Rundt om uendeligheden[1]

Vagn Lundsgaard Hansen

Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
Matematiktorvet, Bygning 303
DK–2800 Kgs. Lyngby
V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Homo sapiens – det tænkende menneske – har til alle tider været optaget af spørgsmålene om universets opståen og udvikling og om livets begyndelse og afslutning. Har universet altid eksisteret? Og vil det eksistere til evig tid? Er der et evigt liv efter døden? Er universet begrænset eller udstrækker det sig i det uendelige? Findes der et udeleligt materielt element? Eller kan vi fortsætte med at dele i det uendelige?

Evigt og uendeligt er begge udtryk for det samme, nemlig at der ikke er grænser. Mens evigt udelukkende benyttes i forbindelse med tidslig udstrækning, kan uendelig benyttes i forbindelse med alle former for størrelser og udstrækning. Hvad uendelig er – eller skal være – er et dybtliggende filosofisk problem, som har optaget de største tænkere i menneskehedens historie. Som et filosofisk problem og et teologisk problem er begrebet uendelig stadig genstand for diskussion: Hvordan skal man forstå noget, man aldrig når? Hvad er det evige liv?

I matematikken ligger spørgsmål om uendelighed bag mange begreber og metoder, men først i slutningen af 1800-tallet fik man hold på det matematiske uendelighedsbegreb. I kølvandet fulgte en dybtgående analyse af hele matematikkens grundlag som blandt andet førte til en erkendelse af, at matematikken i sin helhed ikke kan organiseres som et fuldstændigt aksiomatisk opbygget system, hvor alle matematiske spørgsmål har et entydigt svar.

I denne artikel tager vi udgangspunkt i uendelighedsbegrebet som det opstod i den græske filosofi og trækker nogle hovedlinier frem til uendelighedsbegrebets matematiske afklaring. En yderligere udbygning kan findes i forfatterens bog *Matematikkens Uendelige Univers*, udgivet af Den Private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Universitet, i 2002.

[1]Foredrag ved konferencen *Popularisering av matematikk*, Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen, NTNU, Trondheim, 17. og 18. november 2003.

Om uendelighed i filosofien

For at kunne værdsætte dybden i de filosofiske paradokser knyttet til uendelighed, som tidligt opstod i den græske filosofi, er det nødvendigt med en kort omtale af nogle centrale filosofiske spørgsmål vedrørende begrebet *eksistens*.

Den græske filosof Parmenides (ca. 525–450 f.Kr.) gennemførte en analyse af begrebet at *eksistere* og opdelte med henblik på dette verden i det *værende* og det *ikke-værende*. Han argumenterede for, at det værende er evigt og uforanderligt, for enhver ændring af det værende må ske fra eller til det ikke-værende, hvilket er umuligt, da det ikke-værende jo ikke er. Derfor må det værende altid have været og vil være her for evigt. Og det må også være uforanderligt. Da dette er i modstrid med hvad vi observerer med vores sanser, nåede Parmenides frem til, at sanseverdenen faktisk er en illusion. Derved kom han i modstrid med mange af tidens filosoffer.

Parmenides blev dygtigt forsvaret af sin elev Zenon fra Elea (ca. 490–430 f.Kr.), som argumenterede for, at bevægelse er umulig ved en række argumenter, der nu kendes som Zenons paradokser. Et af Zenons argumenter for at bevægelse er umulig er, at hvis man skal bevæge sig fra ét punkt til et andet, skal man først bevæge sig halvvejen, og før det en fjerdedel af vejen, og før det en ottendedel af vejen etc., altså en uendelig proces, så man aldrig kommer i gang.

Det bedst kendte af Zenons argumenter for at bevægelse er umulig kendes som

Paradokset om Achilleus og skildpadden: Helten Achilleus skal løbe om kap med en skildpadde. Da Achilleus er antikkens hurtigste løber får skildpadden et forspring. Men hvad sker? Achilleus vil aldrig indhente skildpadden, for når Achilleus når derhen, hvor skildpadden startede, har den jo bevæget sig et stykke længere fremad, og når Achilleus når derhen, så har skildpadden igen bevæget sig fremad, hvorved vi kommer ind i en uendelig proces, som ingen ende vil tage.

Platon (427–347 f.Kr.) drog den fulde konsekvens af Parmenides' opfattelse af sanseverdenen og opfattede denne som et ufuldstændigt spejlbillede af den virkelige verden, der for Platon var *ideernes verden*, en matematisk opbygget verden man kunne ræsonnere sig til ved rationelle argumenter.

