Oppgaver

Oppgavene 444–446 er fra Asian Pacific Mathematical Olympiad i årene 1989–1996. Oppgave 447 har vært foreslått til den internasjonale matematikkolympiaden.

444. La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være positive reelle tall, og la

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Vis at

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

445. Gitt en trekant med sider a, b og c. La s være halve omkretsen, altså $s = (a+b+c)/2$. Konstruer en ny trekant med sider $s-a$, $s-b$ og $s-c$. Gjenta prosessen inntil det ikke lenger er mulig å konstruere en ny trekant. For hvilke opprinnelige trekanter vil denne prosessen ikke stoppe opp?

446. La a, b, c være sider i en trekant. Vis at

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Når får vi likhet?

447. Vis at det finnes en entydig bestemt uendelig følge $u_0, u_1, u_2, \ldots$ av positive heltall slik at for alle $n \ge 0$ er

$$u_n^2 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+r}{r} u_{n-r}.$$

Løsninger

426. La r, s og t være heltall med $r \ge 0$, $s \ge 0$ og $r + s \le t$. Vis at

$$\frac{\binom{s}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{s}{1}}{\binom{t}{r+1}} + \cdots + \frac{\binom{s}{s}}{\binom{t}{r+s}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}.$$

(Fra Putnam-konkurransen 1987.)

Løsning: (Etter *Pål Grønås*, Stjørdal, NO.) Vi vil vise formelen

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{\binom{s}{k}}{\binom{t}{r+k}} = \frac{t+1}{(t-s+1)\binom{t-s}{r}} \tag{1}$$

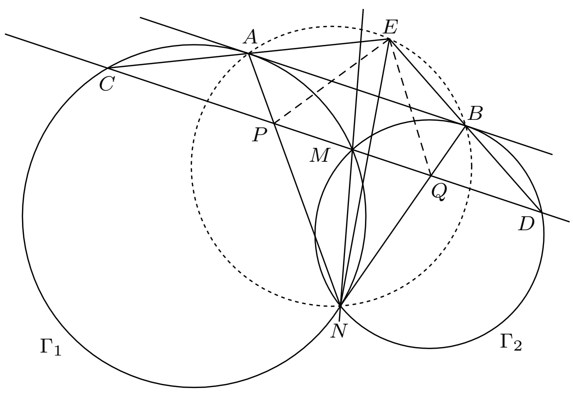
ved induksjon på s. Formelen er åpenbart riktig for $s = 0$. La oss anta at (1) er sann for $s = n$ (*induksjonshypotesen*). Ved hjelp av den velkjente formelen $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ får vi (ved likheten merket med $*$ bruker vi induksjonshypotesen)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{t}{r+k}} &= \frac{1}{\binom{t}{r}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}{\binom{t}{r+k}} + \frac{1}{\binom{t}{r+n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t}{r+k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{t}{r+k+1}} \\
&\stackrel{*}{=} \frac{t+1}{(t-n+1)\binom{t-n}{r}} + \frac{t+1}{(t-n+1)\binom{t-n}{r+1}} \\
&= \frac{t+1}{t-n+1} \cdot \frac{\binom{t-n}{r} + \binom{t-n}{r+1}}{\binom{t-n}{r}\binom{t-n}{r+1}} = \frac{t+1}{t-n+1} \cdot \frac{\binom{t-n+1}{r+1}}{\binom{t-n}{r}\binom{t-n}{r+1}} \\
&= \frac{t+1}{t-n+1} \cdot \frac{\frac{(t-n+1)!}{(t-n-r)!\,(r+1)!}}{\frac{(t-n)!}{(t-n-r)!\,r!} \cdot \frac{(t-n)!}{(t-n-r-1)!\,(r+1)!}} \\
&= \frac{(t+1)(t-n-r-1)!\,r!}{(t-n)!} = \frac{t+1}{(t-n)\binom{t-n-1}{r}},
\end{aligned}$$

som nettopp er (1) for $s = n + 1$. Dermed har vi vist formelen (1) ved induksjon.

