Normat **52**:3, 118–121 (2004)

Än så många exempel i rad ger ingen garanti ...

Bengt Ulin

Tackjärnsvägen 12
SE–168 68 Bromma
bengt.ulin@swipnet.se

I enlighet med rubriken är syftet med den undersökning som följer här att ge ett kraftfullt exempel där en viss egenskap gäller mycket länge men plötsligt upphör. Däri ligger en poäng som kan göra intryck på skolungdomar i högre årskurser och motverka tendenser till snabba generaliseringar.

Undersökningen är på samma gång en förenkling och – framför allt – en utvidgning av [4].

Vi ska utgå från frågeställningen (F): ”Om ett naturligt tal N innehållande endast nollor och ettor är delbart med elva, är då talet, läst som ett binärt tal, delbart med tre, dvs med det binära talet 11?” Att omvändningen inte gäller följer omedelbart av exemplet 10101 som i det binära systemet har värdet 21 och alltså är delbart med tre, medan det decimala talet tiotusenetthundraett inte är delbart med elva. I fortsättningen ska N innebära det decimala talet och N^* det binära talet med samma siffror. För tydlighetens skull ger vi orden ”elva” och ”tre” företräde framför 11 resp 11^*.

För att besvara frågan (F) kommer vi att dra nytta av en enkel delbarhetssats:

Sats *Ett naturligt tal* $N = \sum_i a_i p^i$ *i ett talsystem med bas* p *är delbart med* $p+1$ *om och endast om talet* $D = \sum_k a_{2k+1} - \sum_k a_{2k}$ *är delbart med* $p+1$.

D är alltså differensen mellan summan av siffror med udda platsnummer (1, 3, 5, ...) och summan av siffror med jämna platsnummer (2, 4, 6, ...), varvid talets entalssiffra har nummer 1 och numreringen fortsätter år vänster.

Bevis: Om $u(p)$ får beteckna det polynom i p som uttrycket $N + D$ bildar, så gäller

$$u(p) = \sum_\nu a_{2\nu+1}(p^{2\nu+1} + 1) + \sum_\nu a_{2\nu}(p^{2\nu} - 1).$$

Eftersom båda summornas parenteser i $u(p)$ antar värdet noll för $p = -1$, innehåller $u(p)$ faktorn $p + 1$. Av $u(p) = N + D$ följer nu att N och D samtidigt är delbara med $p + 1$. $\square$

För oss är satsen av betydelse med baserna $p = 10$ och $p = 2$. Till att börja med visar den att ett (decimalt) tal N är delbart med elva om och endast om D är delbart med elva, vilket innebär $D = 0, \pm 11, \pm 22, \pm 33$, etc. Eftersom vi begränsar oss till tal N innehållande endast nollor och ettor är D lika med antalet ettor på uddaplatser minus antalet ettor på platser med jämna nummer.

Beträffande N^* säger satsen att detta tal är delbart med tre (11^*) om och endast om $D = 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots$ Av vad vi just konstaterat följer att N och N^* är delbara med elva resp tre för $D = 0, \pm 33, \pm 66, \pm 99, \ldots$ Därmed är frågan (F) i princip besvarad, men låt oss se på några konsekvenser.

Om N är en elva-multipel med högst 20 siffror så leder $-10 \leq D \leq 10$ till $D = 0$. Alla motsvarande tal N^* är då delbara med tre. Den minsta elva-multipel som inte är binärt delbar med tre har $D = 11$ (elva) och är det tal X som har ettor på platserna 1, 3, 5, ..., 21 och har nollor på plats 2, 4, 6, ..., 20, dvs.

$$X = 1\,01\,01\,01\,01\,01\,01\,01\,01\,01\,01.$$

Motsvarande binära tal är

$$X^* = \sum_0^{10} 4^i = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{10} = \tfrac{1}{3}(2^{11}+1)(2^{11}-1) = 1\,398\,101.$$

Vi frågar oss nu hur många elva-multipler med binärt utseende som föregår talet X och således har $D = 0$.

Dessa multipler kan indelas i två kategorier K och L. Av typ K är alla de tal N som har högst 20 siffror, av typ L de tal N som i likhet med X har en etta på plats nr 21 (första siffran från vänster). I K-mängden ingår talet 0 och alla tal N med högst 10 ettor på uddaplatser och lika många ettor på ”jämna” platser. Eftersom k stycken ettor kan placeras ut på $\binom{10}{k}$ olika sätt på 10 platser blir antalet N-tal av typ K

$$A(K) = \sum_0^{10} \binom{10}{k}^2.$$

Detta antal beräknas lätt med $n = 10$ i den generella formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \tag{1}$$

vilket ger

$$A(K) = \binom{20}{10} = 184\,756. \tag{2}$$

Giltigheten av (1) inses om man jämför koefficienterna för x^n i identiteten

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n,$$

varvid man skriver högerledet som

$$\sum_0^n \binom{n}{k} x^k \cdot \sum_0^n \binom{n-k}{k} x^{n-k}$$

och utnyttjar den kända likheten $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Beräkningen av antalet elva-multipler av L-typ, $A(L)$, kräver mer arbete. Mängden av sådana tal kan indelas i fem grupper av följande typ:

L_1: de 3 första siffrorna (från vänster) är 100,
L_2: de 5 första siffrorna är 10100,
L_3: de 7 första siffrorna är 1010100,
L_4: de 9 första siffrorna är 101010100,
och L_5 som utgörs av ett enda tal, nämligen 1 01 01 01 01 00 10 10 10 10 10, där antalet ettor på ”udda” resp ”jämna” platser är fem.

