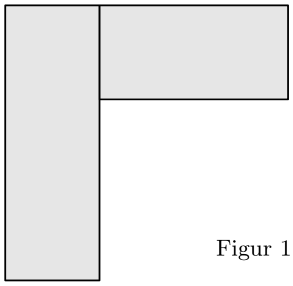
[2]Forfatteren velger betegnelsen «demonstrasjon» i stedet for bevis der han vil understreke at det dreier seg om en geometrisk synlig anskueliggjøring og ikke om en formell algebraisk slutning.

[3]Liu Hui bruker denne likningen til å løse et annet problem fra det same kapittelet, oppgave 12, der man har en stang som har nøyaktig lengden av diagonalen i en rektangulær dør. Gitt at forskjellen mellom stangens lengde og bredden av døren og forskjellen mellom stangens lengde og høyden av døren er kjente størrelser, så var oppgaven å finne målene på døren. I lys av (2) kan svaret gis ved hjelp av (4): $a = c - b + \sqrt{2(c-a)(c-b)}$ og $b = c - a + \sqrt{2(c-a)(c-b)}$.

Mens rekonstruksjonen av Liu Huis demonstrasjon av (3) ved hjelp av (4) ikke er beskrevet i [5], beskriver den foreliggende artikkelen Liu Huis demonstrasjon av (4) ved hjelp av et oppdelingsargument som bygger på (1). Likning (2) må sees på som underforstått, som et slags bindeledd mellom a, b og c.

Vårt formål her er å belyse de nevnte oppdelingsargumentene på nytt og å vise at de kan utrette mye mer. De kan nemlig vise oss ekvivalensen av hvert par av likninger (1), (3) og (4) når (2) er gitt. NB. For trekanter med sider a, b og c med $c \geq a, b$ gjelder (2) der d er diameteren av den innskrevne sirkelen hvis og bare hvis trekanten er rettvinklet.

Vårt hovedredskap viser seg å være et som var velkjent hos kineserne: vinkelhaken (*ju*, se figur 1).



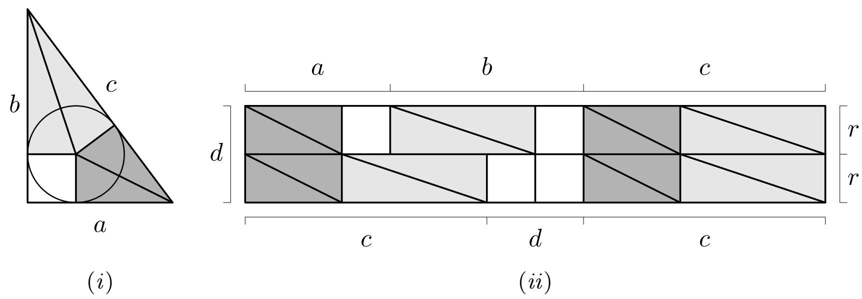
Figur 1

Som vi skal se, passer vår tilnærming bra for dem som liker å arbeide med diameteren i den innskrevne sirkelen. Den gir oss også noen ideer om hvordan Liu Hui kan ha tolket sitt arbeide. Som den eksperten han var, kommenterte han en allerede vel etablert tekst. Vi kan nok gå ut fra at han kunne løse oppgavene både forlengs og baklengs og visste godt hvordan han kunne komme fra det ene resultatet til det andre i en konsistent sirkel av argumenter.

Særlig er det interessant å se at Liu Huis oppdelingsargumenter ikke alltid er rene oppdelinger. Noen ganger blir en figur delt opp på en smart måte og så satt sammen igjen på en ny måte. Andre ganger tillater Liu Hui argumenter der figurer får samme areal på grunnlag av utfylling og likevekt medberegnet kompensasjon for overlapping.

