

Pappus – en proportionernas jonglör

Bengt Ulin

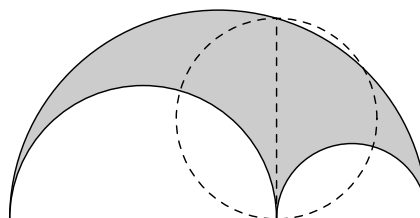
Tackjärnsvägen 12
SE-168 68 Bromma
bengt.uln@swipnet.se

Vem var Pappus?

Tack vare några lysande matematiker i Alexandria fick den hellenska matematiken en sista blomstringsperiod på 300-talet (e Kr) innan den klingade ut under 400-talet. En av dem var *Pappus* (ca 290–350). Två saker är helt säkra rörande honom: den ena är, enligt egen kommentar till *Ptolemeus* stora astronomiska verk *Almagest*, att han år 320 iakttog en solförmörkelse; den andra, av vida större betydelse, är att han dokumenterade sina föregångares och sin egen matematik i åtta böcker. Inte förrän 1200 år senare (1588) publicerades en översättning på latin. Med hjälp av en fransk översättning [2] har jag plogat mig igenom de tjugo första kapitlen av bok nr 4, fascinerad av de resultat som Pappus nådde rörande den dåtida skomakarkniven, kallad $\alpha\rho\beta\eta\lambda\omicron\varsigma$ (arbelos).

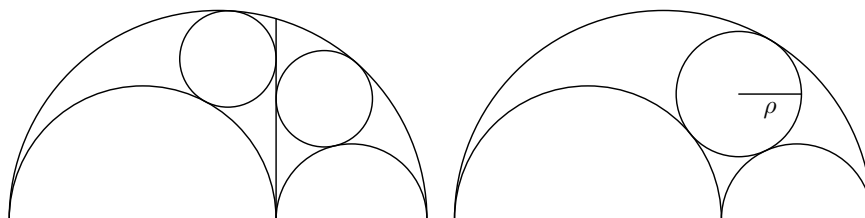
Det började med Arkimedes

När Pappus tog sig an studiet av skomakarkniven hade han tillgång till mycket av den matematik som greker utvecklat under den hellenska kulturperioden. *Arkimedes* hade drygt 500 år före Pappus formulerat och löst några problem rörande skomakarkniven, vars kontur begränsas av tre halvcirklar (figur 1a–c). Arkimedes fann



Figur 1a

- (a) att arealosarean = arean hos en cirkel, vars diameter är lika med längden av den normal som tangerar de två mindre halvcirkorna (figur 1a)
- (b) att de två cirkelarna på ömse sidor om normalen i figur 1b är lika stora
- (c) en formel för radien i den cirkel som är inskriven i figur 1c



Figur 1b

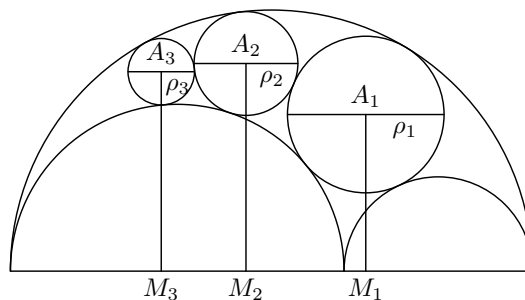
Figur 1c

Att bevisa (a) skulle kunna vara en uppgift på gymnasietadiet. De två övriga resultaten är betydligt svårare att nå. Arkimedes härledning av (c) finns återgiven i [4].

Pappus fann en vacker fortsättning

I dubbel mening byggde Pappus vidare på Arkimedes tredje resultat: i konkret avseende fortsatte han att inskriva allt mindre tangerande cirklar i kniven (figur 2), i abstrakt mening härledde han diametern i dessa cirklar. Den formel han fann är osannolikt vacker. Med $\{A_n\}$ som centra i en följd av allt mindre cirklar $\{c_n\}$ och M_n som fotpunkt för normalen från A_n mot knivens vågräta baslinje gäller följande formel för normalens längd:

$$(1) \quad A_n M_n = n \times \text{diametern i cirkel } c_n \quad (n \geq 1)$$



Figur 2

Hur nådde Pappus fram till detta resultat ...

... som gav radien för hela den oändliga följderna av cirklar? Den som översatte Pappus till franska, *Paul Ver Eecke*, nämner i en av de talrika och klagörande fotnoterna i [2] att den franske matematikern *E. Catalan* 1858 publicerade en modern och elegant härledning av (1) i en uppsats [1]. Catalan utnyttjade metoden att spegla skomakarkniven i en lämpligt vald cirkel. Som i ett trollslag kommer man då direkt till formel (1). (Härledningen finns refererad i t ex [4].) Uppenbarligen var Pappus inte förtrogen med inversion (spegling) i cirkel; han nådde sitt mål efter att ha tagit sig fram till tre hjälpsatser som språngbräda. Det krävs ett studium av drygt 12 sidor i översättningen (inkluderande figurvarianter av Pappus samt översättarens instruktiva fotnoter) innan man någorlunda kan överblicka hur Pappus gick till väga. Av utrymmesskäl måste vi här begränsa oss till att främst se på de verktyg som Pappus begagnade och nöja oss med exempel på hur han jonglerade med proportioner. Vi ska se att han gång på gång utnyttjade likformighet hos trianglar.

