Arabernes matematikk 2*

Audun Holme

Matematisk institutt
Johs. Brunsgate 12
Universitetet i Bergen
NO–5008 Bergen
holme@mi.uib.no

1 Sharaf al-Din al-Tusi

Sharaf al-Din er kjent under flere navn, i boken [9] brukes navnet al-Tusi. Han ble født i 1135 i provinsen Tus nord-vest i Persia, og døde i 1213. En vet ikke om han kom fra byen *Tus* i provinsen ved samme navn, eller om han kom fra Nishapur, i nærheten av Tus. Det var jo byen som al-Khayyami kom fra og studerte i, og disse to matematikerne kom altså fra det samme intellektuelle miljøet.

Sharaf skal ha undervist i Damaskus rundt 1165. De seljukiske tyrkerne hadde erobret denne byen i 1154, og gjort den til sin hovedstad. I Damaskus underviste Sharaf i Euklids og Ptolemaios' verker, før han flyttet til Aleppo, som etter Damaskus var den nest største byen i området.

Byen Aleppo hadde 50 år tidligere holdt stand mot korsfarernes beleiring, og Sharaf underviste her i matematikk, astronomi og astrologi. Aleppo hadde en befolkning med betydelige innslag av både muslimer og jøder, og han hadde elever fra begge disse gruppene.

*Første del av artikkelen sto i forrige nummer av Normat.

Fra Aleppo dro Sharaf videre til byen *Mosul*, nord-vest i dagens Irak ved elven Tigris. Mosul hadde sin storhetstid på denne tiden, under *zangid-dynastiet*. Her fikk Sharaf en berømt elev ved navn *Kamal al-Din ibn Yunus*, som igjen ble lærer for den store *Nasir al-Din al-Tusi*, som vi forteller om i avsnitt 5. Sharaf var nå blitt berømt, og studenter flokket seg til hans undervisning fra hele Midtøsten.

En regner med at Sharaf fortsatt oppholdt seg i Mosul da en annen tidligere beboer av byen rykket inn i området i spissen for sin hær: Det var kurderen *Salah al-Din Yusuf*, som vi kjenner under navnet «Saladin». Saladin tok Damaskus i 1174, og på denne tiden forlot Sharaf Mosul og dro til Bagdad, der han ble resten av sitt liv.

Sharaf forbedret al-Khayyamis metoder i behandlingen av ligninger av grad 3. Også han startet med å klassifisere disse ligningene i grupper, men hans inndeling er en annen enn al-Khayyamis. Grunnen til dette var at han ønsket å analysere betingelser på ligningenes koeffisienter som kunne avgjøre *antall løsninger*. Her går han dypere inn i teorien enn al-Khayyami. R. Rashed fremholder i [9] at Sharafs algebra peker frem mot en algebra som studerer kurver ved hjelp av ligninger, og slik sett representerer begynnelsen til algebraisk geometri. Sharaf har 25 grupper av ligninger med grad høyst 3.

Den første gruppen til Sharaf har 12 ligninger, og består av de ligningene som reduseres til annengradsligninger, *og* ligningen $x^3 = d$. Den andre gruppen består av åtte typer som alle har minst en positiv løsning, mens den tredje gruppen, som består av fem typer, er de ligningene som for noen verdier av koeffisientene har, for andre ikke har, positive løsninger.

Når det gjelder den andre gruppen av ligninger, gir han samme løsningsmetode som al-Khayyami, nemlig ved kjeglesnitt. Men Sharaf gir omhyggelig begrunnelse for at de to kjeglesnittene faktisk skjærer hverandre.

Den tredje gruppen behandler han på en ny og original måte. Som da vi behandler al-Khayyamis arbeid, tar vi utgangspunkt i vår moderne notasjon, og kan da beskrive de fem typene ved følgende standardformer, der alle koeffisientene er positive tall:

$$x^3 + d = bx^2 \tag{1}$$

$$x^3 + d = cx \tag{2}$$

$$x^3 + bx^2 + d = cx \tag{3}$$

$$x^3 + cx + d = bx^2 \tag{4}$$

$$x^3 + d = bx^2 + cx \tag{5}$$

Vi skal illustrere metoden til Sharaf ved å behandle to av ligningene på denne siste listen, og vi begynner med den første, nemlig

$$x^3 + d = bx^2.$$

Denne omformer han først til

$$x^2(b - x) = d.$$

Ligningen vil da ha en løsning dersom det finnes et tall x slik at uttrykket til venstre oppnår verdien d, ellers ikke. Dersom $x = 0$ er dette uttrykket 0, og det samme er tilfelle dersom $x = b$. Mellom disse verdiene av x vil uttrykket $x^2(b-x)$ først øke og senere avta til 0 igjen. Problemet er med andre ord å finne den maksimale verdien som dette uttrykket kan ha for positive verdier av x. Dersom denne verdien er større enn eller lik d, tar han det for gitt at det må finnes en verdi $x = x_1$ mellom 0 og b slik at $x_1^2(b-x_1) = d$. Da vil $x = x_1$ være en løsning av ligningen. Med våre dagers krav til stringens vil vi si at denne observasjonen krever et bevis, og her er det avgjørende at det *vi* kaller *funksjonen* $y = f(x) = x^2(x-b)$ er *kontinuerlig* mellom verdiene $x = 0$ og $x = b$.

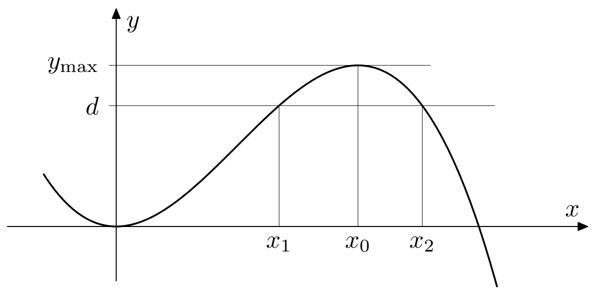
Sharaf sier så at den maksimale verdien til uttrykket $x^2(b-x)$ for positiv x blir antatt for $x = x_0 = \frac{2}{3}b$. Og dette er helt riktig! Men en er absolutt i villrede om hvorledes han har kommet frem til dette resultatet. Noen mener at han rett og slett har *gjettet*, ut fra et resultat i Euklids Elementer, der det tilsvarende problemet for $x(b-x)$ er løst: Dette uttrykket antar sin største verdi for positiv x ved $x = \frac{1}{2}b$. Andre mener at han har studert Arkimedes' skrift om *Kulen og Sylinderen* omhyggelig, der et lignende problem er studert. En annen mulighet er at Sharaf har gjennomført et resonnement som langt på vei har foregrepet moderne derivasjon. For vi har jo at den deriverte er null der maksimum oppnås. Den deriverte av $y = x^2(x-b)$ er $y' = 3x^2 - 2xb$, som er 0 for $x = x_0 = \frac{2}{3}b$.