Den store filosof Aristoteles (384–322 f.Kr.), som var den mest indflydelsesrige af Platons elever, forkastede forestillingen om ideernes verden, men opretholdt en skelnen mellem konkrete og abstrakte aspekter i sanseverdenen. Således består en konkret geometrisk figur af materie og form, og det er formen der beskriver figurens abstrakte aspekter og som kan henføres til matematikken.

Blandt andet Zenons paradokser, som strider mod erfaringerne fra sanseverden, gjorde at de græske filosoffer forbandt det endelige med det gode og det uendelige med det onde. Herunder opstod diskussion om »uendelig« er noget *potentielt* (en mulighed) eller noget *aktuelt* (noget der indtræffer, og har sin egen eksistens). Det er potentielt muligt at universet altid vil eksistere, altså at det bliver uendeligt gammelt fra et givet tidspunkt at regne, men det *er* ikke uendeligt gammelt på noget som helst senere tidspunkt. Aristoteles var den første som skelnede mellem uendelig som noget potentielt og noget aktuelt. Aristoteles anså selv uendelig som noget der udelukkende var potentielt: noget hvor man kan blive ved ubegrænset. Som med de naturlige tal: $1, 2, 3, \ldots$, hvor der efter hvert tal kommer et nyt, men hvor ingen af tallene selv er uendelig.

Om regning med uendelige summer. Zenons paradokser

Fra et matematisk synspunkt er det heldigvis muligt, at en uendelig sum i veldefinerede situationer kan tillægges en endelig værdi. Betragt for eksempel en stang, lad os sige med længden 1 meter. Denne stang deler vi nu på midten, så vi har to stykker hver af længde $\frac{1}{2}$ meter. Det ene stykke deler vi igen på midten, så vi får to stykker af længde $\frac{1}{4}$ meter. Så deler vi igen det ene af disse stykker i to lige store dele, og så fremdeles. Derved ser vi, at vores meterstok er blevet delt op i stykker svarende til en formél sum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots .$$

En sådan formél sum kaldes en *uendelig række*, og $1/2^n$ kaldes det $n$te *led* i rækken.

Den her betragtede uendelige række skrives også på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots ,$$

idet vi benytter sumtegnet $\sum$ og det matematiske symbol ∞ for uendelig. Symbolet ∞ for uendelig blev første gang brugt i 1655 af den engelske matematiker John Wallis (1616–1703). Rækken er en såkaldt *kvotientrække* med kvotient $\frac{1}{2}$, idet hvert led i rækken netop er halvdelen af det foregående led. Det er nærliggende at tillægge den omtalte kvotientrække *summen* 1, idet man kommer vilkårligt tæt på 1 ved at tage tilstrækkeligt mange led med i en endelig sum af de første led i rækken.

Matematisk afklaring af Zenons paradokser

Det er netop denne kvotientrække, som fra et matematisk synspunkt afklarer det første af Zenons paradokser. Bevægelse *er* mulig, for i den proces som Zenon foreskriver, summerer skridtene sammen til en endelig længde, hvorved der bliver lagt begrænsninger på den tid, der er til rådighed for bevægelse.

Rækken afklarer også paradokset om Achilleus og skildpadden, hvis vi antager, at Achilleus løber dobbelt så hurtigt som skildpadden.

Den generelle kvotientrække

Generelt har en kvotientrække med kvotient q formen

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots ,$$

hvor a og q er givne reelle tal. Summeres de N første led i rækken fremkommer det såkaldte Nte *afsnit* i rækken, dvs

$$S_N=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{N-1}.$$

Ved multiplikation med q får vi først

$$qS_N = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^N,$$

og dernæst ved at betragte differencen $S_N - qS_N$, at

$$S_N = \frac{a - aq^N}{1-q}.$$

For $|q| < 1$ fremgår det, at S_N har grænseværdien

$$S = \frac{a}{1-q},$$

når N vokser ud over alle grænser. Vi siger, at kvotientrækken er *konvergent* med *summen* S.

Den harmoniske række

En anden interessant uendelig række er den såkaldte *harmoniske række*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

Denne række er *divergent*: den har ikke endelig sum. Herved forstås, at det Nte afsnit i rækken, dvs. den endelige sum

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$$

vokser ud over alle grænser, når tallet N vokser ubegrænset.