Verktyg i Pappus utrustning

1. Hantering av analogier

Likheter av typ $a/b = c/d$, s k analogier, har en mycket stor betydelse, särskilt i likformighetsläran, eftersom de svarar mot proportionaliteter av denna typ.

Efter addition av 1 på båda sidor övergår analogin ovan i en ny analogi,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Om man däremot subtraherar med 1 på båda sidor får man

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

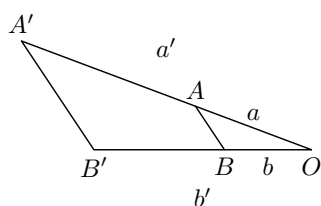
Genom att ledvis dividera de två erhållna likheterna med varandra kommer vi till analogin

$$(A) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

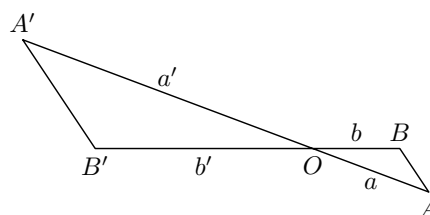
2. Likställda och omvänt likställda figurer

Figur 3a visar ett exempel på likställighet: två trianglar OAB och $OA'B'$ är likställda med avseende på hörnet O . (Likställighetscentrum O sammanfaller här med ett triangelhorn.) De två trianglarna har parallella sidor AB och $A'B'$ samt parvis lika stora vinklar. Triangeln OAB är en förminskning av triangeln $OA'B'$ i skalan $OA : OA'$; omvänt kan vi se denna triangel som en förstoring av triangeln OAB i skalan $OA' : OA$.

De två trianglarna är likformiga: $OAB \propto OA'B'$, varvid t ex analogierna $a/a' = b/b'$ och $a/b = a'/b'$ gäller. I figur 3b är trianglarna omvänt likställda; de ligger på



Figur 3a



Figur 3b

motsatta sidor om O . Man kan se den omvända likställigheten som sammansatt av en (direkt) likställighet, kombinerad med en vridning 180° av den ena figuren kring centrum O .

3. Thales sats

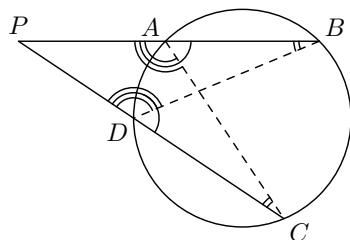
Greken *Thales* (6:e årh f Kr) kan ha varit den förste som dokumenterade ett bevis i matematiken, nämligen beviset av den kända satsen att randvinkeln i en halvcirkel är rät.

4. Sekantsatsen

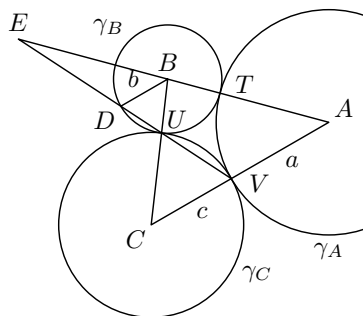
Sekantsatsen och den närbesläktade kordasatsen utgör tillämpningar på likformiga trianglar. Med hjälp av satsen att randvinklar mot lika stora bågar i en cirkel är lika stora (se figur 4) bevisar man likheten

$$PA \times PB = PC \times PD$$

för två godtyckligt dragna linjer PB och PC (sekanter) som skär cirkeln.



Figur 4



Figur 5

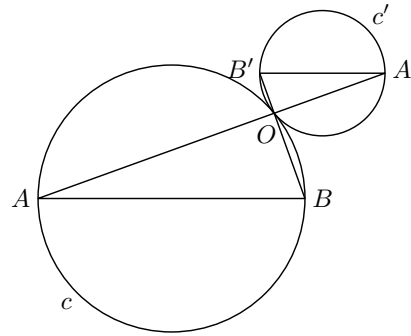
5. En hjälpsats av Pappus

Tre cirklar med centra A , B och C tangerar varandra två och två i T , U och V enligt figur 5. A -cirkeln (γ_A) är störst (radie a). E är en punkt på förlängningen av centrumlinjen AB . Vi definierar D som skärningspunkt mellan γ_B och linjen VU .

Det är inte svårt att bevisa, att om och endast om en punkt E har ett sådant läge att likheten $EA/EB = a/b$ uppfylls, så ligger punkten E i linje med D , U och V . Pappus utvidgar denna hjälpsats med korollariet $EU \times EV = (ET)^2$.

