Å telle opp i tallteorien

Marius Overholt

Institutt for matematikk og statistikk
Universitetet i Tromsø
NO–9037 Tromsø
marius@math.uit.no

Denne artikkelen er tilegnet tohundreårs-jubileet for Lejeune Dirichlet's fødsel. Han ble født 13. februar 1805 i Düren i Rhinlandet. Dirichlet arbeidet innen analyse og tallteori. Han var en pioner for stringent matematisk analyse, og for analytiske metoder i tallteorien. Helmuth Koch ga i [6, s. 33–40] denne karakteriseringen av Dirichlet som problemløser:

> His proofs characteristically started with surprisingly simple observations, followed by extremely sharp analysis of the remaining problem.

Lenge arbeidet tallteorikere mest med å finne konkrete løsninger til konkrete problemer, og med å utvikle løsningsmetoder. For eksempel utviklet Fermat en metode for å faktorisere heltall. Anvendt på heltallet 207 blir metoden slik: $15^2 - 207 = 18$, $16^2 - 207 = 49$. En regner altså suksessivt ut differensene mellom kvadratttallene som er større enn det heltallet som skal faktoriseres, og heltallet selv, og stopper når differensen er et kvadrattall. Den siste utregningen fremstiller 207 som differens av kvadrattall, og dermed som et produkt av heltall: $207 = 16^2 - 49 = 16^2 - 7^2 = (16-7)(16+7) = 9 \cdot 23$. Fermat's metode er meget fordelaktig for å faktorisere heltall som er produkt av to nesten like store faktorer.

Dirichlet undersøkte spørsmålet om hvor mange faktoriseringer et heltall kan ha. Mer presist ønsket han å telle heltallsdivisorer. Hver divisor frambringer en faktorisering i to faktorer. Teller vi antall divisorer, inklusive tallet selv og 1, til heltallene $1, 2, \ldots, 10$ får vi følgen $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4$. Dette er en temmelig uregelmessig følge. Men Dirichlet innså at middeltallet av antall divisorer oppfører seg på en mye mer regelmessig måte. Han viste i arbeidet [3] fra 1849 at gjennomsnittet av antall divisorer til heltallene fra 1 til n er omtrent $\log(n) + 2\gamma - 1$. Her er $\gamma = 0.5772\ldots$ en konstant, kjent som Eulers konstant.

For eksempel er gjennomsnittet av antall divisorer til heltallene fra 1 til 10 lik

$$\frac{1+2+2+3+2+4+2+4+3+4}{10} = 2.70,$$

og $\log(10)+2\gamma-1 = 2.46$ korrekt avrundet. Den absolutte feilen i denne tilnærmingen er $2.70 - 2.46 = 0.24$, og dette er svært godt i betraktning av divisorantallets uregelmessige oppførsel. Dirichlet påviste med et elementært men skarpsindig resonnement at den absolutte feilen i tilnærmingen går mot null minst like så raskt som $n^{-1/2}$ når $n \to \infty$.

Dirichlet begynte sine undersøkelser omkring divisorproblemet i to arbeider [1] og [2] fra 1838. Etter sin artikkel fra 1849 publiserte Dirichlet ikke mer om problemet. Men sommeren 1858 besøkte han Leopold Kronecker i Ilsenburg i Harz-fjellene, hvor sistnevnte tilbrakte sin ferie. Fra et brev [4, s. 406–408] av 23. juli 1858 som Dirichlet skrev til Kronecker i etterkant av besøket går det fram at de to hadde diskutert divisorproblemet, og Dirichlet meddelte Kronecker at han hadde lyktes i å forbedre sitt resultat fra 1849. Men 5. mai 1859 døde Dirichlet i Göttingen, og arbeidet hans gikk tapt for ettertiden.