Bemærk med henblik på at vise dette, at *udsnittet* i rækken fra $1/(k+1)$ til $1/(2k)$ for ethvert k indeholder k tal, der alle er større end $1/(2k)$, hvoraf straks følger, at

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \;\geq\; \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \cdots + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}.$$

Herefter er det ikke svært at dele den harmoniske række ind i uendeligt mange udsnit, der alle er større end $\frac{1}{2}$, og derved indse, at afsnittene i rækken vokser ud over alle grænser, når der medtages flere og flere led.

Den alternerende harmoniske række

Den *alternerende* harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

byder på store overraskelser. Den kan nemlig *omordnes*, dvs. leddene kan ombyttes, så man får en ny række med de samme led som før, der er konvergent med en vilkårlig på forhånd forlangt sum. Dette resultat blev bevist af den tyske matematiker Dirichlet i 1837 og er gyldigt for de såkaldte *betinget konvergente uendelige rækker*. Resultatet følger ved at udnytte at *positiv-rækken*, dvs. rækken af led med positivt fortegn, vokser ud over alle grænser, og at *negativ-rækken*, dvs. rækken af led med negativt fortegn, aftager ud over alle grænser, når vi medtager flere og flere led i afsnittene for de to rækker. Hvis man nu vil opnå summen S i en omordning af den alternerende harmoniske række, tager man først så mange af positiv-rækkens led at man lige kommer over S. Derefter så mange af negativ-rækkens led at man lige kommer under S. Så fortsætter man med led fra positiv-rækken, fra der hvor man slap tidligere, til man igen lige kommer over S. Derefter med led fra negativ rækken til man igen lige kommer under S og så fremdeles. Da $1/n$ går mod 0, når n vokser ud over alle grænser, vil den netop beskrevne række være konvergent med sum S.

Den alternerende harmoniske række er den matematiske idé bag den episode i bogen *Alice i Eventyrland*, skrevet i 1865 af den engelske matematiker Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898) under pseudonymet Lewis Carroll, hvor Alice af kålormen lærer om en paddehat med den forunderlige egenskab, at man bliver større når man spiser af den ene side, og mindre når man spiser af den anden, hvorved man kan opnå lige netop den størrelse man ønsker ved på skift at spise tilpasse mængder af de to sider af paddehatten. Det fortælles, at den engelske dronning Victoria blev så begejstret ved læsning af eventyrene om Alice, at hun bad om at få forfatterens samlede produktion tilsendt. Hendes overraskelse var sikkert stor, da hun opdagede, at den mest bestod af matematiske afhandlinger. Det kan man kalde popularisering af matematik på højt niveau!

For god ordens skyld skal nævnes at summen af den alternerende harmoniske række som opskrevet er den naturlige logaritme til 2.

Uendelige rækker versus endelige summer

Uendelige rækker voldte i begyndelsen kvaler selv for store matematikere. Man kunne ikke få hold om problemerne, idet man blot regnede med uendelige rækker som var det endelige summer. Hvad dette førte til kan ses i forbindelse med den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots .$$

Sætter man parenteser i rækken på følgende måde

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\,,$$

er det nærliggende at påstå, at rækken har summen 0.

Sætter vi derimod parenteser på følgende måde

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots\,,$$

kan man imidlertid lige så vel sige, at rækken har summen 1.

Den berømte matematiker Leonhard Euler (1707–1783) argumenterede omkring 1730 for at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+1-\cdots$$

har summen $\frac{1}{2}$, for det er netop den værdi man får, når man i summen for en kvotientrække med $a=1$ sætter $q=-1$.

Først med præciseringen af *konvergens* og *divergens* af uendelige rækker fik man klarhed over sådanne modstridende forhold. Den betragtede række er divergent, og kan altså ikke tilskrives nogen sum.

Om konvergens og divergens af generelle uendelige rækker

En generel uendelig række har formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\,,$$

hvor a_n er reelle tal.

Rækken siges at være *konvergent* med summen S, hvis det Nte afsnit i rækken

$$S_N = a_1+a_2+\cdots+a_N$$

har grænseværdien S, når N går imod ∞. Udtrykket »N går imod ∞« er den måde hvorpå man i vore dage normalt udtrykker, at »N vokser ud over alle grænser«. Hvis der ikke findes en grænseværdi, siges rækken at være *divergent*.

