Normat **53**:2, 54–71 (2005)

Hvad søgte de og hvad fandt de?

Kombinatoriske løsningsformler til algebraiske ligninger – fra Cardano til Cauchy – Del 1*

Uffe Thomas Jankvist og Neslihan Sağlanmak

Institut for Matematik og Fysik
Roskilde Universitetscenter
Box 260
DK–4000 Roskilde
utj@ruc.dk, neslihan@ruc.dk

1 Indledning

Efter man i århundreder havde søgt den algebraiske løsning[1] til den generelle n'tegradsligning, indtog den unge norske matematiker Niels Henrik Abel (1802–1829) et nyt standpunkt, nemlig at den generelle n'tegradsligning er algebraisk uløselig for $n > 4$. Der var tidligere blevet stillet spørgsmålstegn ved femtegradsligningens uløselighed af blandt andre Carl Friedrich Gauss (1777–1855) i 1801 og den italienske matematiker Paolo Ruffini (1765–1822), hvoraf sidstnævnte i årene 1799–1813 også havde givet et par bud på et bevis herfor, men det var først med Abels bevis anno 1826, at resultatet blev anerkendt i samtidens matematiske kredse.

Et andet ungt matematisk geni, franskmanden Evariste Galois (1811–1832), fulgte op på Abels og Ruffinis resultat. Galois inddrog i sin teori dele af vore dages gruppeteori og satte således med sit studie af klasser af løsbare ligninger prikken over i'et inden for den algebraiske ligningsløsningsteori, ved at vise hvilke klasser af ligninger der er algebraisk løsbare, og dermed hvilke klasser der ikke er.[2]

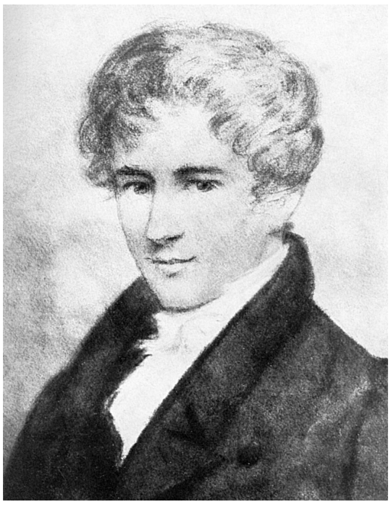
*Artiklen er grundet dens længde og omfang delt i to. Anden del kommer i næste nummer af Normat.

[1] Med en *algebraisk løsning* menes en løsning givet ved et *algebraisk udtryk*. Se definition 4.

[2] En moderne fremstilling af Galoisteori kan f.eks. findes i [31].

Galois' nyskabende arbejde, som forbinder algebraisk ligningsløsning og gruppeteori, opfattes i dag som et paradigmeskift indenfor algebraen. Selv om der *er* tale om et paradigmeskift markerede Galois' »streg i sandet« dog ikke en fuldstændig overraskende ny begyndelse. Målet med nærværende artikel er at vise, at forbindelsen mellem algebraisk ligningsløsning og gruppeteori i virkeligheden har udviklet sig mere kontinuert og med bidrag fra adskillige matematikere, hvis formål oftest var uopnåeligt, nemlig at *bestemme* algebraiske løsningsformler til generelle ligninger.

Vi skal nedenfor se på den algebraiske ligningsløsning i perioden *før* Gauss, Abel og Galois. Nærmere bestemt på de tiltag indeholdende kombinatoriske elementer, såsom permutationer samt invariansbetragtninger, der har haft betydning for den videre udvikling af den algebraiske ligningsløsningsteori. Mere præcist skal vi se på perioden fra Cardanos udgivelse af *Ars Magna* i 1545 til Cauchys behandling af symmetriske funktioner i 1815, altså en periode på små 300 år.



Niels Henrik Abel (1802–1829)

Evariste Galois (1811–1832)

Forsøgene på at nå frem til en algebraisk løsning til den generelle n'tegradsligning i ovennævnte periode er mange og tilgangene vidt forskellige. Cardano og Ferrari lægger i 1545 ud med at anvende substitutioner af rødderne og hjælpeligninger til at løse såvel tredje- som fjerdegradsligningen. Viète (1591) og Girard (1629) opdager den symmetriske sammenhæng mellem koefficienterne og rødderne i et polynomium og kan på den måde udtrykke koefficienterne i termer af rødderne. Tschirnhaus (1683), Euler (1732) og Bézout (1764) forsøger med variabelskift og elimination at finde en generel løsningsformel for n'tegradsligningen. Denne tidlige del af perioden synes præget af den alkymistiske tankegang som på dette tidspunkt huserer i det vestlige Europa. På samme måde som alkymisterne havde en fast tro på, at de kunne lave guld ved systematisk variation af kemiske forbindelser, havde disse matematikere en fast tro på, at når koefficienterne kunne udtrykkes ved rødderne, så måtte også rødderne kunne udtrykkes ved systematisk kombination af koefficienterne – det gjaldt blot om at finde det rette »blandingsforhold«.

