Matematiska kilskriftstexter i den norska Schøyensamlingen

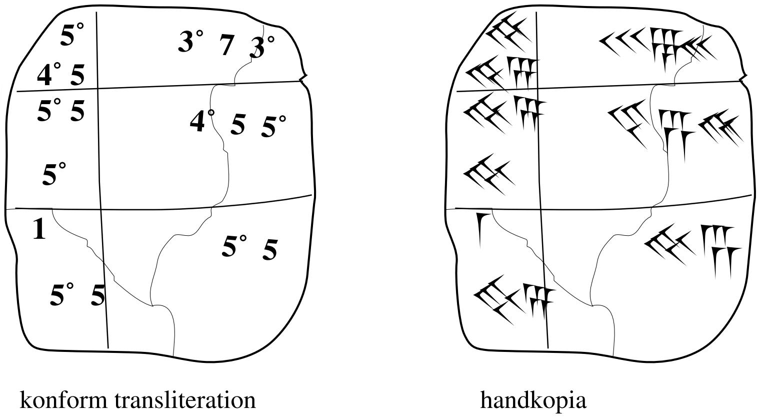
Jöran Friberg

Stortorget 1
SE–28131 Hässleholm
friberg@math.chalmers.se

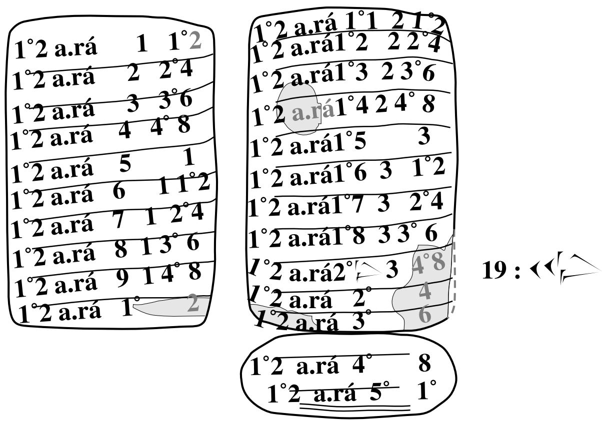
Martin Schøyens samling av gamla och värdefulla dokument av många olika kategorier innehåller bland annat en förnämlig samling matematiska kilskriftstexter, huvudsakligen gammalbabyloniska, dvs. från den tidigare hälften av andra årtusendet f.Kr. Enligt planerna kommer dessa texter att bli publicerade, med utförliga kommentarer, i min bok *Pictographic and Cuneiform Tablets in the Schøyen Collection*, 1: *Mathematical Cuneiform Texts*, Hermes Publishing, Oslo 2005. Exempel på intressanta texter diskuterade i boken presenteras här nedan i all korthet.

1. Nybörjares övningar med stora siffror. Schøyens samling av matematiska kilskriftstexter är faktiskt så omfattande att man i detalj kan följa babyloniska skolelevers framsteg i skrivskicklighet och räkneförmåga, från det första skolårets elementära multiplikationsövningar skrivna med stora klumpiga siffror till den färdigutbildade mönsterelevens avancerade matematiska problemtexter skrivna med nästan mikroskopiskt små kilskriftstecken. Fig. 1 visar ett exempel på *en nybörjares multiplikationsövningar*, som börjar med uträkningen $50 \times 45 = 37\ 30$ (där 37 30 är ett sexagesimalt tal som i decimala siffror motsvarar $37 \times 60 + 30 = 2\,250$).

Det fanns inte någon kilskriftssiffra för noll, men istället fanns det olika siffror för ental (upprättstående kilar) och tiotal (sneda kilar). I transliterationen till moderna siffror (Fig. 1, till vänster) skrivs titotalen med en liten cirkel upptill till höger.



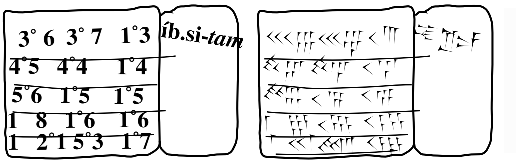
Figur 1: MS 2728. En nybörjares enkla multiplikationsövningar.



Figur 2: MS 2184/3. En multiplikationstabell med huvudtalet 12.

2. Aritmetiska tabelltexter med sexagesimala tal. För sådana här uträkningar använde babyloniska skolelever *sexagesimala multiplikationstabeller* som de kopierade från lärarens exemplar och sedan i bästa fall lärde sig utantill. Fig. 2 visar ett exempel på en sådan multiplikationstabell. Det är en multiplikationstabell (i transliteration till moderna siffror) med "huvudtalet" 12. Det ofta återkommande ordet a.rá är ett sumeriskt låneord i den babyloniska texten. Det betyder faktiskt ordagrant 'gånger', eftersom rá är ett sumeriskt verb som betyder 'gå'. Tabellen anger produkten av 12, först med alla heltal från 1 till 19, sedan med tiotalen från 20 till 50. Exempel: '$12 \times 40 = 8$', vilket egentligen betyder att $12 \times 40 = 8 \times 60$ ($= 480$). Babylonierna använde nämligen "relativa" sexagesimala tal med flytande värden, eftersom de inte hade uppfunnit nollan! För att skriva '19', egentligen '$20 - 1$', hittade dessutom varje skolelev på en egen krumelur!

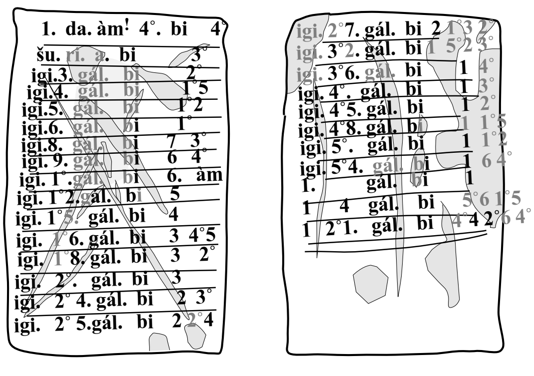
Utöver multiplikationstabeller fick den babyloniske skoleleven lära sig också andra aritmetiska tabeller. *Kvadrattabeller* gick från ‘$1 \times 1 = 1$’ till ‘$19 \times 19 = 6\ 01$’ (361), ‘$20 \times 20 = 6\ 40$’, ‘$30 \times 30 = 15$’ (egentligen 15 00), ‘$40 \times 40 = 26\ 40$’, ‘$50 \times 50 = 41\ 40$’, och ‘$1 \times 1 = 1$’ (egentligen $1\ 00 \times 1\ 00 = 1\ 00\ 00$). *Kvadratrotstabeller* gick från ‘1 har 1 som sida’ hela vägen till ‘58 01 har 59 som sida’ och ‘1 har 1 som sida’. Det fanns av någon anledning inga kubiktabeller, men *kubikrotstabeller* gick från ‘1 har 1 som sida’ hela vägen till ‘57 02 59 har 59 som sida’ och igen ‘1 har 1 som sida’. Fig. 3 visar en liten lertavla med ett kort utdrag på 5 rader ur en sådan kubikrotstabell. Den går från ‘36 37 13’ till ‘1 21 53 17’.