I alle tilfelle, når en setter inn $x = x_0 = \frac{2}{3}b$ i $x^2(b-x)$ får en at den maksimale verdien i så fall blir $y_{\max} = \frac{4}{27}b^3$, og Sharaf gir et fullstendig riktig geometrisk bevis for at dette er den maksimale verdien som $y = x^2(b-x)$ kan anta for positiv x.

Vi får *to verdier* av x, nemlig x_1 og x_2, som gir løsninger dersom

$$d \leq \frac{4}{27}b^3.$$

Med likhet blir $x_1 = x_2 = x_0$.



Vi ser så på ligning nr. 2 på denne listen:

$$x^3 + d = cx,$$

som han skriver

$$x(c - x^2) = d.$$

Sharaf bemerker først at dersom x er en (positiv) rot i ligningen, må $c - x^2 \geq 0$, slik at $x^2 \leq c$, altså $x \leq \sqrt{c}$. Som før finner Sharaf at uttrykket $y = c - x^2$ oppnår sitt maksimum for $x = x_0 = \sqrt{c/3}$. Innsatt i uttrykket for y gir dette den maksimale verdien til $y_{\max} = \frac{2}{3}c\sqrt{c/3}$, så betingelsen for at det skal finnes en positiv rot er

$$d \leq \frac{2c}{3}\sqrt{\frac{c}{3}}$$

eller ekvivalent

$$d^2 \leq \frac{4c^3}{27},$$

en betingelse som kan skrives

$$0 \leq \left(\frac{c}{3}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Vi ser at det også her vanligvis finnes to positive løsninger.

De to eksemplene fra Sharafs liste som vi har gått gjennom, gir begge et kriterium for at ligninger av den foreskrevne typen har mer enn en løsning. Kriteriene er tilsynelatende nokså forskjellige – ligningen

$$x^3 + d = bx^2$$

har mer enn en løsning hvis og bare hvis

$$d \leq \frac{4}{27}b^3,$$

og ligningen

$$x^3 + d = cx$$

har mer enn en løsning hvis og bare hvis

$$0 \leq \left(\frac{c}{3}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Begge disse kriteriene er spesialtilfeller av *et generelt kriterium*, som fikk sin endelige form mye senere. Vi skal nå kaste et blikk mange hundre år fremover fra Sharafs tid, og forklare dette kriteriet.

Vi begynner med den generelle annengradsligningen. Vi krever ikke lenger at koeffisientene er positive, og vi vil nå behandle både positive og negative løsninger, faktisk også komplekse eller som vi også sier *imaginære* løsninger.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{der } a \neq 0.$$

Den generelle løsningen til denne ligningen er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vi får altså to uttrykk

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{og} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

og dersom uttrykket under rottegnet er negativt, har ligningen ingen (reelle) løsninger. Men i dag regner vi med komplekse tall, og regner med kvadratroten av et negativt tall. Det tok lang tid før matematikere og matematikkbrukere ble fortrolig med dette. Her skal vi se ett av skrittene på veien til en full aksept av komplekse tall: Vi skal regne ut en sammenheng mellom reelle tall, og i utregningen *later vi som om* kvadratroten av et negativt tall har mening. Dette gjør vi under hele utregningen, og så til slutt faller alle negative kvadratrøtter bort, og vi sitter igjen med et faktum om vanlige reelle tall!

Så nå skal vi late som om x_1 og x_2 er tall, selv om det kan hende står et negativt tall under rottegnet. Vi regner ut

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

og får at

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Dette tallet betegner vi med D_2, og kaller det for *ligningens diskriminant.* Vi har nå dette resultatet: En annengradsligning har (reelle) røtter hvis og bare hvis $D_2 \geq 0$.

Det er praktisk å dividere med koeffisienten for x^2, slik at ligningen blir

$$x^2 + bx + c = 0,$$

da er diskriminanten

$$D_2 = b^2 - 4c.$$

Vi betrakter så den generelle tredjegradsligningen, der vi har dividert med koeffisienten for x^3:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Også denne ligningen lar seg løse ved rottegn, ved den såkalte *Cardanos formel.* Men her skal vi ikke bruke dette. Vi definerer diskriminanten for tredjegradsligningen ved hjelp av røttene til ligningen, uten å bruke denne formelen: Vi setter

$$D_3 = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

og helt analogt defineres diskriminanten D_n til en ligning av grad n.

Vi ser at dersom en tredjegradsligning har 3 forskjellige (reelle) røtter, da er $D_3 > 0$, og dersom to er sammenfallende, da er $D_3 = 0$. Men også det omvendte gjelder, som vi kan se i [6] der vi også forteller om Cardanos formel.

En kan bevise at generelt lar D_n seg uttrykke ved koeffisientene til n-tegradsligningen, på samme måte som for $n = 2$. Spesielt har vi dette resultatet:

$$D_3 = -27d^2 + 18bcd + b^2c^2 - 4b^3d - 4c^3.$$

Sharaf fant kriterier for når det er mer enn en positiv løsning av de ligningene han behandlet i den tredje gruppen. Vi ser på den første ligningen, som vi skriver slik:

$$x^3 - bx^2 + d = 0.$$

Vi setter koeffisientene $-b$, 0, d inn i formelen for D_3 ovenfor. Det gir

$$D_3 = -27d^2 + 4b^3d,$$

så $D_3 \geq 0$ hvis og bare hvis

$$d \leq \frac{4}{27}b^3,$$

altså nettopp det resultatet som Sharaf fant.

Den andre ligningen er

$$x^3 - cx + d = 0$$

og vi får i dette tilfellet

$$D_3 = -27d^2 + 4c^3,$$

som er ≥ 0 hvis og bare hvis

$$0 \leq \left(\frac{c}{3}\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

altså igjen Sharafs resultat.

Sharaf beregnet dessuten numeriske løsninger av ligningene i de klassene han studerte. Et eksempel som er gjengitt i [8] er

$$x^3 + 14837904 = 465x^2,$$

der han finner de to løsningene $x_1 = 321$, $x_2 = 298{,}73$.

På andre ligninger bruker han den såkalte Ruffini–Horners metode, som er forklart i [4].

2 Al-Biruni

Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni ble født i 973 i Kath i Khwarizm og døde i 1048. I dag har fødebyen navnet *Birjand* etter sin store sønn. Allerede som 17-åring var han i gang med vitenskapelig arbeid, i 990 fant han breddegraden for Kath ved å observere solens maksimale høyde over horisonten. Før 995 hadde han skrevet flere korte arbeider. I ett av disse behandler han kartprojeksjoner. Til tross for sin unge alder hadde han levert betydelige vitenskapelige arbeider, og var meget kunnskapsrik. Men så endret al-Birunis liv seg drastisk på grunn av de politiske begivenhetene. *Abu Nasr Mansur* var al-Birunis lærer, han var prins i den regjerende kongefamilien. Men i 995 ble herskeren styrtet, og al-Biruni måtte flykte.