I årene 1770–1771 tager udviklingen for alvor fart, og der udkommer tre vigtige afhandlinger af henholdsvis Waring, Vandermonde og Lagrange. Hvor disse tres forgængere er præget af den alkymistiske tilgang til ligningsløsningen, er disse tre langt mere analyserende i deres tilgange. Waring fremsætter sin hovedsætning for symmetriske polynomier. Vandermonde viser noget tilsvarende, men underkaster også de allerede kendte løsningsformler en mindre analyse. Lagrange udfører en omfattende og grundig analyse af de kendte løsningsformler og de tidligere foreslåede løsningsmetoder til den generelle n'tegradsligning. Ruffini søger i årene fra 1799 til 1813 at vise, at den generelle femtegradsligning ikke kan løses algebraisk og udvikler ved denne lejlighed sit permutationsbegreb. Også Cauchy giver i 1815 væsentlige bidrag til den i dag kendte permutationsteori. Mange elementer af såvel Ruffinis som af Cauchys arbejder er i dag at finde som dele af den velkendte gruppeteori.

Umiddelbart kan det se ud som om, at de ca. 200 år fra Cardanos *Ars Magna* og frem til de tre afhandlinger i 1770–1771 er »sløve« og uden de store fremskridt. Dette mener vi imidlertid ikke er rigtigt. Det er netop i disse år, at Viète indfører »bogstavregningen«, et tiltag der på alle måder er banebrydende, da det danner grundlaget for den moderne videnskabelige fremgangsmåde, og det er også i denne periode at symmetribetragtningerne angående forholdet mellem et polynomiums koefficienter og dets rødder for alvor vinder frem. Overordnet kan man sige, at hovedparten af de i denne artikel fremstillede matematiske arbejder ikke i deres samtid blev opfattet som revolutionerende, i og med at de ikke opnåede deres mål, men set i »bagklogskabens lys« må disse, via deres nye tiltag og forskellige tilgange til problemet, siges at have lagt fundamentet for Abels og Galois' teorier.

Efter en gennemgang af de ovennævnte matematikeres vigtigste bidrag til den algebraiske ligningsløsning samt en løbende undersøgelse af deres anvendelse af kombinationer, permutationer og invariansbetragtninger, skal vi afslutningsvis søge at fremdrage generelle træk ved disse matematikeres forskellige tilgange til ligningsløsningen. Disse er aspekter af historien bag ligningsløsningsteorien, som synes forbigået i litteraturen.

2 Kvadratkompletering og substitutionstrick

Den første kendte løsning til andengradsligningen kendes fra en babylonsk tavle og kan dateres tilbage til 2000 f.v.t. [17], senere forefindes løsningerne hos såvel de græske (ca. 300 f.v.t.) som de arabiske og indiske matematikere (700-tallet) [5], [33]. De generelle algebraiske løsningsformler for tredje- og fjerdegradsligningen fremkom dog ikke førend midt i 1500-tallet – altså ca. 3500 år efter at man kendte løsningen til andengradsligningen. Hvorfor skulle der gå så lang tid før der skete noget nyt på ligningsløsningsområdet? Og hvorfor skulle der gå henved 300 år yderligere inden man fandt ud af, at den generelle femtegradsligning ikke kan løses algebraisk? Det er nogle af de spørgsmål man unægteligt stiller sig selv, når man studerer historien bag den algebraiske ligningsløsning. En stor del af svaret skal findes i de teknikker og angrebsmetoder, der er blevet anvendt op igennem tiden.

Den ældste og mest vedholdende teknik til løsning af den generelle andengradsligning

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{1}$$

bygger på teknikken *kvadratkompletering*. Kvadratkompletering består i følgende; først omskrives (1) til $x^2 + a_1 x = -a_0$ og dernæst lægges $(\frac{1}{2}a_1)^2$ til på begge sider

$$x^2 + a_1 x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0. \tag{2}$$

Nu observeres det at venstresiden af (2) er kvadratet på en to-leddet størrelse (også kaldet et perfekt kvadrat), hvorfor man får

$$\left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 \Leftrightarrow x + \frac{a_1}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

Ud fra denne opnås de velkendte løsninger af andengradsligningen

$$x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}.$$

Kvadratkompletering er en blændende teknik, men desværre lader den sig ikke generalisere. Babylonerne benyttede sig af kvadratkompletering [17], men selvom fremskridtene inden for matematikken har været store siden da, skulle der alligevel gå mere end 3500 år førend nogen fandt en metode til løsning af tredjegradsligningen. Man kan således være tilbøjelig til at mene, at kvadratkompleteringen, i og med at det netop er en så forblændende teknik, bærer en stor del af skylden for den manglende udvikling af nye metoder til løsning af algebraiske ligninger. Den har altså om man så må sige skygget for nye initiativer.

2.1 Cardanos *Ars Magna*

I midten af 1500-tallet begyndte matematikerne at skabe »nyt«, i stedet for blot at fortolke og videreudvikle gamle skrifter. Det første gennembrud med hensyn til algebraiske løsningsmodeller for tredjegradsligningen fandt sted i renæssancens Italien med matematikere som Scipione del Ferro (1465–1526) og Niccolò Fontana (1499–1557), også kaldet Tartaglia [10]. Hverken del Ferro eller Tartaglia offentliggjorde dog noget om løsningen af tredjegradsligninger, dette skete først med udgivelsen af den italienske matematiker, læge og astrolog Girolamo Cardanos (1501–1576) værk *Ars Magna* fra 1545.[3] Heri fremlægger Cardano, foruden Tartaglias og sine egne løsningsformler til tredjegradsligningen, også sin elev Lodovico Ferraris (1522–1565) løsning for fjerdegradsligningen.