Figur 3: MS 3966. Ett kort utdrag på 5 rader ur en kubikrotstabell.

Ordet íb.si-*tam* som är skrivet på kanten är en kombination av ett sumeriskt ord íb.si som betyder ungefär ‘liksidig’ (en kub är ju liksidig) och en babylonisk ackusativändelse -*tam*. Sumeriska låneord spelade faktiskt en lika viktig roll i den babyloniska matematiken som grekiska och latinska låneord spelar i vår egen tids matematik.

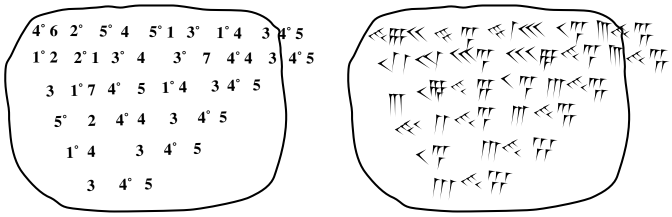
Typiskt för den babyloniska matematiken var användningen av reciproktalstabeller, egentligen en sorts divisionstabeller. Exemplet i Fig. 4 är en transliteration av en sådan tabell som tydligen innehöll så många fel att en ilsken lärare har korsat över texten på båda sidorna av lertavlan!



Figur 4: MS 3890. En dålig elevs underkända reciproktalstabell.

En reciproktalstabell börjar alltid med två rader som talar om att ‘$^2/_3$ av 60 är 40’ och ‘hälften (av 60) är 30’. Sedan fortsätter den med ‘$^1/_3$ är 20’, ‘$^1/_4$ är 15’ och så vidare, hela vägen till ‘$^1/_{54}$ är 1 06 40’ och ‘$^1/_1$ är 1’, ‘$^1/_{1\ 04}$ är 56 15’ och till slut ‘$^1/_{1\ 21}$ är 44 26 40’, vilket betyder att $^{60}/_{81} = 0;44\ 26\ 40$ (sexagesimalbråk).

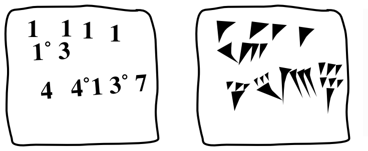
3. Aritmetiska övningsuppgifter. Observera att den babyloniska reciproktalstabellen bara innehåller reciproktal till "sexagesimalt reguljära" heltal mellan 2 och 1 21. Heltal kallas sexagesimalt reguljära om de går jämnt upp i '1' (som kan betyda 1 00 = 60 eller 1 00 00 = 60^2 och så vidare). Det finns till exempel inga sådana heltal mellan 54 och 60, och 7 är naturligtvis inte heller reguljärt. Anledningen till att tabellen slutar med reciproktalen till 1 04 och 1 21 är att 1 04 = 64 = 2^6 och 1 21 = 81 = 3^4.



Figur 5: En nedåtstigande potenstabell med potenser av 3 45.

Räkning med "mångsiffriga" reguljära sexagesimaltal spelade en viktig roll i babylonisk matematik. Ett vackert exempel är den "nedåtstigande potenstabellen" i Fig. 5 som börjar med det sexagesimalt reguljära talet 46 20 54 51 30 14 03 45 = $(3\,45)^6 = 15^{12}$. Sedan faktoriseras en faktor 3 45 i taget bort tills det slutliga resultatet blir $(3\,45)^2$ = 14 03 45 och $(3\,45)^1$ = 3 45.

I babylonisk matematik fanns det två olika *divisionsmetoder*. Den första användes om ett tal a skulle divideras med ett tal b som var ett sexagesimalt reguljärt tal. Då var första steget att beräkna reciproktalet till b, som kallades igi b, troligen sumeriska för 'det motsatta talet till b'. Sedan beräknades kvoten a/b som $a \times$ igi b (dvs som $a \times 1/b$). Men om b inte var sexagesimalt reguljärt så fick man använda en annan metod. Ett sådant fall förekommer i nästa exempel, i Fig. 6. Här är tre tal uppskrivna under varandra. Det ser ut som om talen är 4, 13, och 4 41 37, men i själva verket är det första talet 1 01 01 01, och det här var antagligen en uppgift som en elev skulle ta med sig hem och lösa för att sedan visa upp resultatet nästa dag för läraren. Det gällde att visa att 1 01 01 01 dividerat med 13 är 4 41 37.



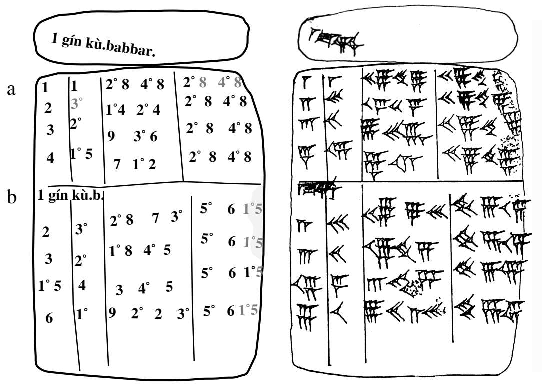
Figur 6: MS 2317. En sexagesimal divisionsuppgift med en ickereguljär divisor.

Hur man kunde lösa en sådan uppgift framgår av en 500 år äldre matematisk kilskriftstext från staden Ebla. Metoden från Ebla går ut på att man löser en följd av successivt svårare divisionsuppgifter tills man når fram till det önskade resultatet. Vill man till exempel dividera 1 01 01 01 med 13, så dividerar man först 1 00 (60) med 13. Resultatet är att 1 00 = $13 \times 4 + 8$ (1 00/13 = 4 med resten 8). I de följande stegen ser man att 1 00 00 = $13 \times 4\,36 + 12$, och att 1 00 00 00 = $13 \times 4\,36\,55 + 5$.

