 Normat **53**:1, 34–38 (2005)

Konstruksjon av den regulære 17-kanten

Oddvar Iden

Matematisk institutt
Johannes Brunsgate 12
NO–5008 Bergen
iden@mi.uib.no

Går man ut fra at «geometrien» kan identifiseres med et plant koordinatsystem, byr geometrien på mange anvendelser av Galoisteorien. En av dem er konstruksjon av den regulære 17-kanten. Da universalgeniet Karl Friedrich Gauss løste dette problemet (1795), fikk det ham til å velge matematikk istedet for klassiske studier, noe som har hatt enorm betydning for matematikken. Gauss ikke bare konstruerte 17-kanten, men han knyttet konstruksjonen av regulære polygoner til eksistensen av primtall som også er Fermattall (se [6]), det vil si av formen $2^{2^n}+1$, der n er et naturlig tall. I [8] finnes en detaljert fremstilling av dette temaet.

Algebraikere flest vil øyensynlig helst ikke ut av algebraen når de først har festet grepet; geometri er noe man ikke vil ta i. De finner derfor fire likninger av 2. grad som ved suksessiv løsning fører til et irrasjonalt uttrykk og *så er det bare å konstruere dette uttrykket* heter det gjerne [5, 9]. De fire likningene utledes også i [8]. De beviser at 17-kanten kan konstrueres, men forklaring på hvordan likningene forholder seg til den angitte konstruksjon (av Richmond) må man finne et annet sted, for eksempel i [9], *by using greater ingenuity.* Forklaring mangler også på nettstedet `http://mathworld.wolfram.com/Heptadecagon.html` som ellers inneholder mange referanser til emnet.

De fire likningene har alle konstruerbare løsninger. De guider oss derfor på naturlig måte til en av konstruksjonene, *without using greater ingenuity.* Gauss utleder de fire likningene i [2], Art. 354 og løser dem med 10 desimaler. I [3], bind 2 side 187, berømmer han en Erchinger (Herr Erchinger zu Thuningen im Königreich Würtemberg) for å ha omsatt hans likninger til geometriske konstruksjoner som, i motsetning til andres, er utført «mer i den rene geometris ånd». Gauss' fremstilling av saken er imidlertid idag så uvanlig at det faktisk er lettere å gjenoppdage Erchingers «rene geometri» enn å gå via Gauss. Hvorfor ikke bli med på det?

Likningene er alle av formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad abc \neq 0 \tag{1}$$

og kan omformes til

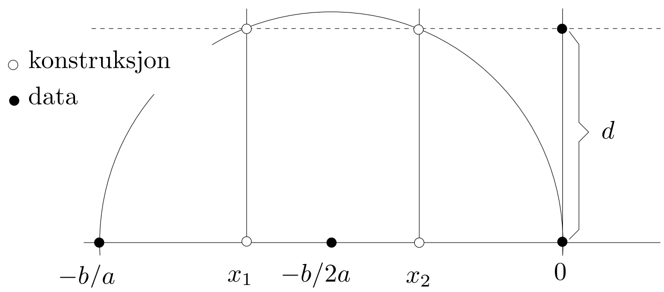
$$\varepsilon x\Big(x + \frac{b}{a}\Big) = \Big|\frac{c}{a}\Big| = d^2, \qquad \text{der } \varepsilon = \pm 1.$$

Hvis $\varepsilon = +1$, vil sirkelen med sentrum i $(-b/2a, 0)$ som går gjennom $(0, d)$ skjære x-aksen i $(x_1, 0)$ og $(x_2, 0)$, der x_1, x_2 er løsninger av likning 1, uansett fortegnet til b/a. Se figurene 2 og 3. Vi markerer bare én koordinat.

Hvis $\varepsilon = -1$, er likning 1 derimot ekvivalent med

$$\frac{-x}{d} = \frac{d}{x + b/a},$$

se figur 1.



Figur 1: Geometrisk løsning av $-x(x + b/a) = d^2$.

Betingelsen for geometrisk løsning er da selvfølgelig at $d < |b/2a|$, som medfører at $b^2 - 4ac > 0$.