Det $n$te led a_n i rækken er differencen mellem to på hinanden følgende afsnit, nemlig

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Heraf følger straks, at hvis en række er konvergent med sum S, da vil det $n$te led i rækken gå imod $S-S=0$ for n gående imod ∞. Det er med andre ord en nødvendig betingelse for konvergens af en række, at det $n$te led i rækken går imod 0 for n gående imod ∞. At betingelsen ikke er tilstrækkelig ses blandt andet i tilfældet med den harmoniske række.

Begreberne konvergens og divergens af uendelige rækker blev præciseret på ovenstående form af den franske matematiker Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) i hans berømte forelæsninger *Cours d'analyse* ved College de France i Paris i 1820'erne, og er nu de generelt accepterede.

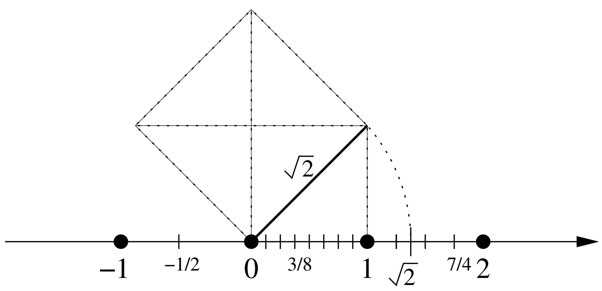
Tallene fra et geometrisk synspunkt

Tallenes historie hænger nøje sammen med den historiske udvikling af det matematiske uendelighedsbegreb, som kulminerede i slutningen af 1800-tallet i arbejder af den tyske matematiker Georg Cantor (1845–1918), der var født i Skt. Petersborg af danske forældre. En fuldstændig konstruktion af de reelle tal er ikke mulig i en kort fremstilling, men da tallene spiller en afgørende rolle i det følgende, giver vi her en geometrisk anskuelig beskrivelse af de reelle tal.

Hvis vi inddeler en orienteret akse, dvs. en linje med en fastlagt gennemløbsretning, i lige lange stykker kan vi afsætte de *hele tal*

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

langs delepunkterne, idet vi vælger et af delepunkterne som 0 og afsætter de positive tal i gennemløbsretningen og de negative tal i modsat retning ud fra 0. Se Figur 1.



Figur 1: Den reelle talakse

De positive hele tal, kaldet de *naturlige tal*, har menneskene arbejdet med på et intuitivt grundlag selv i de ældste kulturer. På et udviklet niveau kendes matematiske kildetekster fra Babylon tilbage fra 1800-tallet f.Kr. Først langt senere blev de negative tal indført af hinduerne (indiske matematikere) til at repræsentere »underskud«; den først kendte brug af negative tal blev gjort af Brahmagupta omkring 628. Det var også omkring dette tidspunkt, at hinduerne begyndte at bruge tallet »nul« som et egentlig tal; tidligere havde grækerne brugt »nullet« blot til at angive fraværet af et tal (kilder fra omkring 300 f.Kr.)

Hvis vi inddeler hvert af de lige lange intervaller på den orienterede akse, der afmærkes af de hele tal, i q lige lange delintervaller, får vi en række delepunkter langs hvilke vi kan afsætte alle *brøker* med *nævner* q og et vilkårligt helt tal p som *tæller*, altså tallene p/q. Ved at lade q gennemløbe alle de naturlige tal får vi dermed afsat alle brøker langs den orienterede akse. Markeringspunkterne for brøkerne repræsenterer de såkaldte *rationale tal*. Bemærk, at et rationalt tal stammer fra uendelig mange forskellige brøker.

På denne måde får vi slet ikke fyldt aksen ud; den er »gennemhullet«. Eksempelvis irriterede det de gamle grækere grænseløst, at diagonalen og kantlængden i et kvadrat er såkaldte *inkommensurable* størrelser, dvs. de kan ikke begge deles i et helt antal af en fælles måleenhed, eller med andre ord, at forholdet ikke kan udtrykkes ved et rationalt tal. Denne opdagelse blev gjort i 500-tallet f.Kr. af pythagoræerne og tilskrives Hippasus fra Metapontum. Forhold mellem inkommensurable størrelser måles ved det som grækerne kaldte *irrationale* størrelser. Hvis kantlængden i kvadratet er 1 repræsenterer diagonalen i kvadratet den irrationale størrelse $\sqrt{2}$, idet kvadratet på diagonalen, som vist i Figur 1, let kan opdeles i summen af to enhedskvadrater.