Adderar man resultaten, så får man till slut att 1 01 01 01 = 1 00 00 00 + 1 00 00 + 1 00 + 1 = 13 × (4 36 55 + 4 36 + 4) + (5 + 12 + 8 + 1) = 13 × 4 41 35 + 26 = 13 × 4 41 37. Alltså är svaret till divisionsuppgiften att 1 01 01 01 dividerat med 13 är 4 41 37.

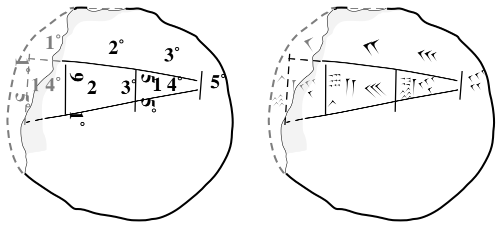
Från en modern ståndpunkt så kan metoden förklaras med oändliga sexagesimalbråk, alternativt allmänna bråk, nämligen att 1/13 = 0;04 36 55 . . . , och att 1 01 01 01 × $^1/_{13}$ = 4 36 55 $^5/_{13}$ + 4 36 $^{12}/_{13}$ + 4 $^8/_{13}$ + $^1/_{13}$ = 4 41 37!

4. Lösningar i tabellform till kombinerad-köpkvots-problem. Lertavlan i Fig. 7 innehåller två likartade uträkningar. I den första, uppgift a, har eleven tydligen fått veta att fyra olika varor har "köpkvoterna" 1, 2, 3, och 4 vikt- eller volym-enheter (kolumn 1). Det betyder att för 1 shekel i silver (på sumeriska 1 gín kù.babbar) kan man köpa 1 enhet av den första varan, 2 av den andra, 3 av den tredje, 4 av den fjärde. Frågan är nu hur mycket man kan köpa för 1 shekel om man skall köpa *lika mycket av alla fyra varorna.* Man börjar med att räkna ut "enhetspriserna" för de olika varorna. De är 1 shekel per enhet för vara 1, $^1/_2$ shekel för vara 2, $^1/_3$ för vara 3 och $^1/_4$ för vara 4. Enhetspriserna är antecknade i kolumn 2 som talen 1, 30 (= 0;30), 20 (= 0;20), och 15 (= 0;15). Det följer att det "kombinerade enhetspriset" är 1 + 0;30 + 0;20 + 0;15 = 2;05 shekel. Reciproktalet till 2;05 = 2 $^1/_{12}$ = $^{25}/_{12}$ är $^{12}/_{25}$ = 0;28 48. Om man nu köper 0;28 48 enheter av varje vara så blir priset man betalar för den första varan 0;28 48 shekel, för den andra 0;14 24 shekel, osv. De här priserna är antecknade i kolumn 3. Summan av priserna i kolumn 3 är precis 1 shekel. Därför kan man kalla talet 0;28 48 för den "kombinerade köpkvoten". Man kan ju köpa precis 0;28 48 enheter av varje vara för 1 shekel sammanlagt. Därför står det också 28 48 fyra gånger i kolumn 5.



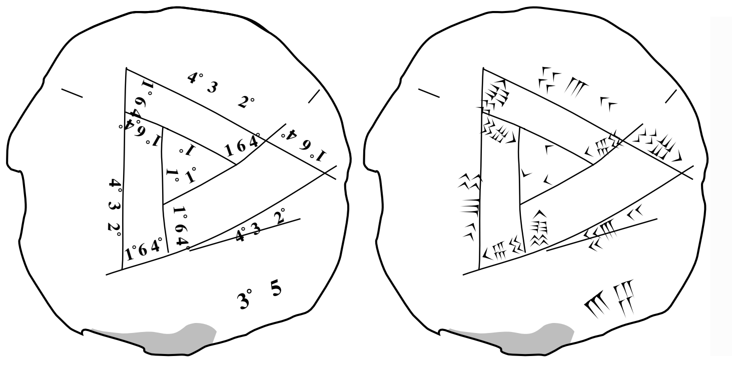
Figur 7: MS 2830. Två uträkningar av kombinerade köpkvoter.

5. Geometriska övningsuppgifter. Runda lertavlor, så kallade linser, med siffror eller geometriska figurer var förmodligen den tidens "föreläsningsanteckningar", slarvigt nedskrivna av elever som lyssnade till en lärares demonstration av hur ett matematiskt problem skulle lösas. Kanske var meningen att eleven sedan skulle gå hem och skriva ut sin egen mer detaljerade version av lösningsproceduren att visa upp för läraren nästa dag. I Fig. 8 demonstreras ett exempel på en sådan rund lertavla, med en teckning av en parallelltrapets delad i tre delar av två parallella tvärlinjer. En trolig tolkning är att det ställda problemet var att beräkna längderna av de fyra parallella sidorna då det var givet att långsidan (eller egentligen höjden) av trapetsen var delad av tvärlinjerna i tre delar som mätte 10, 20, och 30 "stavlängder", och att de två yttersta delytorna mätte vardera 1 40 "kvadratstavar". Om längderna av de fyra parallella sidorna kallas p, q, r, s, så kan ett sådant problem ersättas av ett system av *fyra linjära ekvationer för fyra obekanta*: $(p+q)/2 \times 10 = 1\ 40$, $(r+s)/2 \times 30 = 1\ 40$, $(p-q)/10 = (q-r)/20 = (r-s)/30$. Lösningen till problemet är angiven i figuren: $p = 10\ 50$, $q = 9\ 10$, $r = 5\ 50$, $s = 50$.



Figur 8: MS 3908. En tredelad parallelltrapets.

Exemplet visar en tydlig skillnad mellan babylonisk och grekisk geometri: Medan den klassiska grekiska geometrin var abstrakt och resonerande, så var den babyloniska geometrin konkret och numerisk. Det framgår också av nästa exempel, på ytterligare en rund lertavla (Fig. 9). Här är tre likadana parallelltrapetser förenade till ett "liksidigt triangulärt band" som omsluter en liksidig triangel med sidan 10, och som är inneslutet i en liksidig triangel med sidan 16;40 + 43;20 = 1 00.