Som nevnt utledes de fire likningene i [8]. I Galois-kontekst: la ξ være en primitiv 17. rot av 1 og la $\mathbb{Q}$ være de rasjonale tall. Siden ξ er rot i et geometrisk polynom

$$x^{16} + x^{15} + \cdots + x^2 + x + 1 \tag{2}$$

av grad 16 som er irredusibelt over $\mathbb{Q}$, er Galoisgruppen til $\mathbb{Q}(\xi)$ over $\mathbb{Q}$ (gruppen av de automorfismer for $\mathbb{Q}(\xi)$ som utvider identitetsavbildningen på $\mathbb{Q}$) av orden 16, og den er syklisk. Automorfismen τ gitt ved at

$$\tau|_{\mathbb{Q}} = 1|_{\mathbb{Q}} \text{ (nødvendigvis)}, \quad \xi \mapsto \xi^3$$

genererer den. Og redusert til absolutt minste eksponenter får vi

$$\xi \mapsto \xi^3 \mapsto \xi^{-8} \mapsto \xi^{-7} \mapsto \xi^{-4} \mapsto \xi^5 \mapsto \xi^{-2} \mapsto \xi^{-6} \mapsto \cdots, \tag{3}$$

hvor eksponentene deretter repeteres med motsatt fortegn.

Galoisteorien etablerer under visse betingelser (som er oppfylt her) en entydig inklusjonsreverserende korrespondanse mellom undergrupper H av Galoisgruppen til en kropp F over en underkropp K og underkropper F_H av F (bestående av de elementer som fikseres av hver automorfisme i H), slik at H *også* er Galoisgruppen til F over F_H. Dermed kan innbyrdes struktur for de kroppene som inneholder K og er inneholdt i F leses av som et speilbilde av undergruppesystemet til Galoisgruppen.

Når denne gruppen er syklisk av orden 16, får vi ett gruppetårn

$$\langle 1_{\mathbb{Q}(\xi)} \rangle \;\rightarrow\; \langle \tau^8 \rangle \;\rightarrow\; \langle \tau^4 \rangle \;\rightarrow\; \langle \tau^2 \rangle \;\rightarrow\; \langle \tau \rangle$$

med det korresponderende tårn av fikskropper:

$$\mathbb{Q}(\xi) \;\leftarrow\; K_8 \;\leftarrow\; K_4 \;\leftarrow\; K_2 \;\leftarrow\; \mathbb{Q}.$$

Banen til ξ under τ (se formel 3) deler seg i to baner under τ^2, én som inneholder ξ;

$$\{\xi^{\pm 1}, \xi^{\pm 2}, \xi^{\pm 4}, \xi^{\pm 8}\}$$

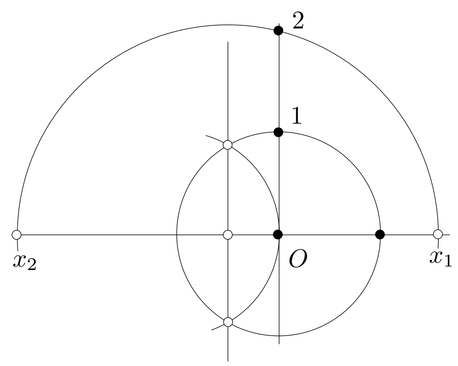
med sum $=: x_1$ og én som inneholder ξ^3;

$$\{\xi^{\pm 3}, \xi^{\pm 5}, \xi^{\pm 6}, \xi^{\pm 7}\}$$

med sum $=: x_2$, der $x_1, x_2 \in K_2 \setminus \mathbb{Q}$, siden $\tau(x_1) = x_2$. Siden ξ er rot i polynomet (2) følger det straks at $x_1 + x_2 = -1$ og (etter litt regning) at $x_1 \cdot x_2 = -4$; x_1, x_2 er altså røtter i likningen

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad \text{eller} \quad x(x+1) = 2^2.$$

Den siste sier at 2 er geometrisk middel for x og $x + 1$.



Figur 2: Geometrisk løsning av $x(x+1) = 2^2$.

Vi innfører en forkortet skrivemåte;

$$x_1 = \sum \xi^{\pm\{1,2,4,8\}}, \quad x_2 = \sum \xi^{\pm\{3,5,6,7\}}$$

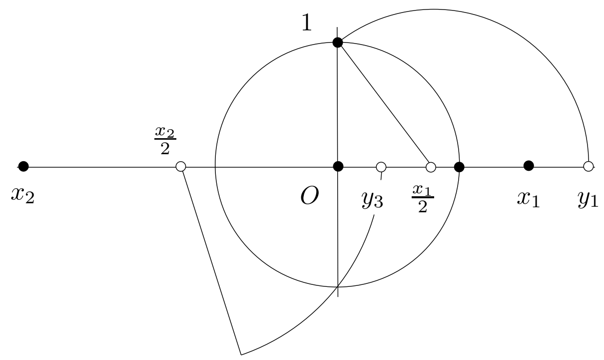
og bestemmer fire banesummer under gruppen $\langle \tau^4 \rangle$;

$$y_1 := \sum \xi^{\pm\{1,4\}}, \quad y_2 = \sum \xi^{\pm\{2,8\}}, \quad y_3 = \sum \xi^{\pm\{3,5\}}, \quad y_4 = \sum \xi^{\pm\{6,7\}}.$$