Vi indfører nu de *reelle tal* som de størrelser, der repræsenteres af længderne af intervaller med det ene endepunkt i 0 og det andet endepunkt i et vilkårligt punkt på den givne orienterede akse; størrelserne regnes med fortegn svarende til aksens gennemløbsretning. De reelle tal bliver således identificeret med punkterne på den orienterede akse, der i overensstemmelse hermed omtales som en *talakse*. Afsætter vi diagonalen i enhedskvadratet ud fra 0 på ovenstående måde når vi til tallet $\sqrt{2}$. De reelle tal som ikke kan repræsenteres af rationale størrelser kaldes *irrationale tal*.

Det var sent i matematikkens historie, at man fik karakteriseret de reelle tal fuldstændigt. Først i slutningen af 1800-tallet lykkedes det, uafhængigt af hinanden og næsten samtidigt, for Karl Weierstrass (1815–1897), Charles Méray (1835–1911), Georg Cantor og Richard Dedekind (1831–1916), at give rent aritmetiske konstruktioner af de reelle tal. Det skal nævnes, at det voldte store vanskeligheder at få sat de aritmetiske konstruktioner af tallene i forbindelse med punkterne på en talakse.

Vi skal her omtale en karakterisering af de reelle tal, som kommer tæt på Weierstrass' konstruktion. Det drejer sig om det såkaldte *intervalruseprincip* i følge hvilket de reelle tal kan anskues som »grænsepunkter« for indsnævrende følger af lukkede intervaller med rationale endepunkter.

De reelle tal udmærker sig i forhold til de rationale tal ved at følgende princip er opfyldt.

Intervalruseprincippet: Enhver indsnævrende følge af lukkede intervaller

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots,$$

hvor længden af intervallet $[a_n, b_n]$ går mod 0 for voksende n, har netop ét reelt tal som fælles punkt.

Ved bisektion (halvering) kan vi eksempelvis konstruere en intervalruse for $\sqrt{2}$ som følger:

$$[1, 2] \supseteq \left[1, \frac{3}{2}\right] \supseteq \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \supseteq \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] \supseteq \cdots \supseteq \{\sqrt{2}\}.$$

Den angivne intervalruse har rationale endepunkter, men den fastlægger ikke et rationalt tal, idet en indsnævrende følge af lukkede intervaller, hvor længden af intervallerne går mod 0, højst kan have ét fælles punkt. Eksemplet viser derfor, at intervalruseprincippet ikke er opfyldt i de rationale tal.

Bemærk, at vi ved den geometriske model af de reelle tal i form af en talakse ubemærket har bevæget os ind i uendeligheden: ethvert linjestykke kan deles i det uendelige i vilkårligt små stykker. Der er således ikke længere »huller« i en talakse; den udgør et *kontinuum*, dvs. et sammenhængende hele.

Tal på uendeligheden

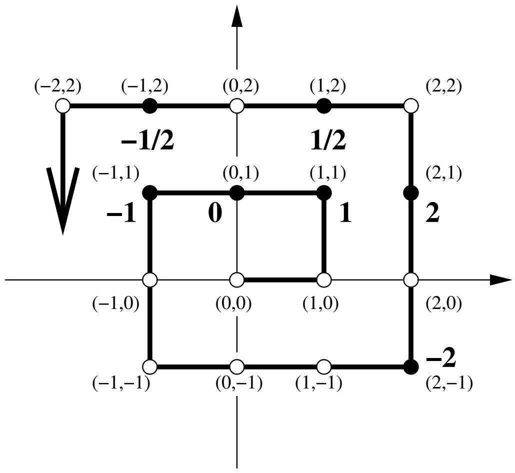
Først i slutningen af 1800-tallet, fra ca. 1870 og fremefter, begyndte matematikere at se på uendelig som noget i sig selv. Det var Cantor, der som den første så på talrækken $\{1, 2, 3, \ldots\}$ i sin fuldstændighed og opfattede det som et nyt tal forbi det endelige, et såkaldt *transfinit* tal. Udviklingen hænger nøje sammen med mængdelærens opståen, hvor Cantor ved sine kardinaltal satte størrelse på mægtigheden af en mængde. Talrækken $\{1, 2, 3, \ldots\}$ repræsenterer som mængde det første transfinite *kardinaltal*, og det betegnes $\aleph_0$. (Tegnet $\aleph$ er et gammelt fønikisk tegn, der læses »alef«.) En mængde, hvis elementer kan parres med den naturlige talrække, altså få sat numre på ryggen, siges at være *tællelig*, eller *numerabel*, og at have mægtigheden (kardinalitet) $\aleph_0$.