På de 10 platser som finns av respektive paritet kan man inte utplacera 6 eller fler ettor, eftersom talet då skulle bli större än X. Med ett kombinatoriskt resonemang liknande det som ledde till $A(K)$ erhåller man följande antal multipler i respektive grupp:

$$A(L_1) = \sum_0^8 \binom{9}{k}\binom{9}{k+1}, \qquad A(L_2) = \sum_0^6 \binom{8}{k}\binom{8}{k+2},$$

$$A(L_3) = \sum_0^4 \binom{7}{k}\binom{7}{k+3}, \qquad A(L_4) = \sum_0^2 \binom{6}{k}\binom{6}{k+4},$$

$$A(L_5) = 1.$$

Den numeriska beräkningen utvisar att summan av dessa antal är

$$\sum_1^5 A(L_\nu) = A(L) = 52\,834. \tag{3}$$

Enligt (2) och (3) erhåller vi nu

$$A(K) + A(L) = 237\,590.$$

Det visar oss att för 237 590 successiva elva-multipler N av binärtyp (från och med $N = 0$) är N^* delbart med 11^*, en egenskap som därefter upphör med talet X. Vilken elva-multipel Y närmast över X är återigen icke binärt delbar med 11^*? Vi måste då sörja för $D = 11$ eller -11. Vi sätter därför ut en etta på plats nr 22. Den minsta differensen $Y - X$ uppnår vi genom att sätta ettor på alla övriga platser med jämnt nummer och besätta alla udda-platser med nollor. Vi får då (med $D = -11$)

$$Y = 10\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10\,10.$$

Y är i decimalsystemet tio ggr X, i binär form gäller $Y = 10^*X$, dvs två ggr X. Närmast större tal med samma karaktär av motexempel som Y är ett tal Z med

$D = 12 - 1 = 11$. Det har 12 ettor i rad på udda-platser och en etta på plats nr 2, platsen med lägst jämna nummer. Man inser att $Z = 100X + 11$.

Mellan X och Y liksom mellan Y och Z, etc, ligger många elva-multipler av binärtyp som i likhet med alla multipler $< X$ är delbara med 3. Närmast över X av dessa "normala" multipler ligger det 21-siffriga talet

$$M = 1\,01\,01\,01\,01\,10\,00\,10\,10\,10\,10$$

med tio ettor, dels fem på plats nr 21, 19, 17, 15 och 13, dels fem på plats nr 2, 4, 6, 8 och 12. Av $D = 5 - 5 = 0$ följer att M är decimalt delbart med elva och binärt delbart med 11^*.

Avslutningsvis vill jag nämna ett par exempel med samma sens moral, där en egenskap dock inte upprepas särskilt många gånger.

Euler visade på polynomet $n^2 + n + 41$, vars värde blir idel primtal, då n går från 0 till 39 men är delbart med 41 för $n = 40$.

Ett vackert och effektfullt exempel är det cirkeldelningsproblem som leder till *Leo Mosers talföljd* [2]: n punkter sätts ut på en cirkelrand, varvid deras sammanbindande kordor ska dela in cirkelarean i maximalt många områden, säg $A(n)$. Eleverna ritar figurer och finner $A(n) = 1, 2, 4, 8$ och 16 för $n = 1, 2, 3, 4$ resp 5. En del elever blir förvånade när de konstaterar $A(6) = 31$. Problemet att finna rätt funktion $A(n)$ ställdes i NÄMNAREN nr 2, 1981–82 och vållade läsarna en del bekymmer. Lösning finns i [1] och i [2], nr 9. Se även [3].

Vid utarbetningen av manuskriptet till föreliggande uppsats har Stefan Lundbäck, Stockholm, medverkat med värdefull granskning och förenkling.

Referenser

1 A. Dunkels, Problem med problem, *NÄMNAREN* **3**, 1982–83.

2 M. Gardner, Mathematical Games, *Sci. Amer.* nr 8 och 9, 1969.

3 B. Ulin, *Att finna ett spår*, Utbildningsförlaget 1988 (utsåld). Kan anskaffas i den tyska versionen *Der Lösung auf der Spur*, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart 1987.

4 B. Ulin, Ett problem rörande binär delbarhet, *Elementa* 1/1985, s. 22–23.