Det er klart at $y_1 + y_2 = x_1$ og $y_3 + y_4 = x_2$, og det er ikke særlig strevsomt å kontrollere at

$$y_1 \cdot y_2 = y_3 \cdot y_4 = -1.$$

Det følger at y_1, y_2 er røtter i likningen $(y - x_1)y = 1$.



Figur 3: Løsning av $(y - x_i)y = 1, \ i \in \{1, 2\}$.

Konstruksjonen av røttene y_3, y_4 i $(y - x_2)y = 1$ er analog. Bare y_1 og den positive y_3s konstruksjon er tatt med i figur 3. Vi observerer at

$$\tau^2(y_1) = y_2, \quad \tau^2(y_3) = y_4$$

slik at $K_4 = K_2(y_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Vi setter nå

$$z_j := \sum \xi^{\pm\{j\}} = \xi^j + \xi^{-j} = 2 \cdot \mathrm{Re}(\xi^j)$$

(banesummer under gruppen $\langle \tau^8 \rangle$) og bemerker at

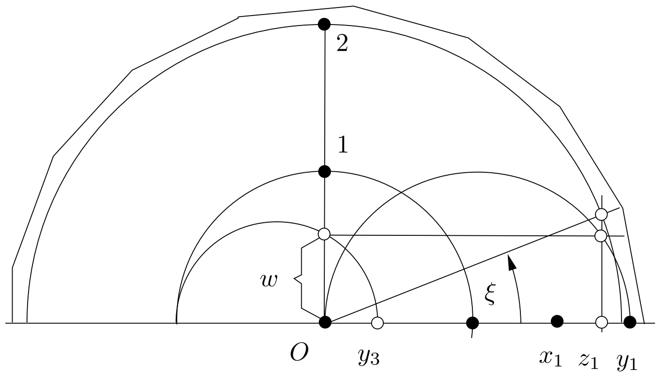
$$y_1 = z_1 + z_4 \quad \text{og} \quad y_3 = z_1 \cdot z_4.$$

Det følger at z_1, z_4 er røtter i likningen

$$z^2 - y_1 z + y_3 = 0$$

som kan omformes til

$$-z(z - y_1) = z(y_1 - z) = y_3 =: w^2, \qquad w > 0$$



Figur 4: Løsning av $z(y_1 - z) = y_3 =: w^2$.

og løses geometrisk som i figur 1. Men først bestemmes w som geometrisk middel av 1 og y_3. $\mathrm{Re}(\xi^1) = z_1/2$ bestemmer så ξ.

Forbausende mange kjente matematikere har beskjeftiget seg med denne konstruksjonen. Goldenring [4] gir en oversikt over konstruksjonen(e)s historie som er blitt ettertrykkelig anmeldt og supplert av Archibald i [1]. Det lille heftet [7] (26 sider) er utgitt før 1873 og derfor ikke til utlån fra norske biblioteker. [6] refererer på s. 204 konstruksjonen til Richmond med en kortfattet beskrivelse av prosedyren, ikke mer.

Referanser

[1] R. C. Archibald: The history of the construction of the regular polygon of seventeen sides. *Bull. AMS*, **22**, 239–246 (1916).

[2] C. F. Gauss: *Disquisitiones Arithmeticae.* New Haven and London, Yale University Press, 1966.

[3] C. F. Gauss: *Werke.* Göttingen 1873.

[4] R. Goldenring: *Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmässigen Siebzehnecks. Eine historisch-kritische Darstellung.* Leipzig und Berlin, Teubner 1915.

[5] M. H. Fenrick: *Introduction to the Galois correspondence.* Boston–Basel–Berlin 1998.

[6] M. Křížek, F. Luca, L. Somer: *17 lectures on Fermat numbers. From number theory to geometry.* CMS books in mathematics, Springer Verlag 2001.

[7] G. Oden: *Geometrisk behandling og construction af den regulære 17 kant.* Christiania 1854.

[8] Reed og Årnes: *Matematikk i vår tid.* Universitetsforlaget, 1967.

[9] I. Stewart: *Galois Theory.* London–New York 1989.