Generelt siges to mængder A og B at have *samme kardinalitet*, eller at bestemme *samme kardinaltal*, hvis der kan etableres en en-til-en korrespondance imellem elementerne i de to mængder, dvs. en korrespondance som til ethvert element i den ene mængde A lader svare netop et element i den anden mængde B og omvendt. Alle mængder hvor elementerne kan parres med mængden af fingre på et par hænder har kardinaltallet 10. Kan der etableres en en-til-en korrespondance imellem punkterne i en mængde og tallene i den naturlige talrække, har denne mængde som nævnt kardinaltallet $\aleph_0$. Generelt fastlægger en vilkårlig mængde A et kardinaltal; ofte betegnet med $|A|$. Hvis mængden A indeholder endeligt mange elementer, er kardinaltallet $|A|$ et sædvanligt naturligt tal. I modsat fald fastlægger $|A|$ et *transfinit* kardinaltal.

Tællelighed af de rationale tal

De rationale tal kan stilles op i en rækkefølge. De rationale tal kan altså *tælles*, eller som matematikere siger, de er *numerable*.

For at bevise dette, betragter vi i Figur 2 heltalsgitteret i en plan med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, og laver en spiral i heltalsgitteret med start i $(0, 0)$, der gennemløber alle punkter med heltallige koordinater i en polygonal vej imod uret: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $\ldots$. Træk dernæst spiralen ud i en lang »snor«. På denne snor ligger alle par af hele tal som punkter. Tager vi – når det kan lade sig gøre, dvs. når vi ikke dividerer med 0 – anden koordinaten som nævner og første koordinaten som tæller, får vi en brøk (et rationalt tal). Nu starter vi forfra på »snoren«: $(0, 0)$ dur ikke, $(1, 0)$ dur ikke, $(1, 1)$ dur og giver brøken 1, $(0, 1)$ dur og giver brøken 0, $(-1, 1)$ dur og giver -1, $(-1, 0)$ dur ikke, $(-1, -1)$ giver 1, som vi har haft, så den springer vi over, $\ldots$. Fortsættes på



Figur 2: Tællelighed af de rationale tal

denne måde langs »snoren«, ser vi, at de rationale tal ligger som perler på en snor i en rækkefølge. I systemet antydet her bliver rækkefølgen: $1, 0, -1, -2, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$.

De rationale tal kan altså tælles.

De reelle tal kan ikke tælles

Vi fører et indirekte bevis. Antag med henblik på at opnå en modstrid, at $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ er samtlige reelle tal stillet op i en rækkefølge.

Vælg et interval $[a_1, b_1]$ på talaksen, som ikke indeholder tallet r_1. Tredel intervallet $[a_1, b_1]$ i tre lige lange delintervaller. Mindst ét af disse delintervaller, kald det $[a_2, b_2]$, indeholder ikke tallet r_2. Tredel nu $[a_2, b_2]$ på samme måde og vælg et delinterval $[a_3, b_3]$, som ikke indeholder tallet r_3. Således fortsættes, og vi får frembragt en intervalruse $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$, hvor tallet r_n ikke ligger i intervallet $[a_n, b_n]$ og de efterfølgende intervaller, og hvor længden af intervallerne går mod 0. (Vi foretager tredeling af intervallerne, og ikke bare halvering, for at sikre, at et punkt r_n ikke falder i et delepunkt.)

Intervalrusen bestemmer netop ét reelt tal c, som per konstruktion er forskelligt fra tallene $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Dermed har vi opnået en modstrid med, at $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ skulle være samtlige reelle tal. Altså kan de reelle tal ikke tælles, hvilket skulle bevises.

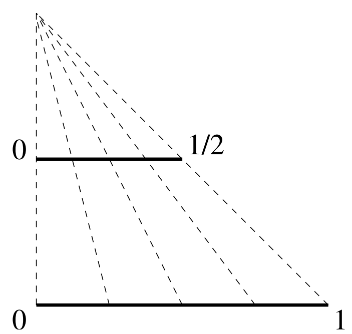
Det var Cantor, der i 1874 som den første viste, at de reelle tal ikke kan tælles. Til sit bevis brugte han en anden metode, der nu kendes som *Cantors diagonalmetode*.