Liu Hui starter sin demonstrasjon av (3) ved å skjære den rettvinklete trekanten med kateter a og b og hypotenus c opp i et kvadrat med sidelengde r (hvit) i hjørnet og to par kongruente trekanter (lys og mørk grå) som i figur 2 (i). Også kvadratet kan sees på som et par kongruente trekanter. Delene fra fire slike rettvinklete trekanter kan så bli plassert slik at de danner et langt rektangel med bredde d og lengde $a + b + c$ som i figur 2 (ii). Dermed blir (2) synlig:

$$a + b = c + d.$$



Figur 2

Vår målsetning er nå å omplassere delene fra de fire oppskårne rettvinklete trekantene slik at de former en vinkelhake med bredde d og der den ytre beinlengden er $a+b$ og hvor den indre beinlengden er c som i figur 3 (i). For denne omorganiseringen trenger vi faktisk fire trekanter. Ved å se på de indre og ytre målene til vinkelhaken ser vi igjen (2):

$$a + b = (a - r) + (b - r) + 2r = c + d.$$

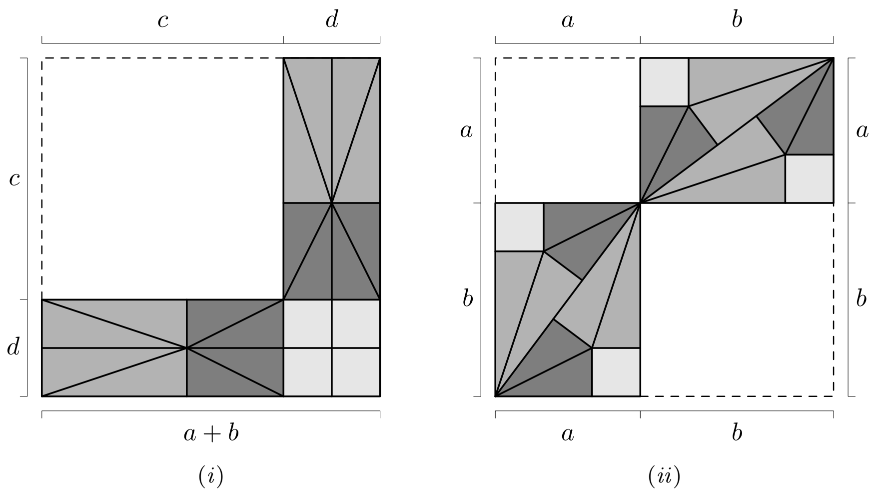
I tillegg er det minst like innlysende som ved figur 2 (ii) at arealet av vinkelhaken er

$$d(a + b + c),$$

selv om man også kunne bli fristet til å se arealet som

$$2dc + d^2 \quad \text{eller} \quad 2d(a + b) - d^2$$

avhengig av hvordan vi hanskes med kvadratet i hjørnet. Men vinkelhakedemonstrasjonen gjør det klarere hva slags figur som trengs for å fylle ut et kvadrat av lengde c til et kvadrat av lengde $c+d$ som i figur 3 (i). På den andre siden gjør vår lange erfaring med å kvadrere $a+b$ at vi lett kjenner igjen uttrykket $2ab$: to rektangler med lengde a og bredde b er presis det vi trenger for å komplettere to kvadrater av lengde a og b til et kvadrat av lengde $a+b$ (se figur 3 (ii)).



Figur 3

Siden de to store kvadrater har samme areal på grunn av (2), må også området som fyller ut vinkelhaken på den ene siden og områdene som fyller ut de to kvadratene på den andre siden ha samme areal. Dermed har vi altså *gou–gu*-resultatet (1):