Neste steg tok den russiske matematikeren Georgi Voronoi i 1903. I arbeidet [7] lyktes han i å bevise at den absolutte feilen i Dirichlet's tilnærming går mot null minst like raskt som $n^{-2/3}\log(n)$ når $n \to \infty$. Merk at eksponenten i potensen av n er avgjørende forbedret, siden $\log(n)$ vokser langsommere enn n^{ε} for enhver $\varepsilon > 0$. Problemet å fastslå den beste eksponenten har blitt kjent som *Dirichlet's divisorproblem*, og er fremdeles uløst.

Dirichlet's arbeider omkring divisorproblemet og beslektede problemer startet et meget betydningsfullt tema innen tallteorien – å asymptotisk telle opp antall løsninger til tallteoretiske problemer.

I stedet for Dirichlet's setning skal vi med et meget enkelt resonnement bevise et svakere resultat. Notasjonen $d(m)$ er standard for antallet divisorer til et positivt heltall m.

Sats. *Gjennomsnittet*

$$\frac{d(1)+d(2)+\cdots+d(n)}{n}$$

av antall divisorer $d(m)$ til heltallene m i intervallet $1 \le m \le n$ er tilnærmet lik $\log(n)$ med en absolutt feil som ikke overstiger 2.

Bevis: Hvert heltall fra 1 til n har divisoren 1. Annethvert heltall fra 1 til n har divisoren 2, og av disse heltallene forekommer altså $n/2$ eller $(n-1)/2$. På samme måte er k divisor i omtrent n/k heltall mellom 1 og n. Feilen i tilnærmingen n/k er høyst 1. Det sammenlagte antallet divisorer til alle heltallene mellom 1 og n er derfor omtrent lik $n/1 + n/2 + \cdots + n/n$ med en absolutt feil som ikke er større enn n. Men det sammenlagte antallet divisorer til alle heltallene mellom 1 og n er lik summen av antallet divisorer for hvert heltall mellom 1 og n, så

$$\left|\big(d(1)+d(2)+\cdots+d(n)\big) - \left(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\cdots+\frac{n}{n}\right)\right| \le n.$$

Dermed er gjennomsnittet av antall divisorer til heltallene mellom 1 og n lik $1+{}^1\!/_2+{}^1\!/_3+\cdots+{}^1\!/_n$ med en absolutt feil som ikke er større enn 1. Merk at middelverdien til den uregelmessige følgen av divisorantall allerede nå er temmet. Summene $1+{}^1\!/_2+\cdots+{}^1\!/_n$ oppfører seg meget regelmessig. Ved hjelp av arealsammenlikning i integralregningen påvises lett at $1+{}^1\!/_2+\cdots+{}^1\!/_n$ er tilnærmet lik $\log(n)$ med en absolutt feil som ikke overstiger 1. Vi trekker så konklusjonen at gjennomsnittet av antall divisorer til heltallene mellom 1 og n er tilnærmet lik $\log(n)$ med en absolutt feil som ikke overstiger 2.

Ovenstående bevismetode stammer også fra Dirichlets arbeide i 1849, men inkorporerer ikke den avgjørende ideen som gir en meget god skranke for feilen.

Divisorproblemet har en lang og interessant historie, men det blir for vidløftig å gå inn på den her. Den beste eksponenten som er kjent er $-285/416$, som nylig ble funnet av M. N. Huxley, se [5]. Det er gode grunner til å tro at den beste eksponenten skal være $-3/4$.

Bibliografi

1. G. Lejeune Dirichlet, *Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie*, Bericht über die verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1838, 13–15.
2. G. Lejeune Dirichlet, Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **18**, 259–274 (1838).
3. G. Lejeune Dirichlet, *Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie*, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1849, 69–83.
4. G. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Zweiter Band, Berlin 1897.
5. M. N. Huxley, Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function, *Number theory for the millennium*, II (Urbana, IL, 2000), 275–290. A K Peters, Natick, MA, 2002.
6. H. Koch, *Gustav Peter Lejeune Dirichlet*, Mathematics in Berlin, Berlin 1998.
7. G. Voronoi, Sur une problème du calcul des fonctions asymptotiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **126**, 241–282 (1903).