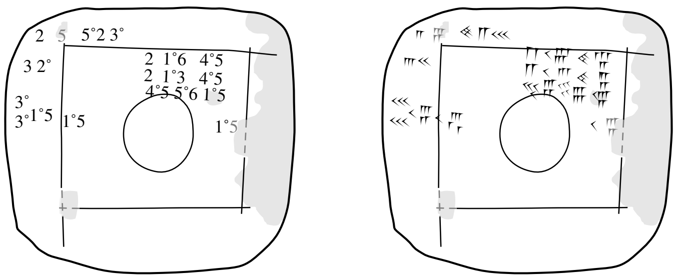
Figur 9: MS 2192. Ett liksidigt triangulärt band uppdelat i tre parallelltrapetser.

En möjlig tolkning är att figuren illustrerar problemet att bestämma ytan av det liksidiga triangulära bandet då man vet bara att den yttre liksidiga triangeln har sidan 1 00 och att den inre liksidiga triangeln har sidan 10. Man kan då räkna så här: Kalla längden av kortsidan i en av trapetserna för a. Då är längderna av de parallella sidorna i trapetsen $10 + a$ och $10 + 2a$. Samtidigt är $10 + 3a = 1\ 00$. Därför är $a = {}^{50}/_{3} = 16;40$, $10 + a = 26;40$ och $10 + 2a = 43;20$.

Vill man nu beräkna ytan av det triangulära bandet kan man göra det på två sätt. Ett sätt är att beräkna den sammanlagda ytan av de tre trapetserna. Den är

$3 \times (43\ 20 + 26\ 40)/2 \times h = 3 \times 35 \times h$, där h är höjden i trapetsen. Ett annat sätt är att utnyttja att eftersom sidan av den yttre triangeln är 6 gånger så stor som sidan i den inre triangeln, så är ytan av den yttre triangeln 36 gånger så stor som ytan av den inre triangeln. *Alltså är ytan av det triangulära bandet 35 gånger ytan av den inre triangeln.* Siffran 35 nära kanten på den runda lertavlan kan därför förklaras på två olika sätt i samband med beräkningen av ytan av det triangulära bandet!

En annan slarvig anteckning, den här gången på en avrundat kvadratisk lertavla (Fig. 10) visar en cirkel placerad symmetriskt omkring mitten av en kvadrat. Siffrorna som är noterade i och runtom kvadraten är svåra att tolka.

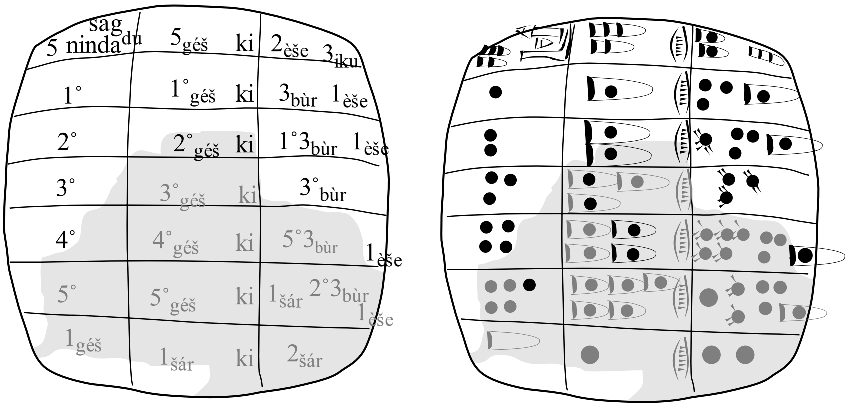


Figur 10: MS 2985. En cirkel i mitten av en kvadrat.

Lyckligtvis finns det en annan text som kan hjälpa till med tolkningen av den här figuren, en gammalbabylonisk problemtext från staden Susa i västra Iran. I den texten är en så kallad "konkav kvadrat" (en figur begränsad av fyra lika cirkelbågar) placerad symmetriskt omkring mitten av en kvadrat, och det angivna problemet är att bestämma sidan på kvadraten om både minsta avståndet från den konkava kvadraten till sidorna av kvadraten och ytan av området mellan den konkava kvadraten och kvadraten är kända. Problemet kan omformuleras som en kvadratisk ekvation.

Det är förmodligen likadant i det här fallet. I så fall fungerar det så här: Givet är att avståndet från cirkeln till sidorna av kvadraten är 3;45 och att ytan av området mellan cirkeln och kvadraten är $B = 28\ 21;33\ 45$. Det gäller att bestämma längden d av cirkelns diameter. Det är klart att sidan av kvadraten är $d + 7;30$, och att ytan av cirkeln är $0;45 \times \text{kv.}\, d$. (Här betyder kv. d kvadraten av d, och $0;45 = {}^3\!/_4$ är den babyloniska approximationen till $\pi/4$.) Därför kan d bestämmas som en lösning till den kvadratiska ekvationen $\text{kv.}(d + 7;30) - 0;45 \times \text{kv.}\, d = B$, eller $0;15 \times \text{kv.}\, d + 15 \times d = B - 56;15$. Eftersom kv. $0;30 = 0;15$ (jämför med anteckningen i vänstra kanten på lertavlan) så kan ekvationen omformuleras ännu en gång, till $\text{kv.}(0;30 \times d + 15) = B + 2;48\ 45 = 28\ 21;33\ 45$. Här är högerledet kvadraten på 41;15. Alltså är $0;30 \times d + 15 = 41;15$. Lösningen till den kvadratiska ekvationen är därför att $d = 52;30$, ett tal som är noterat i figuren till vänster ovanför kvadraten. Det följer då också att sidan på kvadraten är $52;30 + 2 \times 3;45 = 1\ 00$.

6. En gammalsumerisk geometrisk tabelltext. Den äldsta matematiska kilskriftstexten i Schøyensamlingen (Fig. 11) är en gammalsumerisk tabelltext från ED III (Early Dynastic III perioden, ca 2600–2350 f.Kr.). Den är så gammal att sexagesimala tal ännu inte skrevs i ett sexagesimalt positionssystem, utan olika taltecken



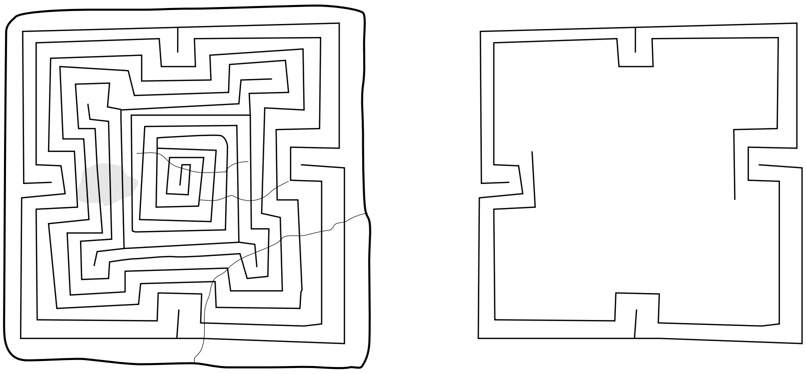
Figur 11: MS 3047. En gammalsumerisk geometrisk multiplikationstabell.

användes för 1 och för 60, liksom för 10 och för 10×60. Tecknet för 60 är en större variant av tecknet för 1, och tecknet för 10×60 är tecknet för 60 med tecknet för 10 inuti. Dessutom är texten så gammal att siffror ännu inte skrevs med kilskriftstecken utan med rundade tecken. (Man skrev kilskriften med en vass pinne men siffertecknen med en rund pinne.)