Nøyaktig hvor han dro hen er usikkert, men en vet at han foretok astronomiske observasjoner i Rayy, nær nåværende Teheran, men at han levde i fattigdom.

En viktig kilde til informasjon om hvor al-Biruni oppholdt seg til ulike tider, er de observasjonene av astronomiske begivenheter som han har nedtegnet.

For eksempel beskriver han en måneformørkelse 24 mai 997 i Kath, som viser at han da hadde vendt tilbake dit. Denne formørkelsen var også synlig i Bagdad, og al-Biruni hadde avtalt med Abu'l-Wafa at han skulle observere den der. Ved å sammenligne tidspunktene kunne de så beregne differansen i lengdegrad for de to byene.

Vi vet at 4. juni 1004 var al-Biruni tilbake i hjemlandet. Da observerte han nemlig igjen en formørkelse.

Abu Arrayhan Muhammad
ibn Ahmad al-Biruni

Herskerne, de to brødrene *Ali ibn Ma'mun* og *Abu'l Abbas Ma'mun* var beskyttere av vitenskapen og holdt seg med flere fremragende vitenskapsfolk ved hoffet. Al-Biruni ble en av dem, og dessuten hans tidligere lærer Abu Nasr Mansur.

Men krig og uro skulle på ny avbryte det vitenskapelige arbeidet. Både al-Biruni og Abu Nasr Mansur måtte forlate Khwarizm omkring 1017. Saken er at erobreren *Mahmud av Ghazni* hadde krevd av Abu'l Abbas Ma'mun at hans navn skulle tas med i fredagsbønnen. Dette hadde han forlangt i 1014, det var et åpenbart signal om at han ville ta kontroll med denne regionen. Ma'mun var ikke sterk nok til å motsette seg dette, og gikk med på kravet. Men hans egen hær anså dette for forræderi, og drepte sin leder. Dermed rykket Mahmud med sin hær inn i landet, og tok byen Kath 3 juli 1017.

Både al-Biruni og Abu Nasr Mansur fulgte nå med den seierrike Mahmud, reelt sett som fanger.

I tiden som fulgte fremgår det av al-Birunis skrifter at han hadde det svært vanskelig, men han fikk også anledning til å utføre vitenskapelig arbeid. Igjen er det observasjonene som gir en pekepinn om al-Burunis oppholdssteder. Han observerte en solformørkelse i Kabul 14 oktober 1018, med instrumenter som han hadde måttet lage selv av ting han hadde for hånden.

Mellom 1018 og 1020 gjorde al-Biruni observasjoner fra Ghazni som muliggjorde bestemmelse av byens breddegrad.

Al-Biruni var fange hos Mahmud, men Mahmuds militære ekspedisjoner gjorde det mulig for ham å foreta observasjoner over store områder. Han kom til India, og Mahmud trengte helt frem til det Indiske Hav. Al-Biruni skrev et berømt arbeid med tittel *India* som ble til som et resultat av disse reisene.

I dette verket beskriver han religion, filosofi, kastesystem og andre sider ved samfunnet. Geografi, skriftsystem og tallsystem behandles også, dessuten astronomi, astrologi og kalender.

Al-Biruni lærte seg sanskrit og oversatte tekster på sanskrit til arabisk. Mahmud døde i 1030 og ble etterfulgt av sønnen *Mas'ud*, etter en vanskelig arvestrid med en bror. Mas'ud behandlet al-Biruni bedre enn faren hadde gjort, han var nå fri til å reise hvor han ville.

Mas'ud ble imidlertid drept i 1040, og sønnen *Mawdud* hersket i åtte år. Al-Biruni var nå en gammel mann, men var vitenskapelig aktiv helt til sin død.

Al-Birunis astronomiske observasjoner representerer en stor forbedring fra Ptolemaios. Ptolemaios valgte ut de observasjonene han mente var mest pålitelige, og kastet de andre. En særdeles tvilsom vitenskapelig metode. Ofte innebar dette at de observasjonene som ikke passet med hans egen teori ble kastet! Dette betrakter vi i dag som regelrett forskningsfusk. Al-Biruni derimot tok vare på alle observasjonene, og dersom noen av dem ikke ble brukt, tok han dem likevel med i den skriftlige fremstillingen.

På den matematiske siden finner vi også noe nytt og viktig: nemlig et bevisst forhold til avrundingsfeil. Han valgte å ta utgangspunkt i slike observerbare størrelser at antall påkrevde regneoperasjoner ble minst mulig. Dette er selvsagt et sentralt poeng når en ønsker å minimalisere feilgrensene.

Ett av de viktigste verkene til al-Biruni har tittelen *Skygger*. Det skal stamme fra rundt 1021. Fenomener knyttet til skygge spiller en stor rolle i matematikkens historie: Vi kan for eksempel tenke på soluret og gnomon-begrepet, som vi har forklart i [4]. Al-Biruni behandler det vi kaller tangens- og sekantfunksjonene, observasjon av skygger for å løse ulike astronomiske oppgaver, og de skyggebestemte tidene for muslimenes bønner.

Han arbeidet med ideer som enkelte har sett som forløper for metoden med polarkoordinater, og skrev om teoretisk og praktisk aritmetikk, irrasjonale tall, algebraiske ligninger, konstruksjonsoppgaver med passer og linjal, kjeglesnitt og sfæriske triangler.

3 Abu'l-Wafa

Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani ble født i Buzjan, i dagens Iran og døde 998 i Bagdad. Han arbeidet ved kalifens hoff i Bagdad fra 959, i et aktivt faglig miljø.

Abu'l-Wafa oversatte og skrev kommentarer til Euklid, Diofantos og Ptolemaios. Mellom 961 og 976 skrev han boken *Kitab fi ma yahtaj ilayh al-kuttab wa'l-ummal min 'ilm al-hisab*, «Boken om det skrivere og forretningsmenn trenger å vite fra aritmetikken».

Selv om Abu'l-Wafa var ekspert på regning med de indiske tallsymbolene, måtte han skrive denne teksten basert på fingerregning. Hans målgruppe foretrakk det fremfor å gi seg i kast med den indiske metoden. Men han bruker negative tall, disse betegner han som «gjeld».

En annen bok han skrev handlet om geometriske konstruksjoner som håndverkere trenger. Her finner en beskrivelse på konstruksjon av tegne-instrumenter, konstruksjon av rette vinkler, tilnærmet vinkeltredeling, konstruksjon av parabler, regulære polygoner innskrevet og omskrevet en sirkel, innskriving av polygoner i en annen gitt polygon og oppdeling av plane og sfæriske figurer.

Et meget interessant poeng ved Abu'l-Wafas konstruksjoner, er at han prøver å utføre så mange som mulig ved passer og linjal, og når *det* ikke er mulig bruker han tilnærmede konstruksjoner. Dessuten, og her er det interessante poenget, så er det en klasse av problemer som han løser ved det vi idag kaller *en rusten passer* og linjal: Det er en passer som har en fast åpning, som ikke forandres under konstruksjonen. For mer om problemstillinger av denne typen viser vi til [5]. En god praktisk grunn for å benytte denne type konstruksjon, er at den blir mer nøyaktig enn når passeren er hengslet og dessuten hele tiden skal stilles om.