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

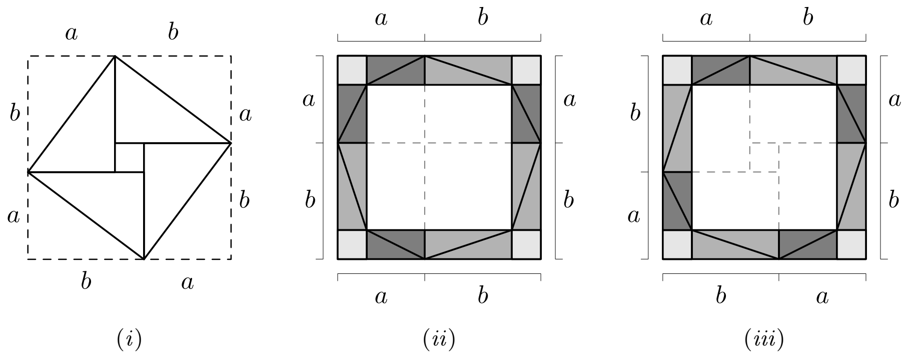
På samme måte viser en sammenlikning av figurene 3 (i) og 2 (ii) at (1) og (2) impliserer (3) igjen ved utfylling. Derfor er (1) og (3) ekvivalente så lenge (2) er gitt. Men siden Liu Hui har en direkte demonstrasjon av (3), så har han også i det minste implisitt en demonstrasjon av (1), selv om det er en som bygger på utfylling i stedet for direkte oppdeling. Dermed har vi et svar på vårt utgangsspørsmål.

Som en kuriositet kan vi også nevne at paret av rektangler i figur 3 (*ii*) sammenlagt ikke bare har samme areal som rektanglet i figur 2 (*ii*) eller vinkelhaken i figur 3 (*i*), men også omkretsene av alle disse figurene er like.

At $2ab$ er nøyaktig det vi trenger å addere til c^2 for å få $(a+b)^2$, er essensen i demonstrasjonen av *gou–gu*-resultatet i figur 4 (*i*). En litt mindre velkjent fortjeneste av figur 4 (*i*) er at den gir et geometrisk bevis for at det aritmetiske middel alltid er minst så stor som det geometriske:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Det er nemlig ekvivalent til observasjonen at det lille kvadratet som er omringet av de fire rektanglene ikke har et negativt areal.

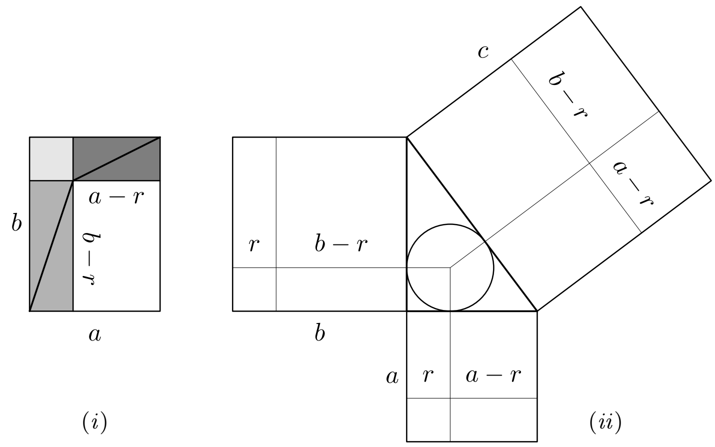


Figur 4

Den foreliggende tilnærmingen ved hjelp av vinkelhaker kan sies å «rette opp bildet» for å bruke en kinesisk vending. Faktisk kan figur 3 (*i*) lett bli forandret slik at den viser en «ramme» av bredde r rundt kvadratet av sidelengde c. Hver av dem inneholder den underliggende oppdelingen av det ytre kvadratet som i figur 4 (*ii*) eller en syklisk oppdeling som i figur 4 (*iii*). Her kan man forestille seg en animasjon der oppdelingen brytes opp og delene snurrer av sted og legger seg pent på plass i en ny anordning bare for å skifte plass på ny i en evig runddans av variasjoner.

Det finnes enda en artig «ommøblering» av arealbitene. Rammen rundt kvadratet av sidelengde c i figur 4 (*iii*) består av en følge av fire vinkelhaker der hver slik vinkelhake har areal som halvparten av et rektangel med bredde a og lengde b, dvs. det samme arealet som hver av de fire ytre trekantene i figur 4 (*i*).