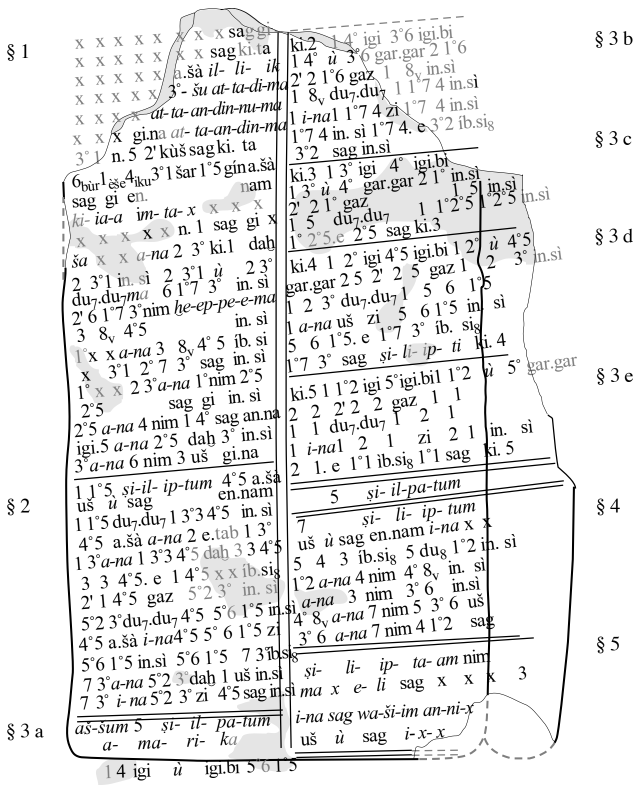
Det här är en matematisk tabell med 7 rader och 3 kolumner. I varje rad anges först kortsidan av en rektangel, sedan långsidan, och sist ytan av rektangeln. I alla 7 raderna är långsidan 1 gésh (60) gånger så lång som kortsidan. Nedan ges en transliteration av tabellen med användning av följande sumeriska termer: 1 gésh = 60, 1 shár = 3600, 1 iku = 100 kvadratstavar, 1 èshe = 6 iku, 1 bùr = 3 èshe.

5	×	5 gésh	=	2 èshe 3 iku	(2 1/2 èshe)
10	×	10 gésh	=	3 bùr 1 èshe	(10 èshe)
20	×	20 gésh	=	13 bùr 1 èshe	(40 èshe)
30	×	30 gésh	=	30 bùr	(90 èshe)
40	×	40 gésh	=	53 bùr 1 èshe	(160 èshe)
50	×	50 gésh	=	1 shár 23 bùr 1 èshe	(250 èshe)
1 gésh	×	1 shár	=	2 shár bùr	(360 èshe)

7. Babyloniska labyrinter av en hittills okänd typ. Två lertavlor i Schøyensamlingen uppvisar teckningar av labyrinter. Båda labyrinterna är av helt nya typer, vilket är anmärkningsvärt eftersom hittills alla kända teckningar eller gestaltningar av labyrinter har varit antingen enkla och ointressanta eller diverse varianter av den klassiska "grekiska" eller "mykenska" labyrinten. En av de nya babyloniska labyrinterna ser ut som i Fig. 12, till vänster. I motsats till den grekiska labyrinten som har bara en ingång, med en väg som leder in till centrum, så har den här labyrinten två ingångar, med en väg som leder in till centrum och en annan som slutar innan den når fram dit. Labyrinten är skickligt tecknad, vilket knappast skulle ha varit möjligt om inte tecknaren hade använt en i förväg uträknad algoritm för konstruktionen av labyrinten. Den algoritmen måste i så fall ha varit helt annorlunda



Figur 12: MS 4515. Den babyloniska kvadratiska labyrinten.



Figur 13: MS 3971. En gammalbabylonisk matematisk problemtext.

än den välkända algoritmen för konstruktionen av en grekisk labyrint. De första stegen i den förmodade babyloniska algoritmen visas i Fig. 12, till höger.

8. Formler för rationella lösningar till "Pythagoras ekvation". Bland de matematiska kilskriftstexterna i Schøyensamlingen finns sex större "problemtexter" med mer eller mindre utförliga frågor, lösningsalgoritmer och svar. I Fig. 13 visas ett exempel på en gammalbabylonisk matematisk problemtext. En av överraskningarna i den texten är de fem uppgifterna i § 3, som alla är av samma typ. I § 3 e, till exempel, är utgångspunkten att ett *par reciproka sexagesimaltal* är givna, kallade igi = 1 12 och igi.bi = 50 (flytande värden). Det är lätt att kontrollera att i absoluta värden 1;12 × 0;50 = 1, dvs. att 1/1;12 = 0;50 och 1/0;50 = 1;12. Sedan beräknas först (igi + igi.bi)/2 = (1;12 + 0;50)/2 = 1;01. Därefter beräknas i tur och ordning kv. 1;01 = 1;02 01, kv. 1;01 − 1 = 0;02 01, och kvadratroten kvr. 0;02 01 = 0;11. I sista raden av uppgiften kallas 0;11 för "femte kortsidan". Likadant i § 3 d, till exempel, där igi = 1;20, igi.bi = 0;45, och alltså (igi + igi.bi)/2 = 1;02 30, kv. 1;02 30 = 1;05 06 15, kv. 1;02 30 − 1 = 0;05 06 15, och "fjärde kortsidan" = kvr. 0;05 06 15 = 0;17 30. I samtliga fall går övningarna tydligen ut på att konstruera sidor till rektanglar "normaliserade" så att diagonalen är 1 i varje enskilt fall. Idén är att alltid låta långsidan vara av formen (igi + igi.bi)/2 samtidigt som diagonalen = 1. Då blir kortsidan automatiskt av formen (igi − igi.bi)/2. Det är lätt att kontrollera till exempel att i § 3 e så är (1;12 − 0;50)/2 = 0;22/2 = 0;11.

