Oppgaver

456. Vis at det eneste av tallene

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101,\ \dots,$$

som er primtall, er 101. (Innsendt av Gunnar Blom, Lund, SE.)

457. Gitt en konveks firkant $ABCD$ der vinkelen A er rett, og sidelengdene er $|AB| = |AD| = a$, $|BC| = |CD| = b$, der a og b er naturlige tall og $a < b$. Vis at arealet av firkanten er $F = (a^2 + a\sqrt{2b^2 - a^2}\,)/2$.

Vis også (uten å bruke teorien for kvadratiske tallkropper!) at det fins uendelig mange måter å velge a og b på slik at F blir heltallig. (Innsendt av Norvald Midttun, Bergen, NO.)

458. Vis at for $n \geq 1$ er

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j}^2$$

Vis at hvis $n = p^a$ er en primtallspotens, så er

$$\sum_{j=0}^{p^a} \binom{p^a}{j}\binom{p^a+j}{j} \equiv 1 + 2^{p^a} \pmod{p^2}.$$

(Innsendt av Tor Skjelbred, Oslo, NO.)

459. Gitt tre punkter A, B og C i planet og et linjestykke med lengde l. Bestem to like store sirkler, der den ene sirkelen skal gå gjennom A og B og den andre gjennom A og C, og de to sirklene skal skjære hverandre i et punkt i avstand l fra A. (Innsendt av Tor Fidje, Ås, NO.)

Løsninger

442. Betrakt en glatt kurve i planet som er slik at krumningen er strengt voksende når vi beveger oss langs kurven (i den ene retningen). Vis at kurven ikke kan ha dobbeltpunkter. (Innsendt av Harald Hanche-Olsen, Trondheim, NO.)

Løsning: (Etter *Ebbe Thue Poulsen*, Mårslet, DK.)

(A) Vi betrakter først et punkt P_0 hvor krumningen κ er positiv, og beviser at intet etterfølgende punkt på kurven k faller sammen med P_0.

Legg et rettvinklet koordinatsystem i planet med origo i P_0 og med tangenten i P_0 som x-akse. La k ha parameterfremstillingen $(x, y) = (f(t), g(t))$, hvor t er buelengden fra P_0 til det løpende punktet $P(t)$.

Da er tangentvektoren $(f'(t), g'(t))$ en enhetsvektor, dens vinkel v med x-aksen bestemmes ved $(\cos v, \sin v) = (f'(t), g'(t))$, og vinkelen $v = \varphi(t)$ kan velges slik at φ er kontinuerlig og $\varphi(0) = 0$. Når v velges på denne måten, er $\varphi'(t) = \kappa(t)$, kurvens krumning i $P(t)$, og siden κ er strengt voksende og $\kappa(0) > 0$, er også φ strengt voksende.

Vi skal nå bevise at for enhver $t_1 > 0$ gjelder $g(t_1) > 0$, og derfor $P(t_1) \neq P_0$. Vi har

$$g(t_1) = \int_0^{t_1} g'(t)\,dt = \int_0^{t_1} \sin\bigl(\varphi(t)\bigr)\,dt = \int_0^{t_1} \sin\bigl(\varphi(t)\bigr)\frac{1}{\kappa(t)}\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Substitusjonen $v = \varphi(t)$ gir

$$g(t_1) = \int_0^{v_1} \sin(v)\frac{1}{\kappa\bigl(\varphi^{-1}(v)\bigr)}\,dv = \int_0^{v_1} \sin(v)\rho(v)\,dv, \tag{2}$$

der vi har satt $\rho(v) = 1/\kappa\bigl(\varphi^{-1}(v)\bigr)$.

Siden κ og φ er strengt voksende, er ρ strengt avtagende, og det er nå lett å bevise at integralet i (2) er positivt for $v_1 > 0$:

For $v_1 \leq \pi$ er integranden positiv, og dermed også integralet. For $\pi < v_1 \leq 2\pi$ er

$$\begin{aligned}
&\int_0^{v_1} \sin(v)\rho(v)\,dv \\
&\quad= \int_0^{v_1-\pi} \sin(v)\rho(v)\,dv + \int_{v_1-\pi}^{\pi} \sin(v)\rho(v)\,dv + \int_{\pi}^{v_1} \sin(v)\rho(v)\,dv \\
&\quad= \int_0^{v_1-\pi} \sin(v)\bigl(\rho(v) - \rho(v+\pi)\bigr)\,dv + \int_{v_1-\pi}^{\pi} \sin(v)\rho(v)\,dv,
\end{aligned}$$

som er positivt, da ρ er positiv og strengt avtagende.

For $v_1 > 2\pi$ velger vi n som det hele tallet som oppfyller $2n\pi < v_1 \leq 2(n+1)\pi$. Da er

$$\int_0^{v_1} \sin(v)\rho(v)\,dv = \sum_{j=1}^{n} \int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin(v)\rho(v)\,dv + \int_{2n\pi}^{v_1} \sin(v)\rho(v)\,dv,$$

som er positivt, siden alle de enkelte integralene er positive.

(B) Hvis krumningen i P_0 er 0, gjelder resonnementet ovenfor med den endring at integralet (2) er uegentlig. Det er imidlertid konvergent, da det er lik integralet i (1).

Et kurvestykke med negativ og strengt voksende krumning kan heller ikke ha dobbeltpunkter. Det ser vi ved å skifte gjennomløpsretning på kurven. Da skifter krumningen fortegn, men bevarer monotoniegenskapen.