Men Abu'l-Wafa er best kjent for sitt arbeid med det vi kaller *de trigonometriske funksjonene*. Han bruker det vi kaller funksjonen $y = \tan(x)$ for første gang, han regnet ut tabeller over sinus og tangens av vinklene med intervaller på $15'$, dette arbeidet var en del av hans arbeid med månens bane på himmelkulen. Han innførte også begreper som er ekvivalente med de moderne funksjonene *secant* $y = \sec(x) = 1/\cos(x)$ og *cosecant* $y = \csc(x) = 1/\sin(x)$. Men på denne tiden arbeidet en selvsagt ikke med funksjoner slik vi gjør. I stedet var det visse grunnleggende *linjestykker* som ble tilordnet til en vinkel. For detaljer om dette viser vi til [6].

Et annet arbeid av Abu'l-Wafa er *Kitab al-Kamil*, «Den Komplette Boken», som er en forenklet versjon av Ptolemaios' Almagest. Denne boken ble mye brukt av senere astronomer.

4 Jabir ibn Aflah

Al-Ishbili Abu Muhammad Jabir ibn Aflah ble født rundt 1100, i Sevilla og døde i 1160. Han omtales ofte under det latiniserte navnet *Geber*. Hans arbeid ble tidlig oversatt til latin.

Jabir ibn Aflah arbeidet med astronomi og sfærisk trigonometri. Hans mest kjente verk har tittelen *Islah al-Majisti* eller «Rettelser til Almagest». Dette arbeidet har likhetstrekk med arbeid av Abu'l-Wafa som vi har beskrevet ovenfor, men begge kan være basert på Thabit ibn Qurra, eller kan hende andre tidligere kilder. Men i middelalderens Europa ble disse resultatene tilskrevet *«Geber»*, i den grad de da ikke ble inkludert i den europeiske forfatterens skrifter uten henvisning, slik Regiomontanus gjorde uten skrupler. Ett av de resultatene han fant hos Jabir ibn Aflah, alias Geber, er den relasjonen vi kaller for *sinusproporsjonen*. Ifølge [13] kopierte Regiomontanus store deler av Jabr ibn Aflahs arbeid inn i fjerde bok av sin *Om Trekanter*, og dette ble senere sterkt kritisert av Cardano. Men på denne tiden var det ikke vanlig å gi referanser til sine forgjengere. Faktisk var det Cardano selv som innførte dette i full skala i sin *Ars Magna*. For mer om dette viser vi til [6].

5 Nasir al-Din al-Tusi

Nasir al-Din al-Tusi ble født i provinsen Tus i 1201 og døde i 1274 nær Bagdad. Han levde i en urolig tid, da mongolene overstrømmet den muslimske verden med stor grusomhet. Nasir al-Din al-Tusi fikk sitt liv og virke sterkt preget av denne ulvetiden.

I 1214 begynte mongolene under Dsjengis-Khan, og senere sønnesønnen Hulagu Khan, å invadere dette området, og i 1220 nådde de Tus og forårsaket store ødeleggelser. Før det kom så langt hadde imidlertid Nasir fullført sine studier i Nishapur, som ligger vest for Tus. Her hadde han studert matematikk under Kamal al-Din ibn Yunus, en elev av Sharaf al-Din al-Tusi. Nasir skaffet seg etter hvert ry som en fremragende mann blant de lærde i området.

Da mongolene invaderte, sluttet Nasir seg til de såkalte *assasinerne*. Det var en gruppe shiamuslimer som var blitt forfulgt av de herskende kalifene, og som nå kjempet mot inntrengerne. Han ble en aktet medarbeider for lederen deres. Assasinerne holdt til i utilgjengelige fjellborger, og på reisene mellom disse befestede støttepunktene gjorde Nasir sitt beste vitenskapelige arbeid i logikk, filosofi, matematikk og astronomi.

Nasir al-Din al-Tusi.

I 1256 befant Nasir seg i den viktigste av assasinernes fjellborger *Alamut*, da den ble angrepet av mongolene under Hulagu. Nå sier noen at Nasir forrådte assasinernes sak, og hjalp mongolene til å ta borgen, slik fremstilles det i [13]. Men denne påstanden imøtegås av andre. Mongolene erobret og ødela i hvert fall denne borgen, og Nasir kom i deres makt. Hulagu behandlet Nasir med respekt, enten det nå var fordi han var interessert i vitenskap eller det var fordi han anså Nasir som en kunnskapsrik *astrolog*. Det berettes at Nasir på sin side sluttet seg til mongolene, og at han til og med ble vitenskapelig rådgiver for mongolenes hersker, og dessuten fikk ansvaret for religiøse spørsmål. I denne egenskapen skal han så ha deltatt på mongolenes side da de angrep og erobret Bagdad i 1258. Da ble en stor del av befolkningen drept, blant dem den siste kalifen av abassidedynastiet. Biblioteket ble ødelagt, og byen praktisk talt jevnet med jorden. Slik det blir fremstilt i [13] skal altså Nasir ha vært med de mongolske styrkene da dette skjedde.

Men det må absolutt sies at denne fremstillingen av Nasirs rolle tilbakevises på det sterkeste av andre, se for eksempel [7]. Ifølge disse er kilden til beretningen om den rollen som Nasir skal ha spilt en historiker ved navn *Ahmad ibn Muhammad ibn Taymiyyah*, (død 1327). Til tross for at Nasir er hyppig omtalt i litteraturen før ibn Taymiyyah, er hans påståtte rolle i ødeleggelsen av Bagdad og drapet på kalifen der ikke nevnt. Ifølge ibn Taymiyyah var det slik at Nasir ikke overholdt Shariaens forskrifter, bedrev hor og utukt, brukte rusmidler, fornektet oppstandelsen og dyrket avguder. Andre hevder derimot at dette var en bakvaskelse med utgangspunkt i et motsetningsforhold mellom de to retningene Sunni og Shia innen Islam på denne tiden.

Hvorom allting er, så er det ingen tvil om at Nasir var i Hulagus makt etter at Alamut var tatt. Det fortelles i [7] at Hulagu ba en arabisk astrolog ved navn *Husim al-Din* om å fortelle hvorledes det ville gå dersom han marsjerte mot Bagdad for å overvinne kalifen der. Husim forsøkte å forhindre Bagdads fall ved å si at stjernene avslørte at et angrep på Bagdad ville føre til seks ulykker: Alle mongolenes hester kom til å dø og alle soldatene ville bli syke. For det andre kom solen ikke til å stå opp. Den tredje ulykken ville være tørke og sandstormer. For det fjerde ville det komme voldsomme jordskjelv, og den femte ulykken ville bli at gress og andre planter ikke ville vokse. Som om ikke det var nok ville Hulagu selv dø det samme året, det ble den sjette ulykken. Men Hulagu var mistenksom, dette ble i meste laget. Han lot derfor sende bud på Nasir.