Med andra ord visar de här övningsuppgifterna helt explicit att babyloniska matematiker kände till att godtyckligt många rektanglar kan bildas med *diagonal*, *långsida* och *kortsida* givna av formlerna (igi + igi.bi)/2, 1, (igi − igi.bi)/2, där igi, igi.bi är godtyckligt valda sexagesimalt reguljära tal med igi × igi.bi = 1.

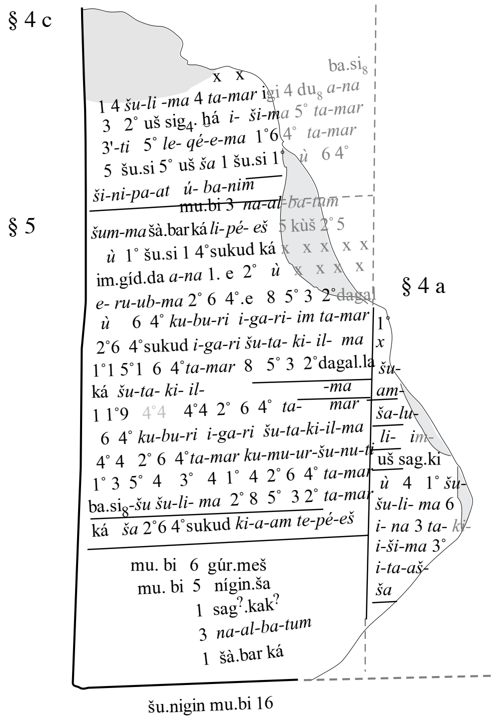
Det finns alltid heltal p och q sådana att igi = p/q och igi.bi = q/p. Därför är (igi + igi.bi)/2, 1, (igi − igi.bi)/2 = (kv. p + kv. q)/2$p \times q$, 1, (kv. p − kv. q)/2$p \times q$.

De här formlerna skiljer sig från de moderna formlerna för bildandet av rationella lösningar till "Pythagoras ekvation" bara genom det för babylonierna naturliga kravet att p och q måste vara sexagesimalt reguljära tal!

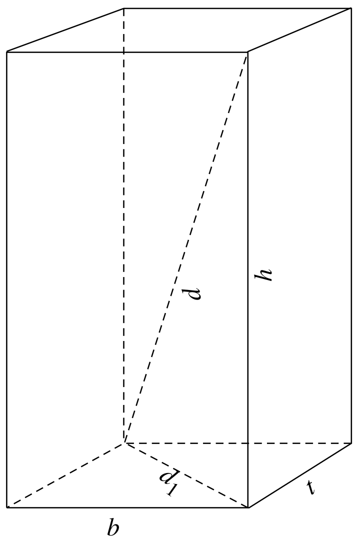
Det är intressant att konstatera att § 3 i den här nya texten faktiskt stöder den tolkning av den berömda tabelltexten Plimpton 322 som jag gav i *Historia Mathematica* redan 1981!

9. En tillämpning av "Pythagoras sats" i 3 dimensioner. I Fig. 14 visas baksidan av ett litet fragment av en matematisk samlingstext i Schøyensamlingen. Av en lycklig slump finns det med på fragmentet en översikt över hela samlingstextens innehåll. (Inga matematiska kilskriftstexter med liknande översikter har publicerats tidigare.) Enligt översikten skall texten ursprungligen ha innehållit 16 olika övningar, fördelade på 5 teman, enligt följande. § 1: 6 cirkelproblem (av vilka ett finns bevarat på framsidan av fragmentet), § 2: 5 problem för kvadrater, § 3: 1 problem för en triangel, § 4: 3 problem för 'tegelformar' (parallelltrapetser?), och § 5: 1 problem för en 'inre diagonal'.

Nästan hela texten till § 5 är bevarad på fragmentet. Här är det fråga om en helt oväntad överraskning i en ny matematisk kilskriftstext. § 5 handlar nämligen om en port i en stadsmur. Portens höjd h är 5 alnar och 10 fingrar = 0;26 40 stavlängder, bredden b är 0;08 53 20 stavar, och murens tjocklek t är 0;06 40



Figur 14: MS 3049, baksidan. Ett problem för en 'inre diagonal' och en översikt.



t = 3/27 stavar = 0;06 40 stavar

b = 4/27 stavar = 0;08 53 20 stavar

d_1 = 5/27 stavar (bottendiagonalen)

h = 12/27 stavar = 0;26 40 stavar

d = 13/27 stavar = 0;28 53 20 stavar

kv. t + kv. b = kv. d_1

kv. d_1 + kv. h = kv. d

$\Rightarrow$

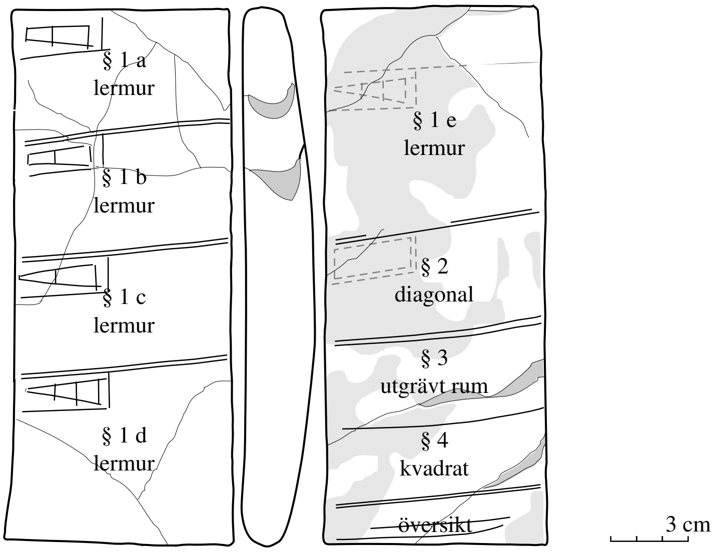
kv. t + kv. b + kv. h = kv. d

Figur 15: Konstruktionen av siffrorna i problemet för den 'inre diagonalen'.

stavar. Den 'inre diagonalen' d av porten beräknas med hjälp av en tredimensionell version av den babyloniska diagonalregeln (felaktigt kallad "Pythagoras' sats"): kv. d = kv. h + kv. b + kv. t = 0;11 51 06 40 + 0;01 19 00 44 26 40 + 0;00 44 26 40 = 0;13 54 34 14 26 40 kvadratstavar, d = kvr. 0;13 54 34 14 26 40 = 0;28 53 20 stavar.