På Cardanos tid var tilgangen til ligningsløsningen geometrisk, og man betragtede leddene i ligningen som egenskaber ved en geometrisk figur (f.eks et kvadrat), og løsningen til ligningen som et liniestykke. *Ars Magna* er derfor også præget af denne geometriske tilgang, hvilket ikke mindst fremgår af de mange skitser til de forskellige typer af tredjegradsligninger – Cardano betragter ligesom sine forgængere de forskellige typer af tredjegradsligninger ($x^3 + cx = d$, $x^3 = cx + d$ osv.) seperat. Denne geometriske anskuelse af ligningsløsning bevirker ligeledes, at det

[3]Historien om del Ferros løsning af tredjegradsligningen, hans elevs dyst med Tartaglia samt hvorledes Cardano fik løsningsformlerne af Tartaglia er at finde adskillige steder i litteraturen, f.eks. i [4] og [5].

ikke er naturligt at beskæftige sig med fjerdegradsligningen. Ikke desto mindre præsenterer Cardano, som han selv udtrykker det »af nødvendighed eller af ren og skær nysgerrighed« [10], Ferraris løsning til fjerdegradsligningen. Vi vil ikke gennemgå Ferraris løsning her,[4] men blot pointere at metoden bygger på anvendelsen af en hjælpeligning af grad 3 samt anvendelsen af kvadratkompletering. I og med at kvadratkompletering ikke lader sig generalisere, kan Ferraris metode ikke siges at være særligt fremadpegende.

Cardano opdelte som ovenfor nævnt ligningerne i forskellige typer, hvorfor han ikke får udtrykt en løsningsformel for den generelle tredjegradsligning, men derimod en løsningsformel for hver af de forskellige typer af tredjegradsligninger. Følgende moderne gennemgang af løsningen til den generelle tredjegradsligning adskiller sig ikke fundamentalt fra Cardanos oprindelige tilgang, omend der er visse afvigelser. Nogle af disse er for eksempel, at Cardano indsætter specifikke værdier for koefficienterne samt at han anvender udtrykket $y = u - v$ i stedet for det nedenstående $y = u + v$ [10].

Ligesom løsningen af andengradsligningen bygger løsningen af tredjegradsligningen på et trick (kvadratkompletering er jo i en vis forstand et trick), blot er dette trick af en fundamentalt anderledes karakter. Det går ud på først at foretage en substitution og dernæst udtrykke den ubekendte som summen af to andre ubekendte; $y = u + v$ (et af de mest symmetriske udtryk man kan forestille sig), og på den måde til sidst reducere en tredjegradsligning til én andengradsligning og to trivielle tredjegradsligninger. Men først en nødvendig definition for nedenstående gennemgang.

Definition 1 *Med en* primitiv n'te enhedsrod ω *forstås en løsning til ligningen* $x^n - 1 = 0$, *med den egenskab at de* n *rødder til denne ligning er* $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^n$ *hvor* $\omega^n = 1$.[5] *Bemærk at hvis* n *er et primtal, så er enhver* n*'te enhedsrod forskellig fra 1 en primitiv* n*'te enhedsrod.*

Lad os nu betragte den generelle tredjegradsligning

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{3}$$

Første skridt i løsningsproceduren er at man i (3) fjerner andengradsleddet ved substitutionen $x = y - \frac{1}{3}a_2$. Indsat i (3) opnås da

$$y^3 + py + q = 0, \tag{4}$$

hvor $p = a_1 - \frac{1}{3}a_2^2$ og $q = \frac{2}{27}a_2^3 - \frac{1}{3}a_2a_1 + a_0$. Vi benytter nu tricket med at sætte $y = u + v$, hvilket ved indsættelse i (4) giver

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{5}$$

Uanset hvad summen af de to tal u og v er, er det altid muligt at vælge deres produkt, uv, vilkårligt. Hvis $u + v = A$ og vi ønsker at $uv = B$, fås da $v = A - u$, at

$$u(A - u) = B \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - Au + B = 0,$$

[4]For en uddybende gennemgang se f.eks. [33].

[5]Eksempelvis har $x^4 - 1 = 0$ fjerderødderne $1, -1, i, -i$, hvor kun i og $-i$ er primitive.

hvorfor det er tilstrækkeligt at u er en løsning til denne andengradsligning, da vi jo ved at enhver andengradsligning enten har reelle eller komplekse rødder.