Nasir var urolig, han følte at han ble satt på en prøve og at dette kunne gå helt galt. Da han ble spurt om hva han mente om spådommen, svarte han derfor at han tvilte på om disse ulykkene ville slå til. Han minnet også om at mange betydelige og fromme menn hadde lidd martyrdøden i tidens løp uten at slike ting hadde skjedd. Enden på det ble at stakkars Husim ble henrettet.

Nasir klarte å påvirke Hulagu Khan ved flere anledninger. En gang kom en av hans venner fortvilet til ham og fortalte at to lærde brødre fra Bagdad skulle henrettes av Hulagu Khans menn. Nasir skyndte seg straks til Hulagu, og kastet seg ned for herskeren. Han kan ha sagt noe slikt som dette: «Herre! To av Bagdads lærde, som jeg skylder mitt liv, skal henrettes. Jeg kommer for å bønnfalle deg om å henrette meg i stedet!» Hulagu lo hjertelig, og svarte: «Dersom jeg hadde villet drepe deg, hadde jeg ikke latt deg leve helt til nå!» Så ga han godmodig ordre om at de to dømte måtte bli spart og sendt til ham.

En annen gang da Hulagu ville henrette en av Bagdads lærde, la Nasir en mer raffinert plan. Han tok med seg sitt astrolabium, stav og rosenkrans, og fikk med seg noen som bar på utstyr til å brenne røkelse. Dette rigget han opp nær Hulagus telt, og satte i gang med å brenne røkelse og be. Hulagu oppholdt seg i teltet sitt, han hadde gitt beskjed om at han ikke ville forstyrres. Men folkene ble urolig over Nasirs aktivitet, og ga beskjed til herskeren. Han ga ordre om at de skulle sende inn Nasir. Nasir forklarte at det var uhyggelige tegn i stjernene, en stor fare truet. Han ba til Gud om at han måtte skjerme Hulagu fra det onde. Men herskeren kunne også bidra ved å gjøre en eller annen storsinnet gest, for eksempel gi amnesti til noen av fangene eller spare dødsdømte. Hulagu var mer enn villig til å lytte til Nasirs råd om hvem det passet best å spare.

Hulagu fikk etter hvert stadig større tillit til Nasir, som gradvis ble en meget betrodd embetsmann for denne herskeren. Han beholdt denne stillingen hele livet.

Uten tvil representerte Nasir krefter som virket siviliserende på det mongolske regimet. Hulagu tok godt imot planer fra Nasir om å bygge et astronomisk observatorium. Han hadde lagt sin hovedstad til Maragheh i nåværende Azerbaijan. Her ble observatoriet bygd, ruinene av det finnes fortsatt i dag.

Observatoriet ble bygd av perserne, med hjelp av kinesiske astronomer. Mange av de fine instrumentene det var utstyrt med var konstruert av Nasir personlig, og observatoriet fikk et utsøkt bibliotek med det ypperste av vitenskapelig litteratur som kunne oppdrives, i mange tilfeller samlet inn, reddet eller kan hende «reddet», fra biblioteket i Bagdad og andre steder som var blitt ødelagt. Slik ble observatoriet like mye et akademi, i den gamle klassiske tradisjonen.

Nasir utarbeidet astronomiske tabeller, basert på tolv års observasjoner. Disse *Ilkaniske Tabellene* ble først skrevet på persisk, og senere oversatt til arabisk. Her finner en tabeller for beregning av planetenes posisjoner, og dessuten tabeller over stjerner.

Nasir arbeidet med den Ptolemaiske modellen for planetenes bevegelser. Denne modellen forårsaket stadig mer hodebry for astronomene, som ikke fikk sine stadig mer nøyaktige observasjoner til å stemme med Ptolemaios. Etter hvert måtte en foreta modifikasjoner som var vanskelig å rettferdiggjøre. Nasir al-Tusi ga det mest vesentlige bidrag til denne modellen før Kopernikus skar gjennom med det heliosentriske verdensbildet.

Et hjelpemiddel i dette astronomiske arbeidet var å beskrive en rettlinjet bevegelse som en sum av to sirkelbevegelser, et såkalt *Tusi-par*. De samme ideene finner en hos Kopernikus, og mange mener at Kopernikus hadde dette direkte fra Nasir al-Tusi. Herom strides imidlertid de lærde, som ofte ellers i matematikkens historie. Men Nasir al-Tusis innsats gikk videre, en kan si at han grunnla fagfeltene *plan og sfærisk trigonometri*. Han ga et bevis for den såkalte *sinusproporsjonen*

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

for sidene a, b og c i en trekant og de motstående vinklene A, B og C, og han utarbeidet tabeller over sinus til en vinkel.

Hans arbeider i logikk er også betydelige: Han innførte symboler for implikasjon, «hvis – så», og for «enten – eller».

Nasir al-Tusi skrev tallrike kommentarer til de gamle greske matematikernes arbeider.

Han skrev et arbeid om utregning av n-te røtter, og til dette arbeidet benyttet han det vi kaller Pascals trekant, og binomialformelen. Dette arbeidet er fra 1265.

Nasir al-Tusi har etterlatt seg mange skrifter om andre tema enn matematikk og astronomi, vi har nevnt filosofi og etikk. I tillegg skrev han om mineraler, der han foreslår en fargelære hvor fargene oppfattes som blandinger av hvitt og svart. Han skrev medisinske verker, og han funderte over *rommets natur*.

Gjennom sine tallrike elever og studenter fikk han en fundamental betydning for vitenskapen i den arabiske verden, en innflytelse som også fikk sin fortsettelse i Europa, da arabernes vitenskap ble ført videre i renessansen.

6 Abraham bar Hiyya Ha-Nasi

Abraham bar Hiyya Ha-Nasi, som også er kjent under navnet *Savasoda* på latin, var en spansk jødisk matematiker. Han virket i Barcelona, Spania, der han ble født i 1070, og i Provence, Frankrike der han døde i 1136.

Barcelona er en av de eldste byene i Spania, den ble grunnlagt av kolonister fra *Karthago* og ble da kalt *Barcino*. Etter romertiden kom byen under Vestgoterne, så ble den erobret av araberne på 600-tallet. Byen fikk nå navnet *Barshaluna*. Så fulgte flere hundre år med strid mellom arabiske kalifer og franske grever. I 985 ble byen erobret av araberne og delvis ødelagt, men så tatt tilbake av Grev Borello 1 i det ellevte århundret. Dette bringer oss til Abrahams tid.

Navnet Savasoda antas å være en latinsk forvanskning av et arabisk ord som betyr *Kaptein i livvakten.* Han har derfor sannsynligvis hatt en stilling hos den kristne greven i Barcelona, muligens i egenskap av astrolog, et tema som opptok ham sterkt.