Förklaringen till de komplicerade siffror som förekommer i det här problemet får man om man observerar att 0;26 40 = $^3/_{27}$, 0;08 53 20 = $^4/_{27}$, 0;26 40 = $^{12}/_{27}$, och 0;28 53 20 = $^{13}/_{27}$. Rensar man här bort den gemensamma faktorn $^1/_{27}$, så ser man att de givna måtten har konstruerats genom kombination av de två "diagonaltripplarna" $(3, 4, 5)$ och $(5, 12, 13)$. Idén är alltså följande (se Fig. 15): kv. 3+kv. 4 = kv. 5 och kv. 5 + kv. 12 = kv. 13 $\Longrightarrow$ kv. 3 + kv. 4 + kv. 12 = kv. 13.

10. Svåra geometriska problem förklädda till problem för lermurar. Texten som visas i Fig. 16 nedan är en matematisk problemtext i Schøyensamlingen med en välbevarad framsida men med en tämligen fördärvad baksida. Liksom MS 3049 i Fig. 14 slutar den här texten med en översikt över de olika paragraferna i samlingstexten. § 2 är ett igi-igi.bi problem av samma slag som de fem problemen i § 3 av MS 3971 (Fig. 13). § 1 innehåller fem problem illustrerade av teckningar av vad som ser ut som trianglar och parallelltrapetser. I själva verket handlar problemen i § 1 om lermurar med triangulär eller trapetsformad genomskärning. Några av problemen är komplicerade och leder till ekvationer med verkligen överraskande lösningsformler. Inga matematiska kilskriftstexter med liknande problem eller lösningsmetoder har publicerats tidigare.



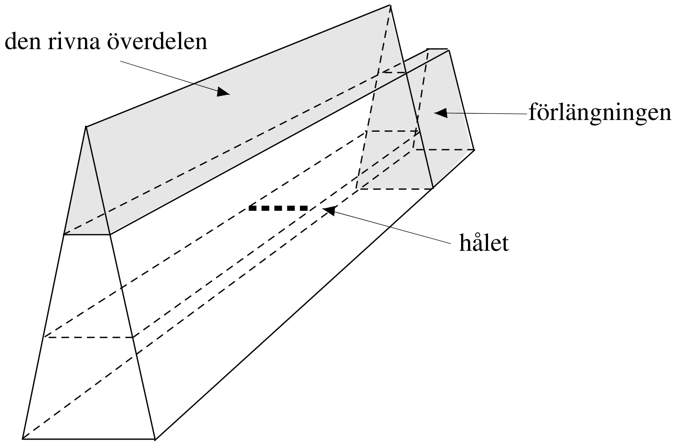
Figur 16: MS 3052. En matematisk problemtext med fyra teman och en översikt.

I § 1 a betraktas en lermur med trapetsformad genomskärning. Trapetsen har en given höjd, 6 alnar, en given bas, 3 alnar, och en given topp, $^1/_3$ aln. Murens längd är också given, 3 00 stavlängder. Nu vill man förlänga muren med 20 stavar. Materialet till utvidgningen får man genom att riva den översta delen av den ursprungliga muren. Frågan är hur mycket lägre den nya muren kommer att bli. Svaret är 1 1/2 aln lägre.

I § 1 b betraktas igen en lermur med trapetsformad genomskärning. Murens längd, höjd, och volym är givna. På en viss höjd över marken har ett hål som är borrat tvärs genom muren en viss längd. Frågan är hur bred muren är nedtill och upptill. I § 1 c är genomskärningen triangulär. Annars är det samma typ av problem som i § 1 b.

I § 1 d är problemet en kombination av problemen i § 1 c och § 1 a (Fig. 17). Troligen var problemet i den fördärvade § 1 e en kombination av problemen i § 1 b och § 1 a.

Det är klart att § 1 i den här texten är ett avsnitt ur en ursprungliga gammalbabylonisk "tematext" på hög nivå, systematiskt organiserad som den är och uppenbarligen författad av en ytterst kompetent matematiker.

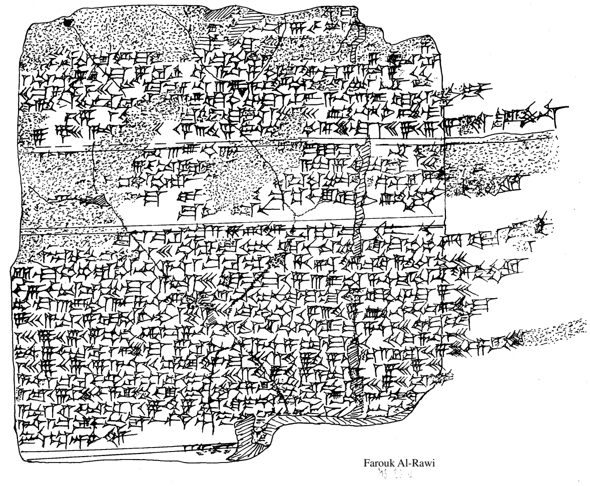


Figur 17: MS 3052 § 1 d. En lermur med en förlängning och ett hål.

11. Vikten av en ikosaeder tillverkad av fingertjocka kopparplåtar. Den intressantaste matematiska kilskriftstexten i Schøyensamlingen är den som visas i Fig. 18, i skala 1 : 1. Det är en liten lertavla med komprimerad skrift och många ovanliga termer. Den är troligen kassitisk, dvs. från tiden *efter* den gammalbabyloniska perioden i Mesopotamien (andra hälften av andra århundradet f.Kr.). Bara en enda matematisk problemtext från den tiden har publicerats tidigare.

Texten börjar med en beräkning av en siffra för antalet 'spelpjäsfält'. Om den här översättningen av den motsvarande sumeriska termen i texten är korrekt, så handlar det om figurer som på något sätt ser ut som spelpjäser. Antalet sådana figurer beräknas på följande kryptiska sätt: Man utgår från en given 'konstant' 6. Sedan subtraherar man 1 och multiplicerar med 4. Resultatet blir då $(6-1)\times 4 = 20$. Därefter beräknas ytan av ett spelpjäsfält med sidan 3 alnar. Ytan A beräknas så här. (För tydlighets skull har jag satt ut nollor och semikolon i sexagesimalbråken.)

