Oppgaver

Oppgavene 452–455 er hentet fra gamle matematikkolympiader, både internasjonale og i USA.

451. Angi alle par (a, b) av hele tall med $0 < a < b$ som er slik at en trekant med sidelengder a, b og 49 har to hjørnevinkler i forholdet 1 : 2. (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

452. La $P(x)$ være et polynom av grad n som er slik at $P(k) = k/(k+1)$ for $k = 0$, 1, 2, …, n. Bestem $P(n + 1)$.

453. Gitt en vinkel på $180°/n$, der n er et naturlig tall som ikke er delelig med 3. Vis at denne vinkelen kan tredeles på «euklidsk» vis, altså ved hjelp av bare passer og linjal.

454. For et gitt reelt tall x_1 konstruerer vi følgen x_1, x_2, x_3, … ved å sette

$$x_{n+1} = x_n\Big(x_n + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Vis at det eksisterer nøyaktig en verdi av x_1 som er slik at $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ for alle $n \geq 1$.

455. (a) Vis at

$$[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [x + 3y]$$

for alle ikke-negative reelle tall x og y. (For et reelt tall t betegner $[t]$ heltallsverdien av t, det vil si det største hele tallet k som er slik at $k \leq t$.)

(b) Vis at

$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!\,n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

er et helt tall for alle naturlige tall m og n.

Løsninger

440. Et rektangel $HOMF$ har sider $HO = 11$ og $OM = 5$. En trekant ABC har H som skjæringspunktet for høydene, O som sentret for den omskrevne sirkelen, M som midtpunktet på siden BC, og F som fotpunktet for høyden fra A. Hvor lang er siden BC? (Oppgave A–1 i Putnam-konkurransen 1997.)

Løsning: (Etter *Hans Georg Killingbergtrø*, Leksvik, NO.) Vi plasserer rektanglet $HOMF$ i et kartesisk koordinatsystem med $H(0, -5)$, $O(11, -5)$, $M(11, 0)$ og $F(0, 0)$. Det følger av oppgaven at BC går gjennom både M og F, og at AF går gjennom H og står normalt på MF, altså at B og C ligger på x-aksen og A på y-aksen. Det er klart at A ligger på den *negative* y-aksen. Videre vet vi at $BH \perp AC$, og C må derfor ligge på den negative x-aksen, i et punkt $(-p, 0)$. Den omskrevne sirkelen skjærer da den positive y-aksen i et punkt $(0, q)$, den positive x-aksen i $B(22 + p, 0)$ og den negative y-aksen i $A(0, -10 - q)$. Dermed vil $BH \perp AC$ gi

$$\frac{5}{22+p} = \frac{p}{10+q} \implies p^2 + 22p = 5q + 50.$$

Og de to radiene $|OC| = |OA|$ viser at

$$5^2 + (11+p)^2 = 11^2 + (5+q)^2 \implies p^2 + 22p = q^2 + 10q.$$

Dette viser at $q^2 + 10q = 5q + 50$, som gir de søkte positive verdiene $q = 5$, $p = 3$ og $|BC| = 28$.

Også løst av: Lars Arnér, Norrköping, SE; Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Erik Hansen, Kalundborg, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Jørn Schmidt, Horsens, DK; Ivar Skau, Bø i Telemark, NO; Thomas Strai, Tvedestrand, NO; Jakob I. Try, Søgne, NO;

441. For hvilke fyrstikktrekanter får vi arealet ved å telle fyrstikkene? Med andre ord: Bestem alle tripler (a, b, c) av hele lengdetall for sidene i en trekant med arealtall $a + b + c$. (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

Løsning: Kall trekanten ABC som vanlig, la a, b og c være lengdene av de motstående sidene til A, B og C, og sett $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Den innskrevne sirkelen tangerer hver av sidene. La x være lengden av linjestykkene fra C til tangeringspunktene på sidene a og b, og la y og z være de tilsvarende lengdene av tangentene fra henholdsvis B og A. Da har vi $x + y = a$, $y + z = c$ og $x + z = b$, som lett gir $x = s - c$, $y = s - b$ og $z = s - a$. Vi kan anta $a \leq b \leq c$, og får dermed $x \leq y \leq z$. Ved Herons formel får vi $2s = a + b + c = \text{areal}(\triangle ABC) = \sqrt{sxyz}$, som gir

$$4s = xyz. \tag{1}$$

Nå er $x \equiv y \equiv z \equiv s \pmod 1$, og s er kongruent med 0 eller 1/2 modulo 1. Men den siste muligheten utelukkes av ligningen (1). Setter vi nå $s = x + y + z$ inn (1), får vi $4x + 4y + 4z = xyz$, som gir $z = 4(x + y)/(xy - 4)$. Med $x = 1$ kan y bare være 5, 6 eller 8, med z lik 24, 14 eller 9. Velger vi $x = 2$, kan y bare være 3 eller 4, med z lik 10 eller 6. For $x \geq 3$ får vi ingen muligheter for y og z med $x \leq y \leq z$. Så de eneste mulighetene for $(a, b, c) = (x + y, x + z, y + z)$ er disse fem:

$$(6, 25, 29), \quad (7, 15, 20), \quad (9, 10, 17), \quad (5, 12, 13), \quad (6, 8, 10).$$

Hver av dem er enten en pytagoreisk trekant eller differansen mellom to slike.

Løst av: Con Amore Problemgruppe, København, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Tor Skjelbred, Oslo, NO; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 31. mai 2005. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.