Abraham var en fremragende eksponent for den blandingskulturen som hadde utviklet seg i Syd-Spania og på Sicilia. Selv var han jøde, og skrev sine verker på hebraisk. Men han oversatte de klassiske arabiske matematiske verkene til latin, og han mislikte og beklaget den europeiske mangel på interesse for arabisk språk og vitenskap.

Den mest berømte av hans bøker er *Hibbur ha-Meshiah ve-ha-Tishboret*, eller *Om Måling og Beregning.* Den latinske oversettelsen har tittel *Liber embroadum.*

Abraham var vel kjent med gresk og arabisk geometri og matematikk, og han hadde inngående kunnskaper om arbeidene til de store arabiske matematikerne som al-Khwarizmi og al-Karaji. Han har skrevet om astronomi og skrevet et større verk om kalenderen.

Abraham hadde inngående kunnskaper om Euklids Elementer, men var mest interessert i de praktiske anvendelsene. Likevel opprettholdt han den greske og arabiske tradisjonen med å gi stringente bevis.

Han brukte den arabiske geometriske algebraen og ga de arabiske metodene til å løse ligninger av grad 2 og han var den første til å introdusere Europa til disse metodene. Et eksempel gjengitt etter [8] er slik:

> Fra arealet til et kvadrat trekker en summen av sidene og det er igjen 21, hva er arealet av kvadratet og hva er lengden til de like store sidene?

Vi vil angripe dette ved å la x være lengden av sidene, da får vi ligningen

$$x^2 - 4x = 21.$$

Denne ligningen løser han ved å halvere 4, som gir 2, kvadrere som gir 4, og addere til begge sider av likheten, som gir

$$(x-2)^2 = 25,$$

tar så kvadratrot som gir

$$x - 2 = 5.$$

Altså er $x = 7$ siden og $x^2 = 49$ arealet. Siden han trekker en lengde fra et areal er dette ikke noen geometrisk problemstilling, men algebraisk.

7 Kamal al-Din al-Farisi

Kamal al-Din Abu'l Hasan Muhammad Kamal al-Din ble født i 1260 og døde i 1320 i Tabriz, i nåværende Iran. I litteraturen kalles han avvekslende «al-Farisi» og «Kamal al-Din», vi velger å bruke hans fulle navn.

Han var elev av astronomen *Qutb al-Din al-Shirazi*, som igjen var en elev av Nasir al-Din al-Tusi. Som matematiker gjorde han en betydelig innsats innen tall-teori, men det er blitt gjenoppdaget forholdsvis nylig i våre dager, som det berettes i [13]. Dessuten videreutviklet han Ibn al-Haythams optiske arbeider, blant annet om regnbuen og om fargelæren. Her benytter han, som ellers blant arabiske naturvitenskapsfolk, fullverdige «moderne» metoder. I det kristne Europa ville en på denne tiden søke forklaringene i Aristoteles' verker, ikke i egne undersøkelser.

Kamal al-Din al-Farisi kom med viktige bidrag til tallteorien. Han bemerket at ligningen

$$x^4 + y^4 = z^4$$

ikke har løsning i naturlige tall. Dette er et spesialtilfelle av den såkalte *Fermats store sats*, eller Fermats formodning, som nå er bevist av *Andrew Wiles*.

Størst innsats i tallteorien gjorde Kamal al-Din al-Farisi i teorien om vennskapstall. Med betegnelsene innført i avsnittet om Thabit ibn Qurra i første del av denne artikkelen, lar vi $\sigma_0(n)$ betegne summen av de ekte divisorene i tallet n. Vi minner om at tallene m og n kalles vennskapstall dersom $\sigma_0(m) = n$ og $\sigma_0(n) = m$.

I boken *Tadhkira al-ahbab fi bayan al-tahabb* eller «Notat for venner om beviset for vennskapelighet», gir Kamal al-Din al-Farisi et nytt bevis for Thabit ibn Qurras resultat om vennskapstall som vi har omtalt i første del av denne artikkelen.

Men det var ikke bare en enkel variasjon over Thabit ibn Qurras bevis som Kamal al-Din al-Farisi ga: Han utvikler en revolusjonerende ny metodikk i tallteorien, og innfører begreper som entydig faktorisering og kombinatoriske metoder. For dette viser vi til [9], side 287 og følgende.

Kamal al-Din al-Farisi formulerer og beviser, mer eller mindre fullstendig etter dagens standard, det resultatet som kalles *tallteoriens fundamentalteorem*:

> Ethvert naturlig tall kan skrives som et entydig produkt av, muligens gjentatte, primtall.

Matematikkhistorikeren *Thomas L. Heath* mener å finne dette teoremet som setning 14 i Bok IX av Euklids Elementer, men andre matematikkhistorikere og blant dem R. Rashed stiller et stort spørsmålstegn ved denne tolkningen av Euklid IX-14.

Kamal al-Din al-Farisi studerte også polygontall, og det vi ville kalle kombinatoriske identiteter mellom binomialkoeffisienter og disse tallene.

8 Ibn al-Banna

Al-Marrakushi ibn Al-Banna ble født i 1256 i Marrakech i Marokko, og døde samme sted i 1321. Noen oppgir at al-Banna ble født i Cordoba, og dro til Marokko for å studere, i alle tilfelle ble han værende der mesteparten av sitt liv.

Al-Banna studerte geometri, og selvsagt Euklids Elementer. Han studerte dessuten aritmetikk og algebra, og i det hele tatt det omfattende matematiske byggverket som arabiske matematikere hadde utviklet over et halvt årtusen. Da al-Banna var 13 år gammel, hadde Marinidene erobret hele Marokko, deres hovedstad var byen *Fez*. Marinidene dyrket lærdom og kultur, og Fez ble et viktig kultursentrum i den arabiske verden. Her underviste al-Banna i alle grener av matematikk og astronomi.

Al-Banna skrev mange verker, ikke bare i matematikk. En del av de matematiske verkene er sannsynligvis gjengivelser av innholdet i bøker av tidligere arabiske matematikere, noen mener at stilen i disse bøkene tyder på at det er bearbeidelse av ideer fra andre. Da kan det vel tenkes at disse bøkene inneholder forelesningsnotater.

Al-Banna skal være den første som behandler brøk som forholdet mellom to naturlige tall, og han er den første som benytter ordet *almanakk*. Al-manakh er arabisk for *været*.