Kontinuumshypotesen

Samlingen af reelle tal kan identificeres med punkterne på en talakse, og man siger derfor også, at de reelle tal har kontinuums mægtighed (kardinalitet). Et berømt matematisk problem knytter sig hertil, nemlig et spørgsmål der kendes under navnet Kontinuumshypotesen: Findes der mængder med kardinalitet imellem $\aleph_0$ (tællelig) og kontinuums kardinalitet? Eller er kontinuums kardinalitet simpelthen det næste kardinaltal $\aleph_1$? Alternativt kan spørgsmålet også formuleres således: Findes der en delmængde af tal imellem mængden af rationale tal og mængden af reelle tal, som ikke er i en-til-en korrespondance med nogen af disse talmængder? Med arbejder af den østrigske matematiker Kurt Gödel (1906–1978) i 1931 og den amerikanske matematiker Paul Cohen (f. 1934) i 1963 ved man nu, at begge muligheder er konsistente med de øvrige almindeligt anerkendte mængdeteoretiske aksiomer i den tyske matematiker Ernst Zermelos (1871–1953) aksiomssystem fra 1908 med forbedringer af den tyske matematiker Abraham A. Fraenkel (1891–1965) omkring 1920, og nu kendt som Zermelo–Fraenkel systemet. Kontinuumshypotesen kan altså ikke besvares inden for Zermelo–Fraenkels aksiomssystem for mængdelæren. Det kan ikke udelukkes, at man senere vil finde et bedre aksiomssystem for mængdelæren til erstatning for Zermelo–Fraenkel systemet, hvori Kontinuumshypotesen får et entydigt svar.

Om regning med uendeligheden

Det var Cantor som i 1870'erne første gang præcist definerede hvad det vil sige, at en mængde er uendelig. En mængde A er *uendelig*, hvis den kan bringes i en-til-en korrespondance med en ægte delmængde B af sig selv, altså hvis alle elementerne i A kan parres med elementerne i en ægte delmængde B af A. I Figur 3 vises det, at intervallet $[0,1]$ er en uendelig mængde, idet $[0,1]$ ved en simpel centralprojektion kan bringes i en-til-en korrespondance med delintervallet $[0,1/2]$.



Figur 3: Intervallet [0,1] er en uendelig mængde

En række overraskende konsekvenser af uendeligheden er på glimrende vis blevet illustreret af den tyske matematiker David Hilbert (1862–1943), som har lagt navn til et matematisk hotel: Hilberts hotel. I Hilberts hotel har man uendeligt mange værelser, alle numrene i den naturlige talrække er i sving som værelsesnumre. En aften er alt optaget på Hilberts hotel. En rejsende kommer og spørger om han kan få et værelse. Ja, siger portien. Men alt er jo optaget, så hvordan klarer portien nu den? Han flytter bare alle gæsterne et nummer op, så er værelse nummer 1 klar til den nye gæst. Så i Hilberts hotel er der altid plads til en til.

Dette forklarer (beviser), at

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

og ved simpel induktion, at

$$\aleph_0 + n = \aleph_0,$$

for et vilkårligt naturligt tal n.

Men der er plads til mange flere i Hilberts hotel, for denne fremgangsmåde kan udvides, som vi nu skal se. Hilberts hotel er bare et af hotellerne i en hel kæde af sådanne hoteller. En aften er alle hotellerne fyldt. Nu indtræffer katastrofen: et af hotellerne brænder ned til grunden, men heldigvis bliver alle gæsterne reddet. Hvordan klarer hotelkæden af Hilbert hoteller nu dette? Man kører gæsterne hen til et andet Hilbert hotel. Der flytter man alle gæsterne i dette hotel over på de lige numre (man skal altså bare gange sit værelsesnummer med to for at få sit nye værelsesnummer), og så er alle de ulige numre ledige til gæsterne fra det nedbrændte hotel.