Sammenlikner vi figur 2 (*i*) og 5 (*i*), ser vi at vinkelhaken med bredde r i et rektangel med sidelengder a og b opptar halvparten av plassen. Derfor må selvsagt komplementet til vinkelhaken i rektangelet, nemlig det lille rektangelet med bredde $a-r$ og lengde $b-r$, ta like stor plass. Vinkelhaken består av rektangulære striper av bredde r langs sidene av rektangelet. Stripene overlapper i et kvadrat med



Figur 5. Alle firkanter som *ligner* kvadrater, *er* kvadrater.

sidelengde r. Vinkelhaken har derfor følgende areal:

$$ra + rb - r^2 = r(a + b - r).$$

Derfor har vi

$$r(a + b - r) = \frac{ab}{2} = (a - r)(b - r) \tag{5}$$

som tillater oss å arbeide kun med radien r, noe som bryter med den kinesiske tradisjonen, hvis vi ønsker det.

Her må det understrekes at den første likningen i (5) er basert på et oppdelingsargument som forvandler en rettvinklet trekant i en vinkelhake, mens den andre bare gjenspeiler utfyllingen uten noe forslag til en liknende oppdeling. Denne typen argumenter blir senere utnyttet i våre undersøkelser av oppgave 15 fra det niende kapittelet av *Jiu Zhang Suan Shu* som vi tar opp avslutningsvis.

I figur 5 (*ii*) ser vi nå både en rekonstruksjon av de rektangulære områdene fra figur 4 (*ii*) og en rettferdiggjøring for hvorfor nettopp denne oppdelingen gir oss en ny demonstrasjon av *gou–gu*-resultatet.

La oss nå se på Liu Huis indirekte demonstrasjon av (3) med utgangspunkt i (4). Som nevnt i [5] gir Liu Hui kun en slags «fuskelapp» som består av 4 likninger:

$$d = a - (c - b) \tag{α}$$

$$d = b - (c - a) \tag{β}$$

$$d = (a + b) - c \tag{γ}$$

$$d = \sqrt{2(c - a)(c - b)}. \tag{δ}$$

Selvsagt er (α), (β) og (γ) ikke noe annet enn omformuleringer av (2) mens (δ) er selveste (4). Men hva skal vi gjøre med disse hintene?

Selvsagt inviterer (α) og (β) til å lage en vinkelhake med bredde d i et rektangel med dimensjoner a og b. Samtidig inviterer det oss til å se på vinkelhakens komplement som et rektangel med sidelengder $a-d=c-b$ og $b-d=c-a$ som i figur 6 (i). Ved å samle sammen bitene som i argumentet som førte oss til (5) får vi

$$ab = d(a+b-d) + (c-a)(c-b).$$

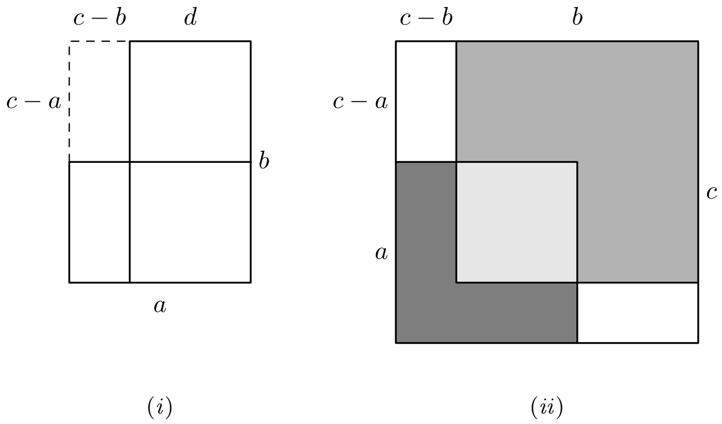
Ved å duplisere bildet for å få $2ab$ og ved å bruke (γ) og (δ) kan vi se at

$$2ab = d(a+b+a+b-d) + 2(c-a)(c-b) - d^2.$$

Det betyr at hvis vi bruker (2) så har vi

$$2ab = d(a+b+c) + 2(c-a)(c-b) - d^2, \tag{6}$$

som faller sammen med (3) i lys av (δ). Men (6) viser også at gitt (3) så får vi (4). Altså er (3) og (4) ekvivalente når (2) er gitt.