En viktig bok av al-Banna *Talkhis amal al-hisab*, eller «Sammendrag av aritmetiske operasjoner», og dessuten en bok med tittelen *Raf al-Hijab an wujuh amal al-hisab*, som er hans egne kommentarer til den første boken. Her finner vi *kjedebrøk* brukt til å regne ut tilnærmede kvadratrøtter. Her finner vi også formlene

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1),$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}.$$

Vi finner dessuten en viktig behandling av *binomialkoeffisienter*. $\binom{p}{k}$ er antall måter vi kan kombinere sammen k elementer fra en mengde med p elementer på. Med moderne betegnelser viser han at

$$\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{og} \quad \binom{p}{3} = \frac{p-2}{3}\binom{p}{2}.$$

Han skriver: «Den tredje kombinasjonen får en av den andre, multiplisert med tredjedelen av det tredje leddet som kommer før det gitte tallet. . . » Men han går videre enn dette, og formulerer en sammenheng som med moderne symboler er denne:

$$\binom{p}{k} = \frac{p-(k-1)}{k}\binom{p}{k-1},$$

for han fortsetter: «. . . og slik multipliserer vi alltid den kombinasjonen som kommer før den vi vil finne med tallet som kommer før det gitte tallet og har avstand til det lik navnet på kombinasjonene vi søker. Av dette produktet tar vi den parten som har samme navn som kombinasjonene vi søker.»

9 Al-Kashi og Ulugh Beg

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi ble født i 1380 i Kashan i nåværende Iran, og døde i 1429 i Samarkand i nåværende Usbekistan.

Al-Kashi er blitt kalt *den annen Ptolemaios* av en samtidig forfatter. Han var den ledende astronomen og matematikeren i Samarkand på sin egen tid. Al-Kashi skrev flere brev på persisk til sin far, som fortsatt bodde i Kashan. Disse brevene er bevart, og er nylig blitt publisert. De skal gi et levende bilde av forholdene i Samarkand på denne tiden.

Al-Kashi vokste opp i tiden da den mongolske erobreren Timur den Halte la under seg store områder. Han døde i 1405, og egentlig var da mongolenes erobringstid over. Riket ble delt mellom hans to sønner, en av dem var *Shah Rokh*.

Etter at Shah Rokh ble hersker bedret forholdene seg. Under Timurs herredømme hadde folket hatt det vanskelig, og al-Kashi var ikke noe unntak. Han hadde arbeidet som omreisende astronom og matematiker, men levd i fattigdom. Med Shah Rokh ble forholdene bedre, økonomi og åndsliv tok så smått til å blomstre igjen.

Al-Kashi ble en tid i Kashan. I 1407 var han ferdig med et astronomiske verk som har den forkortede tittelen *Sullam al-sama*. Dette handler om å finne størrelsen og avstand for himmellegemer. Al-Kashi skrev et annet større verk i tiden 1410–11 som han dediserte til en av de mektige prinsene i timuridenes dynasti, etter alt å dømme var dette hans sponsor og beskytter på denne tiden.

Samarkand var hovedstaden i timuridenes rike, og Shah Rokh utnevnte sin sønn *Ulugh Beg* til hersker over byen, selv hadde han bestemt seg for å gjøre Herat i Khorasan til den nye hovedstaden. Ulugh Beg var bare 16 år gammel da han fikk ansvaret for Samarkand. Han var mer interessert i lærdom enn i krigstog og politikk, og ble selv en betydelig vitenskapsmann. Han tok altså straks til med å utvikle Samarkand til et senter for vitenskap og kultur.

Da al-Kashi skrev sin bok *Khaqani Zij*, med mange ulike astronomiske tabeller basert på arbeid av Nasir al-Tusi, dediserte han den til Ulugh Beg, som nå var hans sponsor og støtte. I 1420 opprettet Ulugh Beg et universitet i Samarkand, for teologi og naturvitenskap. Han inviterte al-Kashi og rundt seksti andre fremragende lærde til å arbeide her. Al-Kashi ble raskt den ledende blant dem.

I brevene til sin far lovpriser al-Kashi Ulugh Beg som en stor vitenskapsmann, men ellers er det smått stell med kollegene. Bare en av dem har al-Kashi respekt for, nemlig *Salah al-Din Musa Pasha* som gikk under navnet *Qadi Zada* eller *Dommerens sønn*. Han forteller at herskeren Ulugh Beg ledet seminarer over vanskelige emner. Al-Kashi gjorde sitt beste arbeid i denne tiden i Samarkand. Her skrev han sin *Avhandling om omkretsen*, der han beregner 2π med ni riktige sifre i *sekstitallsystemet*, nemlig ifølge [9], side 128:

$$2\pi = (6),(16)(59)(28)(1)(34)(51)(46)(14)(50).$$

Det er imponerende, for det svarer til hele 16 riktige sifre i titallsystemet, nemlig

$$2\pi = 6{,}2831853071795865.$$

Dette gjorde han i 1424, og det skulle gå nesten 200 år før denne rekorden ble slått av europeere.

I 1427 fullførte al-Kashi et verk med tittelen *Nøkkelen til aritmetikken*. Dette er en lærebok til bruk i undervisningen i astronomi, landmåling, arkitektur, regnskap og handel.

Han studerte også ligningen en støter på når en ønsker å dele en vinkel i tre like store deler. Det gir en tredjegradsligning. For detaljer om dette viser vi til [5] og [6].

Rashed drøfter i [9] al-Kashis innsats når det gjelder desimalbrøk, og oppsummerer slik på side 129:

1. Han viser analogien mellom brøk i sekstitallsystemet og brøk i titallsystemet, og

2. Han bruker desimalbrøk ikke bare til å tilnærme algebraiske tall, men reelle tall så som π.

Rashed peker på at al-Kashi er den udiskutable fortsetter av al-Karajis skole, og at når han bruker den såkalte Horner–Ruffinis metode for å beregne røtter i algebraiske ligninger, så er også dette en fortsettelse av metoder som var levende i bruk i al-Karajis og hans umiddelbare etterfølgeres miljø, se seksjonen om al-Samawal i første del av denne artikkelen.

Al-Kashi siste arbeid har en tittel som oversettes med *Avhandling om korden og sinus*. Den ble han antakelig ikke ferdig med før han døde, slik at den ble fullført av Qadi Zada. Men ordet «sinus» ble ikke brukt, selvsagt. Al-Kashi beregner sinus av 1° med stor nøyaktighet.

Ulugh Begs matematiske og astronomiske arbeider ligger i samme fagfelt som al-Kashis. Han var en fremragende vitenskapsmann, og han skrev også dikt og studerte Koranen. Gjennom arbeidet ved observatoriet ble det klarlagt at beregningene fra Ptolemaios inneholdt feil, som til da var blitt tatt for god fisk av alle.

Dessverre var Ulugh Beg adskillig mindre vellykket som fyrste og politisk leder enn som vitenskapsmann og forskningsleder. Da hans far døde i 1447 fikk han alvorlige problemer med å beholde makten, og det endte med at han ble drept i Samarkand i 1449.

10 De siste store arabiske matematikerne

Abu Abdallah Yaish ibn Ibrahim Al-Umawi ble født i Andalusia omkring år 1400 og døde i 1489 i Damaskus.