Også løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

427. Betrakt situasjonen gitt i oppgave 405 (se figuren nedenfor). Vis at punktene A, E, B og N ligger på en og samme sirkel. (Innsendt av Oddvar Iden, Bergen, NO.)



Rask repetisjon av det vi trenger å vite om figuren: Sirklene Γ_1 og Γ_2 skjærer hverandre i punktene M og N, linjen AB er en felles tangent for sirklene, linjen CD går gjennom M og er parallell med AB, og E er skjæringspunktet mellom linjene CA og DB.

Løsning: (Etter *Odd-Bjørn Lunde*, Hundvåg, NO.) For å vise at N ligger på sirkelen gjennom B, E og A, er det nok å vise at $\angle AEB + \angle BNA = \pi$. Ved å se på vinkelsummen i trekanten CDE får vi $\angle AEB + \angle BDM + \angle MCA = \pi$. Nå er vinklene $\angle BNM = \angle BDM$, siden de er periferivinkler som spenner over samme bue i Γ_2, og på samme måte er $\angle MNA = \angle MCA$. Dermed er $\angle BNA = \angle BNM + \angle MNA = \angle BDM + \angle MCA = \pi - \angle AEB$, og det er nettopp hva vi skulle vise.

Ivar Skau, Bø i Telemark, NO, bemerker at firkanten $AEBN$ vil være syklisk også om CD er en *vilkårlig* linje gjennom M og A og B er vilkårlige punkter på henholdsvis Γ_1 og Γ_2. *Bevis:* $\angle NBE = \angle NMC$ (periferivinkler og supplementvinkler). Tilsvarende er $\angle NAE = \angle NMD$, og følgelig er $\angle NBE + \angle NAE = \pi$.

Også løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Jakob I. Try, Søgne, NO; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

428. Vis at det fins uendelig mange positive heltall n slik at $p = nr$, der $2p$ og r er henholdsvis omkretsen og radien i den innskrevne sirkelen i en trekant med heltallige sidelengder. (Foreslått til den internasjonale matematikkolympiaden i Taejon, Sør-Korea, i 2000.)

Løsning: (Etter *Hans Georg Killingbergtrø*, Leksvik, NO.) Sirkelens tangeringspunkter med siden deler sidene i x og y, y og z, z og x. Det er tilstrekkelig å påvise én trekantserie der n er vilkårlig stor. Anta at det fins en slik serie der x, y og z alle er heltall. Med Herons formel får vi $(x+y+z)xyz = (x+y+z)^2r^2$, som lett kan løses med hensyn på z. Oppgaven videre blir å finne positive heltall x, y og r som gjør at både

$$(*) \quad z = \frac{(x+y)r^2}{xy - r^2} \qquad \text{og} \qquad (**) \quad n = \frac{x+y+z}{r}$$

blir heltall. En nærliggende strategi for $(*)$ er å søke x, y, r slik at $xy - r^2 = 1$. Dette gir assosiasjon til *Fibonacci-tall*, der $F_{h-k}F_{h+k} - F_h^2 = (-1)^{h+k+1}F_k^2$, som nettopp gir 1 når $k = 2$ og h er et oddetall. (Indeks lik eksponenten i *Binets formel*, $F_n = \big(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\big)/\sqrt{5}$, der $\varphi = (1+\sqrt{5}\,)/2$. Se Torgeir Onstad, *Fibonacci-tallene*, Normat 1991, 20–40.) Velger vi $x = F_{2m-1}$, $r = F_{2m+1}$ og $y = F_{2m+3}$, vil $(*)$ gi $z = (x+y)r^2$. Og dette berger samtidig $(**)$, da en direkte følge av Fibonacci-rekursjonen er at $F_{h-2} + F_{h+2} = 3F_h$. Så en kan velge x, r og y som vilkårlig store på hverandre følgende oddeindiserte Fibonacci-tall og få $x + y = 3r$, $z = 3r^3$ og $n = 3r^2 + 3$.