I dette tilfælde er $u + v$ jo lig den ønskede rod y i tredjegradsligningen, og produktet uv vælger vi at underlægge betingelsen $3uv = -p$, det vil sige

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}. \tag{6}$$

Af (5) får man da

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{7}$$

Nu følger af (6) og (7) at u^3 og v^3 er rødder i andengradspolynomiet[6] (eller hjælpeligningen)

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{8}$$

Løses (8) ved den sædvanlige formel findes rødderne

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ og } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{9}$$

Løsningen af den generelle tredjegradsligning er således reduceret til løsningen af en andengradsligning og til ligningerne (9). Tager man i betragtning, at $3uv = -p$, og at kubikrødderne kun er bestemt op til en tredje enhedsrod, så følger det af $y = u + v$, at de tre rødder y_1, y_2 og y_3 til (4) er givet ved formlerne

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\\
y_2 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\\
y_3 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Her er ω en primitiv tredje enhedsrod.

Den lære der viderebringes fra året 1545 til senere matematikere er altså at; andengradsligningen løses ved hjælp af kvadratkompletering, tredjegradsligningen ved hjælp af brugen af substitutioner samt en hjælpeligning og fjerdegradsligningen ved hjælp af en hjælpeligning samt kvadratkompletering. Cardanos vigtigste bidrag til eftertidens matematikere er altså brugen af et substitutionstrick til løsning af tredjegradsligningen.

Til trods for den geometriske indgangsvinkel i *Ars Magna* vidner Cardanos substitutionstrick samt undersøgelserne af fjerdegradsligninger ikke desto mindre om

[6]Det følger eksempelvis af Viète-relationerne (se afsnit 3).

en vis abstraktion. I vore dages terminologi fremgår brugen af et udvidelseslegeme (her **C**) således tydeligt i ovenstående moderne og helt formelle gennemgang af Cardanos formler.

Det matematiske abstraktionsniveau hæves dog først op til hidtil usete højder af Viète, der med sit værk fra 1591 på det nærmeste lægger grundlaget for hele den abstrakte matematik.

Girolamo Cardano (1501–1576)

François Viète (1540–1603)

3 Sammenhængen mellem rødder og koefficienter

De i dag såkaldte Viète-relationer giver en sammenhæng mellem koefficienterne i et polynomium og dets rødder, og de defineres som følger: Har man det generelle n'tegradspolynomium

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er rødderne, fås faktoriseringen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Ganger man nu højresiden ud og sammenligner koefficienterne opnås Viète-relationerne

$$\begin{aligned}
-a_{n-1} &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = s_1 \\
a_{n-2} &= x_1x_2 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = s_2 \\
&\vdots \\
(-1)^n a_0 &= x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n = s_n,
\end{aligned}$$

hvor $s_1, s_2, \ldots, s_n$ kendes som de *elementære symmetriske polynomier* (eller de elementære symmetriske funktioner) i de n variable $x_1, \ldots, x_n$. Med et symmetrisk polynomium menes følgende:

Definition 2 (Symmetrisk polynomium) *Et polynomium $f(x_1, \ldots, x_n)$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ over et givet legeme kaldes* symmetrisk*, hvis*

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

for enhver permutation σ af symbolerne $1, 2, \ldots, n$. Indføres notationen

$$f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

bliver betingelsen da $f_\sigma = f$.

Viète-relationerne i ovennævnte generelle form blev fremsat af Albert Girard (1595–1632) i hans artikel *Invention nouvelle en l'algèbre* fra 1629, men de er opkaldt efter François Viète (1540–1603) grundet hans tidligere delvise observationer af disse.

Viète hæver i sit værk *In Artem Analyticem Isagoge* [38] fra 1591 abstraktionsniveauet markant, idet han introducerer en ny systematisk algebraisk notation. Et sådant tiltag var påkrævet, da den tidligere algebraiske notationsform var så uegnet og omstændelig, at det ofte satte praktiske begrænsninger. Viète foreslår med sin notation at anvende bogstaver som symboler for matematiske størrelser; vokaler til de ukendte størrelser og konsonanter til de kendte. I øvrigt er det også Viète, der indfører betegnelserne »polynomium« og »koefficient« i algebraen [30]. Et andet område hvor Viète ligeledes udførte banebrydende arbejde var indenfor kryptografi og kodebrydning [8], discipliner der baserer sig på studier af kombinationer og således ikke lå fjernt fra datidens tilgang til algebraisk ligningsløsning.

Viète pointerer i sit værk fra 1591 vigtigheden af at forstå strukturen i et polynomium, det vil sige sammenhængen mellem koefficienterne og rødderne. Dette udmønter sig i et studie af specifikke ligningstyper, f.eks. tredjegradsligningen

$$B^pX - X^3 = Z^s. \tag{10}$$

Her henviser »eksponenterne« for koefficienterne B og Z til koefficienternes dimension. Det vil sige, at p og s står for henholdsvis »plano« (planen med dimension 2) og »solido« (en rumlig figur med dimension 3). Viète tænker altså på leddene som geometriske størrelser og sørger derfor for at alle leddene får samme dimension.[7]

Viète lader nu A og E være rødder i (10) og antager at $A > E$. Han betragter dernæst ligningerne

$$B^pA - A^3 = Z^s \tag{11}$$

og

$$B^pE - E^3 = Z^s. \tag{12}$$

Da højresiderne af (11) og (12) begge er lig Z^s, kan han sætte venstresiderne lig hinanden

$$A^3 - E^3 = B^pA - B^pE \quad \Leftrightarrow \quad A^2 + E^2 + AE = B^p, \tag{13}$$

[7]Eksempelvis er B^s koefficienten til førstegradsleddet i en fjerdegradsligning. Se f.eks. [38].

hvor anden del af (13) fås ved at dividere igennem med $A - E$. Viète har således vist, at B^p er summen af kvadraterne af de to rødder plus deres produkt. Ligeledes viser han, at

$$Z^s = A^2E + E^2A,$$

hvilket fås ved at erstatte B^p med $A^2 + E^2 + AE$ i (11).