6. En hjälpsats av Arkimedes

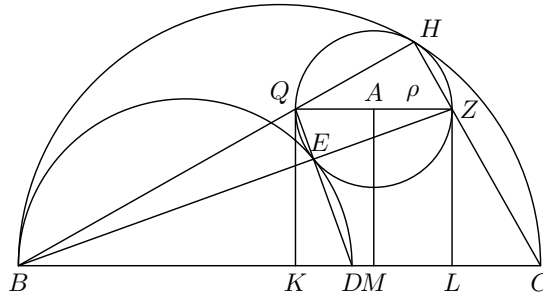
I figur 6 är cirkeln c likställt avbildad på den mindre cirkeln c' varvid O utgör gemensam tangeringspunkt till cirkelarna. Därvid övergår diametern AB i en med AB parallell diameter $A'B'$. De tre punkterna A , O och A' ligger i rät linje, likaså B , O och B' . Samma förhållanden erhålls om den ena cirkeln ligger inne i den andra.



Figur 6: Parallella diametrar AB och $A'B'$.

Arkimedes hjälpsats är omvändningen: om två diametrar AB och CD är parallella för två cirklar med en tangeringspunkt O , så ligger diametrarnas ändpunkter parvis i linje med O .

Hur Pappus utnyttjade verktygen 1.–6.



Figur 7: Tangering i B , E och H . Diametern QZ är parallell med BC . AM , QZ och ZL är normaler. $BC = 2R$, $BD = 2r$.

1° I anslutning till figur 7, där två halvcirklar tangerar varandra i B och dessutom i punkterna E och H tangerar en cirkel med centrum A , härleder Pappus formeln

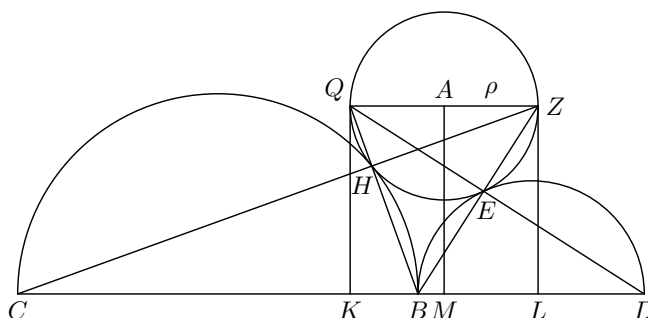
$$(2) \quad \frac{BM}{\rho} = \frac{BC + BD}{CD} \left(= \frac{R + r}{R - r} \right)$$

där R och r är radier i den större respektive den mindre halvcirkeln. Vi noterar först att figuren har räta Thales-vinklar vid E och H . Diametern QZ är parallell med BC . Därför gäller enligt Arkimedes hjälpsats (6. ovan) att E ligger dels på linjen BZ , dels på linjen DQ samt att Q ligger på linjen BH och Z på linjen CH .

Ur likformigheterna $BHC \propto BQK$ och $BED \propto BZL$ kommer Pappus med hjälp av sekantlikheten $BH \times BQ = BZ \times BE$ till analogin

$$(3) \quad \frac{BL}{BK} = \frac{BC}{BD}$$

som med hjälp av analogibildningen (A) och likheten $BL + BK = 2BM$ omformas till (2). Därmed är (2) bevisad.



Figur 8: Tangering i B , E och H . Diametern QZ är parallell med CD . AM , QK och ZL är normaler. $BC = 2r_1$, $BD = 2r_2$.

2° På analogt sätt som i 1° härleder Pappus analogin (3) även för figur 8 (som kompletterar figur 7 och anknyter till arbelosfiguren) och kommer med sin analogiteknik denna gång till likheten

$$(4) \quad \frac{BM}{\rho} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$$

varvid r_1 och r_2 är radier i den större respektive den mindre halvcirkeln.

3° Ur likformigheterna $BCH \propto BKQ$ och $BCH \propto ZLC$ härleder Pappus vidare sambandet

$$(5) \quad BK \times CL = (AM)^2.$$

4° Med hjälp av de vunna resultaten (2)–(4) arbetar sig Pappus i 10 steg (innefattande verktygen i avsnitt 1.-6.) till den likhet som blir det avgörande sprängbrädet för arbelosatsen: Pappus bevisar sambandet

$$(6) \quad \frac{PN}{2\rho'} = \frac{AM + 2\rho}{2\rho}$$

i anslutning till figur 9. (Figuren är späckad med geometriska relationer!) Etappmål är bl a bevis av att $BZ = ZQ$ och att $SK (= SA) = \rho$.

Nog är det fascinerande att se hur långt Pappus kunde komma med likformighet, analogier och några andra verktyg, efter en mödosam och knepig bergsbestigning som ledde till en sällsynt vacker geometrisk upptäckt. Ur arbelosfigureernas rikedom kan man hämta åtskilliga uppgifter av varierande svårighetsgrad för undervisningen i geometri.

Referenser

- 1 E Catalan, *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, 3 edition, Paris 1858.
- 2 P Ver Eecke, *Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique*, Livre IV, Desclée, De Brouwer, Paris 1933.
- 3 C S Ogilvy, *Excursions in Geometry*, Dover 1991.
- 4 B Ulin, *Problemlösning i symbios med matematikhistoria*, Ekelunds 2002.
- 5 B L van der Waerden, *Science Awakening*, Noordhoff 1954.