Figur 6

I sin demonstrasjon av (4) med utgangspunkt i (1) betrakter Liu Hui et kvadrat med sidelengde c med kvadrater av sidelengde a og b plassert i motstående hjørner som i figur 6 (ii) (hentet fra [5]). Disse indre kvadratene overlapper da i et nytt kvadrat med sidelengde $a+b-c=d$ (lysegrå) mens vinkelhakene på hver sin side er mørkere grå. Her er ingen sammenheng med fargeleggingen i figur 2. Ved å samle sammen bitene og ved å ta hensyn til det overlappende kvadratet ser vi at

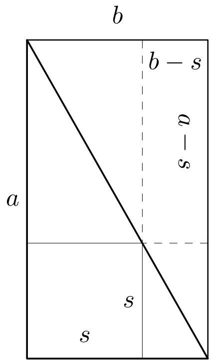
$$c^2 = a^2 + b^2 - d^2 + 2(c-a)(c-b). \tag{7}$$

Altså, gitt (1) så har Liu Hui vist (4). Men siden (7) tillater implikasjonen begge veier, har vi at (1) og (4) faktisk er ekvivalente forutsatt at (2) gjelder.

Som et avsluttende eksempel kan vi se på en oppgave fra det niende kapittel av *Jiu Zhang Suan Shu* som ikke tas opp i verken [5] eller [6]. Oppgave 15 spør etter det største kvadratet som kan innskrives i en rettvinklet trekant. Anta at sidelengden til dette kvadratet er s og se på en vinkelhake med bredde s i et rektangel med sider a og b. Siden kvadratet i hjørnet er størst mulig, må det indre hjørnet av vinkelhaken ligge på diagonalen av rektangelet som omslutter vinkelhaken som i figur 7. Figur 7 inviterer til et argument med formlikhet, men her ønsker vi å følge mønsteret fra (5).

På den ene siden vil de triangulære delene i vinkelhaken over diagonalen av rektangelet i figur 7 ha like stort areal som de triangulære delene under diagonalen. Siden nå diagonalen deler hele rektangelet i to like store deler, må også arealet av det mindre rektangelet utenfor vinkelhaken være lik med kvadratets areal i det andre hjørnet. Det betyr

$$(a-s)(b-s)=s^2.$$



Figur 7

På den andre siden kan vi igjen se på vinkelhaken som to striper som overlapper i et kvadrat med sidelengde s. Vinkelhakens areal blir da

$$sa+sb-s^2.$$

Setter vi sammen delene til det opprinnelige rektangelet og har de to siste observasjonene i bakhodet, så får vi

$$ab=sa+sb-s^2+(a-s)(b-s)=s(a+b).$$

Dermed har vi også svaret til oppgave 15, nemlig

$$s=\frac{ab}{a+b}.$$

Sammenfattende kan vi si at Liu Huis oppdelingsargumenter på ingen måte var av en ensartet type. Delene i hans oppdelingsargument for å kunne besvare spørsmålet om diameteren i den innskrevne sirkelen kan potensielt settes sammen til en demonstrasjon av *gou–gu*-resultatet. Dette kan tenkes å skje ved å omforme arealer ved hjelp av vinkelhaker. Om det var slik Liu Hui så det for seg er selvsagt en helt annen sak.

Bibliografi

[1] C. Cullen, *Astronomy and Mathematics in Ancient China.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] C. Cullen, Learning from Liu Hui? A different way to do mathematics. *Notices Amer. Math. Soc.* **49** (2002), 783–790.

[3] A. W.-C. Lun, J. N. Crossley, and K.-S. Shen, *Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford University Press, Oxford, 1999.

[4] D. W. Sharpe, Editorial capsule, *Mathematical Spectrum* **35** (2002/3), No. 3, 68.

[5] M.-K. Siu, Proof and pedagogy in ancient China: examples from Liu Hui's commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*, *Educational Studies in Math.* **24** (1993), 345–357.

[6] P. D. Straffin, Jr., Liu Hui and the first Golden Age of Chinese mathematics, *Math. Magazine* **71** (1998), 163–181.