Viètes ovenstående resultater stemmer fint overens med Viète-relationerne. Dog ser han kun på to af rødderne i tredjegradsligningen, som i moderne notation svarer til ligningen

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

hvor $a_2 = 0$, $a_1 = -B^p$ og $a_0 = Z^s$. Han kalder disse rødder for A og E. Vi kan nu med henvisning til Viète-relationerne bestemme den sidste rod, som vi vil kalde I, og vi får

$$-a_2 = A + E + I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = -(A + E)$$

(bemærk at denne rod for $A, E > 0$ er negativ). Med kendskab til den sidste rod kan vi opskrive følgende relationer

$$\begin{aligned}
a_1 &= -B^p = AE + AI + EI = AE - A(A + E) - E(A + E) \\
&\Rightarrow \quad B^p = A^2 + E^2 + AE, \\
-a_0 &= -Z^s = AEI = -AE(A + E) \\
&\Rightarrow \quad Z^s = A^2E + AE^2,
\end{aligned}$$

hvilket er de samme resultater som dem Viète opnår. Altså bestemmer Viète for specifikke ligningstyper koefficienterne udtrykt ved rødderne, men blandt andet på grund af en manglende beskrivelse af alle rødderne til en ligning lykkes det ham ikke at generalisere sammenhængen fuldstændigt. Viète accepterer ikke negative rødder til polynomier [19], hvilket må anses som en mulig forklaring på hans manglende succes i formuleringen af relationerne i en mere generel kontekst.

Den første det derimod lykkedes at formulere sammenhængen mellem koefficienter og rødder i det generelle n'tegradspolynomium (i den enkle form vi kender i dag) var som nævnt Girard. Det at der virkelig findes n komplekse rødder til en n'tegradsligning viser Girard naturligvis ikke – det blev først endeligt bevist med algebraens fundamentalsætning. Set med moderne matematiske øjne kan man dog sige, at Girard viser eksistensen af et udvidelseslegeme, hvori polynomier har n rødder.

4 Eliminationsmetoderne

De ca. 200 år fra 1545 til 1770 bød på diverse metoder af såvel Tschirnhaus som Euler og Bézout, hvis mål alle er at løse den generelle n'tegradsligning. Selvfølgelig formår ingen af metoderne dette, men ikke desto mindre er de stadigvæk interessante, da de har fået senere matematikere – specielt Lagrange – til at tænke nærmere over, hvorfor de ikke fungerer.

Men først et par for afsnittet nødvendige definitioner.

Definition 3 *Et* rationalt *udtryk er et udtryk sammensat af koefficienter fra et givet legeme ved operationerne addition, subtraktion, multiplikation (og dermed potensopløftning) samt division.*

Definition 4 *Et* algebraisk *eller et* radikalt *udtryk er et rationalt udtryk, hvorom det gælder, at også roduddragning er en tilladt operation.*

Definition 5 *Med en* ren *ligning (eller et* monom*) forstås en ligning af formen* $x^n - r = 0$.

4.1 Tschirnhaus' transformation

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651–1708) var ligeledes en matematiker med adskillige interesseområder. I dag er han dog nok mest kendt for udviklingen af en metode til fremstilling af porcelæn; endnu et biprodukt af datidens alkymistiske aktiviteter. I 1683 gav Tschirnhaus i en 4-siders »note« sit bidrag til den algebraiske ligningsløsning i form af sin »metode til at eliminere alle mellemliggende led i en given ligning«.[8] Metoden skulle ifølge Tschirnhaus selv kunne løse vilkårlige ligninger af enhver grad, hvad den selvfølgelig ikke kan.

Metoden bygger videre på, at det altid er muligt at eliminere andet led i et vilkårligt n'tegradspolynomium [22]. Mere præcist tager den udgangspunkt i, at n'tegradspolynomiet

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \tag{14}$$

når der foretages følgende generelle variabelskift

$$y = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1x + b_0 \tag{15}$$

(for $m < n$), kan omskrives til en ligning, hvori et antal led er elimineret. Man vil med passende valg af de m parametre $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ således opnå følgende resulterende ligning i y

$$y^n + c_{n-1}y^{n-1} + \ldots + c_1y + c_0 = 0,$$

hvor m vilkårlige af koefficienterne c_i kan elimineres. Dette kan lade sig gøre idet c_i er udtrykt ved koefficienterne i (14) og (15) og da $(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1})$ giver m frihedsgrader til at opfylde m betingelser. Specielt vil man, hvis $m = n-1$, kunne få alle led elimineret på nær eksempelvis det første og sidste. Ligningen i y bliver således en ren ligning på formen

$$y^n + c_0 = 0,$$

og kan derved åbenlyst løses algebraisk. Sættes $y = \sqrt[n]{-c_0}$ ind i (15) fås en løsning til den oprindelige n'tegradsligning (14), ved at løse en ligning af grad $m = n-1$:

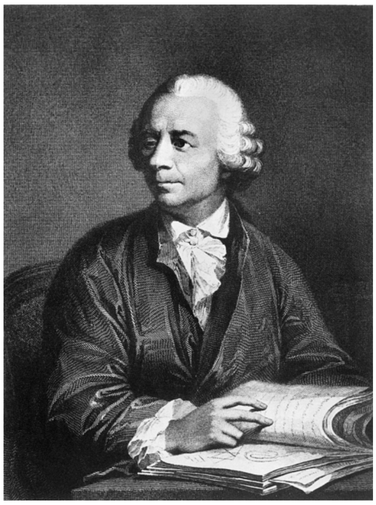
$$x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0 = \sqrt[n]{-c_0}.$$

[8] *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione.*

Ved hjælp af induktion efter graden følger det, at ligninger af enhver grad kan løses ved radikaler [33].

Der er imidlertid et problem ved metoden, og det er, at for at få alle koefficienterne $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ til at »gå ud« skal man løse et system af ligninger af forskellig grad i parametrene b_i, og dette system kan være særdeles svært at løse. Faktisk svarer det til at løse en enkelt ligning af grad $(n-1)!$, og umiddelbart virker metoden altså ikke for $n > 3$, undtagen hvis ligningen af grad $(n-1)!$ har karakteristika som gør, at den kan reduceres til ligninger af grad mindre end n [33]. Dette viser sig at være tilfældet for $n = 4$, hvor den resulterende sjettegradsligning kan faktoriseres til et produkt af faktorer af grad 2, hvis koefficienter er løsninger til tredjegradsligninger. For $n \geq 5$ findes der ingen sådan åbenbar simplifikation.[9]

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651–1708)



Leonhard Euler (1707–1783)

Den svenske matematiker Erland Samuel Bring (1736–1798) udviklede ligeledes en metode til løsning af femtegradsligningen og viste i denne forbindelse, at enhver femtegradsligning kan transformeres til $y^5 + d_1 y + d_0$. Vi vil imidlertid ikke komme nærmere ind på metoden her, bortset fra blot at nævne at den er et ikke-trivielt specialtilfælde af Tschirnhaus' transformation. Brings transformation blev genopdaget og generaliseret uafhængigt af englænderen George Birch Jerrard (1804–1863) i årene 1832–1835. For en videre diskussion af Tschirnhaus', Brings og Jerrards metoder se f.eks. [3].

4.2 Kommentarer til Eulers og Bézouts metoder

Også Leonhard Euler (1707–1783) foreslog en eliminationsmetode, som er meget lig den af Tschirnhaus [26]. Af denne grund vil den have de samme problemer som Tschirnhaus' metode, hvilket Lagrange da også påpeger i sin gennemgang af metoderne. Euler bragte i sit betydningsfulde værk *Vollständige Anleitung zur Algebra* [14] (som udkom på tysk i 1770) imidlertid også en modifikation af Cardanos metode til løsning af tredjegradsligningen samt en ny metode til løsning af fjerdegradsligningen.

[9] For sammensatte tal n kan Tschirnhaus' metode anvendes på anden (og formentlig nemmere) vis. I f.eks. tilfældet $n = 4$ kan man ved at eliminere y- og y^3-leddet opnå en andengradsligning i y^2.

Étienne Bézout (1730–1783) skrev i 1764 en artikel, *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues*, som er speciel interessant, da han som den første matematiker her foreslår en eksplicit brug af enhedsrødder til løsning af ligninger af grad op til og med fire [33]. Bézout var bekendt med de tidligere metoder af Tschirnhaus og Euler, og hans metode trækker da også en hel del på Tschirnhaus'. Men Bézout var også bekendt med problemet omhandlende den resulterende ligning af grad $(n-1)!$ i Tschirnhaus' metode, og rent faktisk var han den første der viste at det forholdt sig sådan. Bézout vurderede dog stadig, ligesom Tschirnhaus gjorde det om sin, at hans metode ville virke for polynomier af grad større end fire [33]. Men Lagrange viser i sin store afhandling fra 1771 at og hvorfor det ikke forholder sig sådan.

En ting som ved gennemgangen af de ca. 200 år fra 1545 til 1770 er påfaldende, er måden, hvorved matematikerne forsøgte at komme frem til de rigtige løsninger på deres problemer. Hele tiden forsøgte de at opnå større generalitet ved at ændre blot en lille smule på de allerede etablerede metoder. Også i dette aspekt synes periodens matematikere påvirket af tidens alkymistiske tankegang. På samme måde som alkymisterne forsøgte at lave guld ved hele tiden at blande forskellige metaller på forskellig vis, forsøgte disse matematikere at bestemme rødder udfra forskellige kombinationer af ligningernes koefficienter: Ved at »rafle« tilstrækkeligt længe med koefficienterne, kan man håbe på at være heldig, at »slå« netop den kombination som fører til en afsløring af rødderne. Parallellen med alkymien bliver således dobbelt; (1) den faste tro på, at alt kunne opnås og afdækkes ved systematisk at kombinere forskellige »ingredienser« på forskellig vis, og (2) den indædte søgen efter det uopnåelige (guld, henholdsvis algebraiske løsningsformler for den generelle n'tegradsligning), en søgen som måske i længden, med kombinatorikkens grundlægning, skulle vise sig at give langt mere værdifulde resultater end de oprindeligt søgte.