Dette forklarer (beviser) det overraskende fænomen, at

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

For to mængder A og B med endeligt mange elementer er summen af de tilhørende kardinaltal $|A|$ og $|B|$ netop antallet af elementer i foreningsmængden af mængderne A og B, når disse opfattes som disjunkte mængder, altså som værende uden fælles elementer; denne såkaldte *disjunkte* foreningsmængde skrives $A \sqcup B$. Tilsvarende er produktet af de endelige kardinaltal $|A|$ og $|B|$ netop antallet af elementer i produktmængden $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Inspireret heraf defineres *summen* og *produktet* af to kardinaltal $|A|$ og $|B|$ for generelle mængder A og B som kardinaltallet for $A \sqcup B$, henholdsvis $A \times B$. På symbolsk form svarer disse definitioner til formlerne

$$|A| + |B| = |A \sqcup B| \qquad\qquad |A| \cdot |B| = |A \times B| .$$

Det ses umiddelbart, at det oven for anførte argument for at $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ under udnyttelse af Hilberts hotel, er i overensstemmelse med definitionen for summen af to kardinaltal.

Nu beregner vi produktet $\aleph_0 \cdot \aleph_0$. Ved et argument svarende til argumentet for tællelighed af de rationale tal, er det let at se, at produktmængden for den naturlige talrække med sig selv, altså mængden af talpar af naturlige tal, er tællelig. Dette viser, at

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Ovenstående er eksempler på en generelt udviklet teori for regning med de af Cantor indførte kardinaltal.

Cantors uendelighedsbegreb blev ikke lige vel modtaget af alle matematikere. Således var Cantors tidligere lærer Leopold Kronecker (1823–1891) en stærk modstander af de nye ideer. Kronecker fandt, at alle matematiske begreber og forhold skulle kunne afklares i endelig mange skridt, og at enhver diskussion af uendelige mængder var illegitim, da den forudsatte, at uendelige mængder eksisterede i matematikken. Cantor havde adskillige nervøse sammenbrud igennem sin karriere, og Kroneckers angreb gik ham stærkt på. Men Cantors ideer havde også mange varme fortalere, ikke mindst David Hilbert.

Afsluttende bemærkninger

Ved den anden internationale kongres for matematikere i Paris i 1900 formulerede David Hilbert treogtyve vigtige matematiske problemer, som stod uløste ved indgangen til det 20. århundrede. Som det første af disse problemer stillede han spørgsmålet vedrørende Kontinuumshypotesen. Med arbejderne af Kurt Gödel 1931 og Paul Cohen 1963 blev det afklaret, at Kontinuumshypotesen ikke kan besvares inden for Zermelo–Fraenkels aksiomssystem for mængdelæren. I forbindelse med sit arbejde beviste Gödel den berømte sætning, der nu er kendt som *Gödels Ufuldstændighedssætning.* Denne skelsættende sætning siger, at ethvert aksiomatisk opbygget matematisk system, der indeholder den (alment accepterede) aksiomatisering af de naturlige tal opstillet af Giuseppe Peano (1858–1932) kort før 1900, vil indeholde udsagn fra mængdelæren, der hverken kan bevises eller modbevises; det er med andre ord umuligt at bevise, at Zermelo–Frankels system for mængdelæren er fuldstændigt inden for et sådant aksiomatisk system. Derved blev den drøm som Hilbert havde haft om at finde et fuldstændigt aksiomatisk grundlag for hele matematikken – den såkaldte *formalistiske* anskuelse af matematikken – kastet i grus. Hvorvidt dette er tilfredsstillende set fra et matematisk synspunkt er et åbent spørgsmål. Men sikkert er det, at spørgsmål om uendeligheden fortsat vil være i forgrunden ved de undersøgelser af matematikkens grundlag som også vil finde sted i det 21. århundrede.

Litteratur

Emnerne i ovenstående artikel er hentet fra bogen

V. L. Hansen, *Matematikkens Uendelige Univers*, Den Private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Universitet, 2002.

Her kan man finde yderligere detaljer og litteraturhenvisninger.

Blandt de henvisninger i bogen, som er særligt relevante for nærværende artiklel, skal fremhæves:

R. Courant and H. Robbins: *What is Mathematics*, Oxford University Press, New York, 1941.

V. L. Hansen: *Temaer fra Geometrien*, Matematiklærerforeningen, 1992.
[Udvidet engelsk udgave: *Shadows of the Circle*, World Scientific, Singapore, 1998.]

J. Jørgensen: *Filosofiske Forelæsninger*, Anden, omarbejdede Udgave, Munksgaards Forlag, København, 1935.

M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

F. Topsøe: Jessens Balsal, Hilberts Hotel – en appetitvækker, i *Matematiske Ideer* (red.: S. T. Jensen og J. Matthiasen), Matematiklærerforeningen, 1993.