Eksempel:

$$\begin{aligned}
&x = F_{31} = 1346269, \quad r = F_{33} = 3524578,\\
&y = F_{35} = 9227465, \quad z = 3 \cdot 3524578^3 = 131353797500739445656,\\
&n = \frac{1346269 + 9227465 + 131353797500739445656}{3524578} = 37267950234255.
\end{aligned}$$

Også løst av: Pål Grønås, Stjørdal, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

429. La k være et fast, positivt heltall. Den n-te deriverte av $f(x) = 1/(x^k - 1)$ har formen

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}\,,$$

der $P_n(x)$ er et polynom. Finn $P_n(1)$. (Fra Putnam-konkurransen 2002.)

Løsning: Vi har $f'(x) = -kx^{k-1}/(x^k-1)^2$, så $P_1(x) = -kx^{k-1}$. Ved derivasjon av uttrykket for $f^{(n)}(x)$ får vi

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)(x^k-1)^{n+1} - P_n(x)(n+1)(x^k-1)^n kx^{k-1}}{(x^k-1)^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(x^k-1) - P_n(x)(n+1)kx^{k-1}}{(x^k-1)^{n+2}}\,, \end{aligned}$$

som viser at $P_{n+1}(x) = P_n'(x)(x^k-1) - P_n(x)(n+1)kx^{k-1}$. Av dette får vi så

$$(*) \qquad P_{n+1}(1) = -k(n+1)P_n(1), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Siden $P_1(1) = -k$, følger det ved induksjon at $P_n(1) = (-k)^n n!$ for alle naturlige tall n.

Løst av: Pål Grønås, Stjørdal, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

431. Gitt 7 distinkte reelle tall. Vis at det blant disse fins minst ett par x, y slik at

$$0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

(Fra den canadiske matematikkolympiaden i 1984.)

Løsning: La $t_1 < t_2 < \cdots < t_7$ være distinkte reelle tall. For hver $i = 1, \ldots, 7$ finnes det nøyaktig én vinkel v_i i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$ slik at $\tan v_i = t_i$. Dermed får vi for alle i og j

$$\frac{t_i - t_j}{1+t_it_j} = \frac{\tan v_i - \tan v_j}{1 + \tan v_i \tan v_j} = \tan(v_i - v_j).$$

Siden $v_1 < v_2 < \cdots < v_7$ ligger i et åpent intervall av lengde π, må minst en av de seks differensene $v_{i+1} - v_i$ være mindre enn $\pi/6$, og da er

$$0 < t_{i+1} - t_i < \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Vi har dermed fått oppfylt ulikhetene i oppgaven, og faktisk med ekte ulikheter.

Løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Norvald Midttun, Bergen, NO; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

432 = 435. Vis at et reelt tall x er rasjonalt hvis og bare hvis vi i følgen

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ \ldots$$

kan finne tre distinkte ledd som danner en geometrisk progresjon. (Fra den canadiske matematikkolympiaden i 1993. Denne oppgaven ble ved et uhell gjentatt som oppgave 435, men oppgaveredaktøren vil forsøke å være mer påpasselig i fremtiden!)

Løsning: (Etter *Henrik Meyer*, Birkerød, DK.) Vi viser først «hvis». Anta at det fins naturlige tall n, p og q slik at

$$\frac{x+n}{x+p} = \frac{x+p}{x+q}\,.$$

Da er

$$(x+p)^2 = (x+n)(x+q) \iff x(2p-n-q) = nq - p^2.$$

Hvis $nq = p^2$, må vi enten ha $x = 0$ (og da er x rasjonal) eller $2p = n+q$, som gir $4nq = 4p^2 = n^2 + 2nq + q^2$, som gir $(n-q)^2 = n^2 - 2nq + q^2 = 0$. Men det siste tilfellet er umulig, siden vi skal ha $n \neq q$. Hvis $nq \neq p^2$, så er også $2p - n - q \neq 0$, og vi får $x = (nq - p^2)/(2p - n - q)$, som er et rasjonalt tall.

La oss så bevise «bare hvis»: Det er tilstrekkelig å se på det tilfellet at $x > 0$, siden x er rasjonal hvis og bare hvis $x + k$ er rasjonal for et vilkårlig naturlig tall k. Anta $x = r/s$, der r og s er naturlige tall. Da er $(x+r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 = x(x + 2r + r^2/x) = x(x + 2r + rs)$, så

$$\frac{x}{x+r} = \frac{x+r}{x+2r+rs}\,,$$

dvs. x, $x+r$ og $x+2r+rs$ danner en geometrisk progresjon.