Den alkymistiske tankegang som herskede i vores del af Europa er noget helt specielt i den forstand, at den ikke var udbredt i andre dele af verden. Rusland, for eksempel, var slet ikke præget af denne tanke [1]. Som nævnt synes Tschirnhaus især påvirket af den alkymistiske tanke ikke mindst grundet hans arbejde med fremstilling af porcelæn, men også Cardano og Viète synes under denne påvirkning, hvilket underbygges bl.a. af Cardanos interesse for astrologi og Viètes arbejde med kodebrydning og kryptering.

5 En mere analytisk tilgang

Årene 1770–1771 blev skelsættende i ligningsløsningsteoriens historie. Her blev der nemlig offentliggjort tre[10] betydelige afhandlinger alle viet til ligningsløsningsteorien. Afhandlingerne blev præsenteret ved akademierne i London, Paris og Berlin af henholdsvis Waring, Vandermonde og Lagrange [30]. Hver af disse afhandlinger indeholder vigtige bidrag til teorien om løsningen af ligninger, og samtidig benytter forfatterne sig her af nye metoder og angrebsvinkler, hvori der indgår såvel symmetribetragtninger som permutationer.

[10] Faktisk er der tale om fire, idet Gianfrancesco Malfatti (1731–1807) også offentliggjorde sin afhandling *De aequationibus quadratocubicis dissertatio analytica* ved akademiet i Siena, Italien, i 1771.

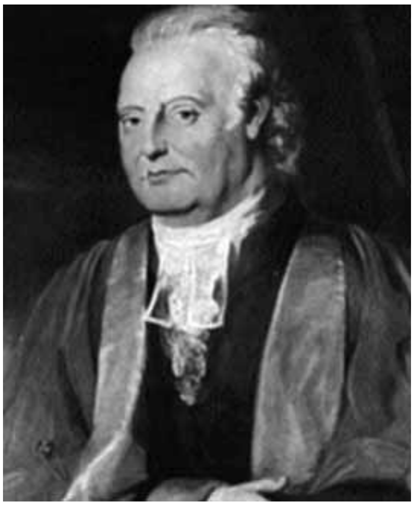
Betegnelsen *resolvent* bruges ofte som et synonym for en hjælpeligning, men en resolvent er ikke altid til »hjælp«, idet resolventen kan være et udtryk, som har større grad end den oprindelige ligning. Vi vil i det følgende bruge resolventen i denne bredere betydning og bringer derfor her et par definitioner.

Definition 6 *En ligning, hvis rødder er samtlige permutationer af et udtryk i rødderne* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *af den oprindelige ligning, kaldes en* resolvent.

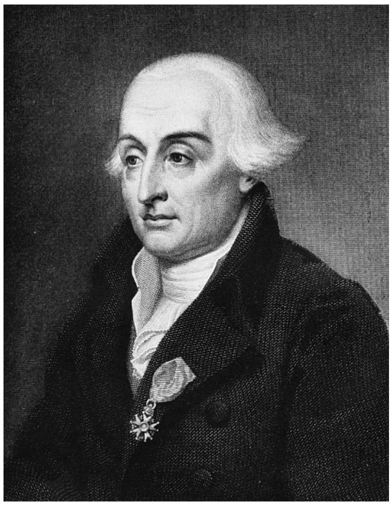
Definition 7 *Med en* Lagrange-resolvent *forstås udtryk af formen*

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{n-1} x_n,$$

hvor ω *er en primitiv* n*'te enhedsrod.*



Edward Waring (1734–1798)



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

5.1 Warings hovedsætning

Edward Waring (1734–1798) bringer sin hovedsætning for symmetriske polynomier i sit værk *Meditationes Algebraicæ* [39], der udkom i forskellige udgaver i årene 1762–1782. Warings arbejde er omfattende, og han går – i forhold til n'tegradsligningens løsbarhed – ud af mange tangenter undervejs. Det for nærværende gennemgang essentielle i Warings arbejde er hans dybdegående (og utrættelige) behandling af symmetriske rationale funktioner. Det er også her vi finder, hvad der i dag anses for værende Warings umiddelbart vigtigste bedrift indenfor algebraen, nemlig det at han som den første viser hovedsætningen for symmetriske polynomier samt en noget omstændelig metode til at udtrykke et symmetrisk polynomium ved de elementære symmetriske polynomier [33].