3 alnar = 0;15 stavar, $1/2 \times 3$ alnar = 0;07 30 stavar, 3 alnar $\times\ 1/2 \times 3$ alnar = 0;01 52 30 kvadratstavar, $A = 3$ alnar $\times\ 1/2 \times 3$ alnar $-\ 1/8 \times 3$ alnar $\times\ 1/2 \times 3$ alnar = (0;01 52 30 − 0;00 14 03 45) kvadratstavar.



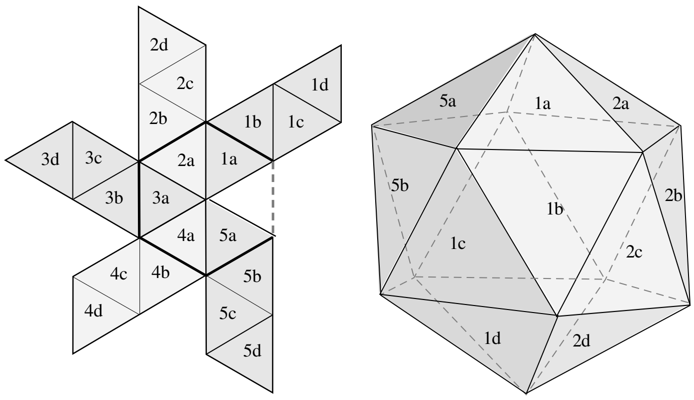
Figur 18: MS 3876. En matematisk text som handlar om 20 liksidiga trianglar.

Uträkningen visar att 'spelpjäsfält' är en sumerisk term med betydelsen 'liksidig triangel'. Ty om s är sidan av en liksidig triangel, så vet man att ytan av triangeln är lika med $s \times s/2 \times {}^1\!/_2\sqrt{3}$. Samma formel används i den kassitiska texten, men med ${}^1\!/_2\sqrt{3}$ ersatt av approximationen $1 - {}^1\!/_8 = {}^7\!/_8$. Det motsvarar att $\sqrt{3}$ har approximerats med bråket ${}^7\!/_4$ (= 1;45), vilket är en bra approximation eftersom kv. ${}^7\!/_4 = {}^{49}\!/_{16} = 3\,{}^1\!/_{16}$ (= 3;03 45).

I den avslutande delen av texten gäller det att beräkna vikten av den koppar som går åt för att konstruera en 'hornfigur' sammansatt av 20 liksidiga trianglar. Man börjar med att räkna ut den sammanlagda ytan av de 20 'spelpjäsfigurerna' med sidan 3 alnar. Resultatet är $20A = 20 \times$ 0;01 38 26 15 kvadratstavar = 0;32 48 45 kvadratstavar. Sedan beräknas volymen V av den koppar som går åt för de 20 spelpjäsfigurerna. Tydligen är tjockleken av varje sådan figur 1 finger = ${}^1\!/_{30}$ aln = 0;02 aln. För att förstå uträkningen måste man veta att i gammalbabyloniska texter är volymenheten lika med en kvadratstav gånger 1 aln = 1kv.st. $\times$ aln. Då ser man att $V = 1$ finger $\times$ $20A$ = 0;02 aln $\times$ 0;32 48 45 kv.st. = 0;01 05 37 30 kv.st. $\times$ aln. Det sista steget i beräkningen är en multiplikation med 1 12, som kallas 'konstanten för koppar'. Vad det betyder inser man lätt. Utgångspunkten är att med 1 talent = 1 00 mina = 1 00 00 shekler (ungefär 30 kg), så är (enligt gammalbabylonisk uppfattning) 1 talent = vikten av en kvadratisk kopparplåt med sidan 1 aln och tjockleken 1 finger. Alternativt är 1 12 00 talenter per volymenhet (kv.st. $\times$ aln) = vikten av koppar per volymenhet. Att det här stämmer följer av att 1 volymenhet = 1 kv.st. $\times$ aln = $12 \times 12 \times 30$ kv.aln $\times$ finger = 1 12 00 kv.aln $\times$ finger. Därmed är det klart att vikten K av de 20 triangulära kopparplåtarna är precis K = (1 12 00 tal./kv.st. $\times$ aln) $\times$ 1 finger $\times$ $20A$ = 1 12 00 $\times$ 0;01 05 37 30 talenter = 1 18;45 talenter.

Därmed är uträkningarna i den kassitiska texten förklarade. Det återstår bara att lista ut vad det hela handlar om. Vad finns det för ‘hornfigur’ som kan konstrueras av 20 fingertjocka kopparplåtar i form av liksidiga trianglar med sidan 3 alnar?

Det överraskande svaret är att hornfiguren troligen är en reguljär polyeder, närmare bestämt vad som med en grekisk term kallas en *ikosaeder*. Förklaringen till konstruktionen i texten av talet 20 som produkten $(6-1)\times 4$ är då att en ikosaeder kan vikas ihop med utgångspunkt från $(6-1)\times 4$ liksidiga trianglar hopsatta som i Fig. 19, till vänster. Första steget i konstruktionen är att avlägsna en liksidig triangel från en reguljär sexhörning.



Figur 19: Hur $(6-1)\times 4 = 20$ liksidiga trianglar kan vikas ihop till en ikosaeder.

12. Den babyloniska matematiken bjuder på många överraskningar. De sex babyloniska problemtexterna i Schøyensamlingen bekräftar till övermått den empiriska regeln att *nya babyloniska matematiska problemtexter alltid innehåller överraskningar*. Vad det betyder är att man troligen fortfarande vet mycket litet om den verkliga omfattningen av den babyloniska matematiken. Det i sin tur hänger förmodligen ihop med att ytterst få av de kända matematiska kilskriftstexterna är välorganiserade *originaltexter* författade av någon av de ovanligt begåvade anonyma matematiker som måste ha lagt grunden till den babyloniska matematiken. Vi känner huvudsakligen till bara en mängd utdrag ur tabelltexter och diverse enkla övningsuppgifter, skrivna av skolelever på en relativt elementär nivå, ibland fulla av felaktigheter. Ett fåtal mer avancerade övningstexter kan vara äldre elevers avskrifter direkt från originaltexterna. Sedan finns det också vad man kan kalla “samlingstexter”, som är större lertavlor på vilka intresserade lärare mer eller mindre systematiskt har samlat ihop och kopierat sådana avskrifter av delar av originaltexterna. Vad vi har är därför bara glimtar av hur den babyloniska matematiken på allra högsta nivå egentligen kan ha sett ut.