Hvis vi endelig har en kurve hvor krumningen antar både negative og positive verdier, lar vi P_0 betegne det punktet hvor krumningen er 0. Av det foregående følger at den etterfølgende delen av kurven ligger helt i det positive halvplanet bestemt ved tangenten i P_0, mens den foregående delen av kurven ligger helt i det negative halvplanet. Altså kan kurven heller ikke i dette tilfellet ha dobbeltpunkter.

Også løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Tor Skjelbred, Oslo, NO.

443. Av plasshensyn må løsningen av denne oppgaven stå over til neste hefte.

444. La x_1, x_2, …, x_n være positive reelle tall, og la

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Vis at

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}\,.$$

(Fra Asian Pacific Mathematical Olympiad 1989.)

Løsning: (Etter *Ebbe Thue Poulsen*, Mårslet, DK.) Siden den naturlige logaritmefunksjonen er konkav, gir Jensens ulikhet at

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\ln(1+x_j) \le \ln\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+x_j)\Big) = \ln\Big(1+\frac{S}{n}\Big),$$

og derfor er

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}(1+x_j) &\le \exp\Big(n\ln\Big(1+\frac{S}{n}\Big)\Big) = \Big(1+\frac{S}{n}\Big)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{S^j}{n^j}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}\frac{S^j}{n^j} \le \sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!}\frac{S^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{n}\frac{S^j}{j!}\,.\end{aligned}$$

Kommentar: Den versjonen av Jensens ulikhet som er brukt her, sier at hvis f er en konkav funksjon over et intervall I, så gjelder

$$(*)\qquad \sum_{j=0}^{n} a_j f(x_j) \le f\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j\Big)$$

for vilkårlige punkter x_1, …, x_n i I og ikke-negative tall a_1, …, a_n med sum $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Ulikheten $(*)$ er opplagt riktig for $n = 1$, og for $n = 2$ uttrykker $(*)$ nettopp den karakteristiske egenskapen ved en konkav funksjon f, nemlig at korden mellom to vilkårlige punkter på grafen til f ikke noe sted kommer opp over grafen. Et enkelt induksjonsbevis viser så at $(*)$ gjelder for alle n.

Også løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Ole Jørsboe, Kongens Lyngby, DK; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

445. Gitt en trekant med sider a, b og c. La s være halve omkretsen, altså $s = (a+b+c)/2$. Konstruer en ny trekant med sider $s-a$, $s-b$ og $s-c$. Gjenta prosessen inntil det ikke lenger er mulig å konstruere en ny trekant. For hvilke opprinnelige trekanter vil denne prosessen ikke stoppe opp? (Fra Asian Pacific Mathematical Olympiad 1992.)

Løsning: (Etter *Henrik Meyer*, Birkerød, DK.) Ved den angitte prosessen får vi først en ny trekant med sider $a_1 = s - a$, $b_1 = s - b$ og $c_1 = s - c$. Omkretsen av denne nye trekanten er $a_1 + b_1 + c_1 = 3s - (a + b + c) = s$, altså halve omkretsen av den opprinnelige trekanten. På den annen side bevares forskjellene mellom sidelengdene, i den forstand at $|a_1 - b_1| = |(s-a) - (s-b)| = |a-b|$, og likedan $|a_1 - c_1| = |a-c|$ og $|b_1 - c_1| = |b - c|$. Ifølge trekantulikheten må vi ha $|a - b| = |a_1 - b_1| < c_1 < a_1 + b_1 + c_1$, så forskjellen mellom et par av sidelengder i den opprinnelige trekanten må være mindre enn omkretsen av den nye trekanten. Hvis prosessen kan fortsette uten å stoppe opp, vil omkretsen av de nye trekantene gå mot 0, og derfor må vi ha $|a - b| = 0$, dvs. $a = b$, og tilsvarende $a = c$. Hvis prosessen ikke skal stanse, må altså trekanten være likesidet. At prosessen ikke stanser for likesidete trekanter, er på den annen side opplagt.

Også løst av: Tor Fidje, Ås, NO; Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

446. La a, b, c være sider i en trekant. Vis at

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Når får vi likhet? (Fra Asian Pacific Mathematical Olympiad 1996.)

Løsning: Sett $x = \sqrt{a+b-c}$, $y = \sqrt{b+c-a}$ og $z = \sqrt{c+a-b}$. Da er $x^2 + z^2 = 2a$, $x^2 + y^2 = 2b$ og $y^2 + z^2 = 2c$, og vi skal vise ulikheten

$$(*) \qquad x + y + z \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(y^2+z^2)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+z^2)}\,.$$

Nå er

$$\tfrac{1}{2}(x^2+y^2) - \left(\tfrac{1}{2}(x+y)\right)^2 = \tfrac{1}{4}(x^2+y^2-2xy) = \tfrac{1}{4}(x-y)^2,$$

så $\frac{1}{2}(x+y) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, med likhet hvis og bare hvis $x = y$. Tilsvarende er $\frac{1}{2}(x+z) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+z^2)}$ og $\frac{1}{2}(y+z) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(y^2+z^2)}$. Ulikheten $(*)$ følger ved addisjon av de tre siste ulikhetene, og vi ser at vi får likhet i $(*)$ hvis og bare hvis $x = y = z$, som er ekvivalent med $a = b = c$.

Løst av: Tor Fidje, Ås, NO; Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

Erratum: Ved en feil var Pål Grønnås, Stjørdal, NO, dessverre uteglemt på listen over løsere av oppgave 439 og 441.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, Norge innen 30. juni 2005. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.