Løst av: Pål Grønås, Stjørdal, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Norvald Midttun, Bergen, NO; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK;

434. La p være et odde primtall. Bevis at

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

Løsning: (Etter *Pål Grønås*, Stjørdal, NO.) Sett $x_j = \binom{p}{j}\binom{p+j}{j}$ for $0 \leq j \leq p$. Vi observerer at $x_0 = 1$. For $j > 0$ blir

$$\begin{aligned} (1) \qquad x_j &= \frac{p!}{j!\,(p-j)!} \cdot \frac{(p+j)!}{j!\,p!} = \frac{(p+j)!}{j!^2(p-j)!} = \frac{1}{j!^2}\prod_{i=1}^{j}(p+i)\prod_{i=0}^{j-1}(p-i) \\ &= \frac{p(p+j)}{j!^2}\prod_{i=1}^{j-1}(p+i)(p-i) = \frac{p^2+pj}{j!^2}\prod_{i=1}^{j-1}(p^2-i^2). \end{aligned}$$

Setter vi $j = p$, får vi

$$x_p = \frac{2p^2}{p!^2}\prod_{i=1}^{p-1}(p^2-i^2) = \frac{2}{(p-1)!^2}\prod_{i=1}^{p-1}(p^2-i^2).$$

Siden $\gcd(p,(p-1)!) = 1$, er

$$x_p(p-1)!^2 \equiv 2\prod_{j=1}^{p-1}(-i^2) = 2(-1)^{p-1}(p-1)!^2 \pmod{p^2}.$$

Forkorting med $(p-1)!^2$ gir $x_p \equiv 2(-1)^{p-1} = 2 \pmod{p^2}$, siden p er odde.

Anta så at $0 < j < p$. Da er $\gcd(p, j!) = 1$, så (1) er ekvivalent med

$$j!^2 x_j \equiv pj \prod_{i=1}^{j-1} (-i^2) = pj(-1)^{j-1}(j-1)!^2 \pmod{p^2}.$$

Ved å forkorte med $(j-1)!^2 j$ får vi $jx_j \equiv (-1)^{j-1} p \pmod{p^2}$. Ergo må $p \mid x_j$, dvs. $x_j = py_j$ for en passende y_j. Da er

$$jy_j \equiv (-1)^{j-1} \pmod{p}. \tag{2}$$

Alt i alt betyr dette at kongruensen i oppgaven er ekvivalent med

$$\sum_{j=1}^{p-1} y_j \equiv \frac{2^p - 2}{p} \pmod{p}. \tag{3}$$

Binomialformelen gir

$$2^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} = 2 + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j}. \tag{4}$$

For $0 < j < p$ er $\binom{p}{j} = pz_j$, der

$$j!\, z_j = \prod_{i=1}^{j-1} (p - ij) \equiv (-1)^{j-1}(j-1)! \pmod{p}.$$

Dette gir $jz_j \equiv (-1)^{j-1} \pmod{p}$. Av (2) følger det at $y_j \equiv z_j \pmod{p}$, hvilket i kombinasjon med (4) gir

$$\sum_{j=1}^{p-1} y_j \equiv \sum_{j=1}^{p-1} z_j = \frac{2^p - 2}{p} \pmod{p}.$$

Vi har dermed bevist at (3), og derfor også påstanden i oppgaven, er sann.

Hans Georg Killingbergtrø påpeker at oppgavens krav om at primtallet p skal være *odde*, er unødvendig. For $p = 2$ får man jo ved direkte utregning $13 \equiv 5 \pmod{4}$, som jo er helt i orden. Det eneste stedet i løsningen over hvor vi bruker at p er odde, er da også i kongruensen $2(-1)^{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2}$, som for $p = 2$ blir til $-2 \equiv 2 \pmod{4}$.

Også løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 30. november 2004. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.