En viktig bok av al-Umawi som er bevart har tittelen *Marasim al-intisab fi'ilm al-hisab*, eller «Om aritmetiske regler og prosedyrer»

Boken begynner med en kort beskrivelse av operasjonene addisjon og multiplikasjon. Deretter behandler al-Umawi det vi vil kalle *summering av (endelige) rekker*. Spesielt behandler han polygontallene. Ut fra dette ble al-Umawi ledet til å arbeide med summen av de første kvadrattallene. I neste omgang summerte han så de første n *pyramidetallene*, og det ledet ham til å søke summen av de første n kubikktallene. Han betraktet summene

$$\sum_{i=1}^{n} i^3, \quad \sum_{i=1}^{n} (2i+1)^3, \quad \text{og} \quad \sum_{i=1}^{n} (2i)^3.$$

Det er klart at dersom vi har en formel for den første summen, kan vi lett finne formlene for de to andre. Summene av de første potenstallene var studert av al-Baghdadi, al-Karaji og andre 400 år tidligere.

Al-Umawi gir så en nesten helt generell behandling av den testmetoden som kalles å «kaste ut» for eksempel 3, 7, 9, 11. Dette generelle resultatet blir vanligvis tilskrevet *Blaise Pascal*. Men al-Umawi var altså 300 år tidligere ute, hans metode er behandlet i [6].

Abu'l Hasan ibn Ali al-Qalasadi ble født i den arabiske byen Baastah i Andalusia i 1412 og døde i 1486 i Beja i Tunis. Han levde i den tiden da det gikk mot slutten for al-Andalus, det arabiske Spania. Omayyadedynasitet var dødd ut i 1031, riket ble da delt i tre emirater med hovedstadene Cordoba, Sevilla og Jaén. Jaén er den gamle romerske byen *Flavia*, den ligger mindre enn 7 mil nord for Granada.

Allerede på slutten av 800-tallet hadde det eksistert mindre kristne kongedømmer i nord, og de ekspanderte gradvis sydover slik at rundt 1250 var en stor del av de arabiske rikene gått tapt. Men i syd besto fortsatt et rike med hovedstad i Granada, og den gjenværende delen av al-Andalus hadde blomstret gjennom hele 1300-tallet. Alhambra sto ferdig i all sin prakt i 1360. Dette storslagne palasset og borgen var emirens, eller kalifens, residens. Det var ikke bare et palass, men snarere en *kongeby*, adskilt fra resten av byen som lå under den. Innenfor murene var det et kompleks av bygninger: Kaserner og festningsverker ytterst, og i sentrum to kongelige plasser, Løveplassen og Myrteplassen, som ledet frem til seremonielle aulaer. Her var bygninger av murstein rikt dekorert med stukkaturarbeider.

I året 1407, fem år før al-Qalasadi ble født, angrep kongedømmet Castillia og Leon og kongedømmet Aragon fra nord. Krigen gikk sin ubønnhørlige gang og i 1492, seks år etter at han var død, var erobringen av al-Andalus fullført da Granada falt til de kristne angriperne.

Al-Qalasadi begynte sine studier i byen *Bastah* nordøst for Granada. Han studerte Koranen, juss og økonomi. Krigen kom nærmere, og han flyttet til Granada der han fortsatte med studier i filosofi og naturvitenskap.

Al-Qalasadi reiste nå til *Maghrib*, det arabiske navnet på det nordvestlige Afrika. Her studerte han aritmetikk og regnekunst, etter det gikk ferden til Egypt med mer studier og til slutt til Mekka. Nå var reisens endelige mål nådd, og al-Qualasadi vendte tilbake til Granada. Men Granada, som på denne tiden var en storslagen by med mer enn en halv million innbyggere, var dømt. De kristne styrkene var overmektige, og motstand var nytteløs. Al-Qualasadi forlot restene av al-Andalus og slo seg ned i Maghrib. I løpet av de neste hundre årene skulle mesteparten av den arabiske befolkningen slå følge. De ble fordrevet til Nord-Afrika og andre islamske land.

Al-Qalasadi skal ha vært ekspert på fordeling av arv, noe som var nøye foreskrevet i islamsk lov, i *shariaen.* Slike oppgaver falt på gruppen av lærde menn, *ulama.* Han begynte en systematisk bruk av algebraiske symboler, der arabiske ord eller deres forkortelser tjente som algebraiske operatorer. Al-Qalasadi skrev flere bøker om aritmetikk og algebra. Noe av dette er kommentarer til tidligere arabiske matematikere, men han har også etterlatt seg originale arbeider. Tidligere var det vanlig å gi ham æren av å ha vært den første som innførte algebraisk symbolbruk, men her mener en idag at han bygde på tidligere arabiske matematikere. Al-Qualasadis arbeid er med på å vise at arabiske matematikere i al-Andalus var aktive på et høyt nivå og på bred front helt til landet ble erobret av de kristne.

Referanser

[1] S. Ahmad og R. Rashed (ed.) *"Al-Bahir" en algèbre d'Al-Samaw'al.* Damascus, 1972.

[2] C. C. Gillispie *The Dictionary of Scientific Biography.* 16 bind, 2 suppl. Charles Scribner's Sons, New York 1979–1990.

[3] T. L. Heath. *Euclid: The thirteen books of the Elements.* Translated from the text of Heiberg. Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. 3 bind. Dover Publications, New York 1956.

[4] A. Holme. *Matematikkens historie 1. Fra Babylon til mordet på Hypatia.* Fagbokforlaget, Bergen 2001.

[5] A. Holme. *Geometry. Our Cultural Heritage.* Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 2002.

[6] A. Holme. *Matematikkens historie 2. Fra de arabiske vise til Niels Henrik Abel.* Fagbokforlaget, Bergen 2004.

[7] R. Jafariyan. *The Alleged Role of Khawajah Nasir al-Din al-Tusi in the Fall of Baghdad.* Artikkel i den iranske journalen Kayhan-e Andisheh, (No. 22). Tilgjengelig på `http://www.al-islam.org/al-tawhid/tusi/baghdad.htm`.

[8] V. J. Katz. *A History of Mathematics.* Harper Collins College Publishers, New York 1992.

[9] R. Rashed. *The development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra.* Kluver Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London. 1994.

[10] R. Rashed. *Al-Khayyam and Descartes on algebraic geometry.* Foredrag ved konferansen om arabisk matematikk arrangert av Norsk Matematikkråd og UNESCO-kommisjonen i Oslo 21-23 mai 2001. Foredragene er under samlet utgivelse i bokform.

[11] F. Rosen. *Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Algebra.* London, Oriental Translation Fund 1831. Boken er i dag vanskelig å finne, men det foreligger en nyere oversettelse fra en latinsk oversettelse ved L. Karpinski, University of Michigan Press 1930.

[12] Sharaf al-Tusi. *Sharaf al-Din al-Tusi. Oeuvres Mathematiques.* Oversatt av R. Rashed. To bind. Paris 1986.

[13] University of St. Andrews. *The MacTutor History of Mathematics Archive.* `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/`.