Allerede i 1762-udgaven af sit værk havde Waring vist, at alle rationale symmetriske funktioner af rødderne i den generelle n'tegradsligning kan udtrykkes som rationale funktioner af koefficienterne i ligningen [34]. Dette gør han ved først at udlede en direkte formel til at udtrykke potenssummerne

$$r_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$$

i koefficienterne til den n'tegradsligning som $x_1, \ldots, x_n$ er rødder i. Dernæst ser han på funktioner af formen

$$x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots + x_1^\beta x_2^\alpha x_3^\gamma \ldots + \ldots,$$

hvor $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \geq 0$, og hvert led i ovenstående udtryk opnås ved en permutation af eksponenterne fra et af de andre led. Han viser, at disse er repræsentanter for alle rationale symmetriske polynomier og kan udtrykkes som en funktion af potenssummer, hvis koefficienter er heltal. Således har Waring vist, at alle symmetriske rationale funktioner i $x_1, \ldots, x_n$ kan udtrykkes i de elementære symmetriske polynomier til den oprindelige ligning, det vil sige koefficienterne i denne.

I 1770 kom så det, der senere er blevet kendt som Warings hovedsætning for symmetriske polynomier.

Sætning 1 (Hovedsætning for symmetriske polynomier) *Et polynomium i de n ubekendte $x_1, \ldots, x_n$ over et legeme, kan udtrykkes som et polynomium i $s_1, \ldots, s_n$ (de elementære symmetriske polynomier i $x_1, \ldots, x_n$) hvis og kun hvis det er symmetrisk.*

Vi vil ikke gennemgå beviset for sætningen her, men en fyldig gennemgang kan findes i [33]. Warings eget bevis er lige som meget andet af hans arbejde noget usystematisk opbygget og ikke altid let at finde den røde tråd i. Ydermere led hans originale udgaver, som var skrevet på latin, under mange trykfejl og deslige [39]. Dette kan være nogle af grundene til, at Warings arbejde aldrig blev genstand for den store opmærksomhed og dermed heller ikke havde den store indflydelse på den videre udvikling af algebraen i resten af Europa.

5.2 Vandermondes betragtninger

Også Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) viste hovedsætningen for symmetriske polynomier i sin afhandling *Sur la résolution des équations* [35] fra 1770. Vandermondes afhandling omhandler dog primært hans metode, hvis mål han sammenfatter i følgende tre hovedpunkter:

1. Find den funktion af rødderne, om hvilken det kan siges, at den er lig med hver af disse rødder i overensstemmelse med den mening som funktionen er givet.

2. Bring denne funktion på en form, således at den ikke ændrer sig, når rødderne ombyttes.

3. Udtryk denne funktion som en funktion af de elementære symmetriske funktioner af rødderne.

Vandermonde tager udgangspunkt i de til anden- og tredjegradsligningen kendte løsninger. Han behandler således andengradsligningen

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - s_1 x + s_2 = 0, \tag{16}$$

hvor s_1 og s_2 er de elementære symmetriske polynomier i rødderne. Han opskriver løsningen til andengradsligningen på formen

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}\right) \tag{17}$$

og viser tilmed, at dette udtryk indsat i (16) giver nul. Bemærk at de to rødder fremkommer ved at lade kvadratroden være henholdsvis positiv og negativ. Dernæst omskriver han denne til

$$\frac{1}{2}\left(s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}\right), \tag{18}$$

og får således en løsningsformel indeholdende udelukkende udtryk i de elementære symmetriske polynomier i rødderne.

I andengradsligningens tilfælde opfylder (17) det første hovedpunkt, da dennes løsning er en funktion af x_1 og x_2, som er lig værdierne x_1 eller x_2 afhængig af kvadratrodens fortegn. Andet hovedpunkt er ligeledes opfyldt da (17) ikke ændres, når x_1 og x_2 ombyttes. Tredje hovedpunkt kræver en evaluering af (17) i termer af s_1 og s_2, man får

$$x_1 + x_2 = s_1 \text{ og } (x_1 - x_2)^2 = s_1^2 - 4s_2$$

og opnår således (18).

Nu udsætter han tredjegradsligningen for en lignende behandling, men da denne minder meget om Lagranges (se artiklens del 2), vil vi ikke give en gennemgang her. Vi vil blot se på hans resultater i forhold til hovedpunkterne. Som den funktion der skal opfylde hovedpunkterne foreslår han udtrykket

$$\frac{1}{3}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{(x_1 + \omega_1 x_2 + \omega_2 x_3)^3} + \sqrt[3]{(x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_1 x_3)^3}\right), \tag{19}$$

hvor ω_i her er en primitiv tredje enhedsrod. Funktionen i (19) er et udtryk i rødderne x_1, x_2 og x_3, og den antager værdierne x_1, x_2 og x_3, hvilket opfylder første hovedpunkt. Hvis udtrykkene indenfor kubikrødderne ganges ud, fås udtryk der består af led som er forskellige produkter af rødderne samt enhedsrødderne. F.eks. er den første kubikrod i (19) lig

$$\begin{aligned}\big(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3\omega_1(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1)\\ + 3\omega_2(x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2)\big)^{1/3}.\end{aligned} \tag{20}$$

Den anden kubikrod i (19) er lig det udtryk, der fremkommer, når der i (20) byttes om på ω_1 og ω_2. Med kendskab til disse udtryk ses det, at (19) er symmetrisk i rødderne og dermed også opfylder andet hovedpunkt. Angående tredje hovedpunkt påpeger Vandermonde, at dette er let at opfylde, omend han indfører en ny notation for symmetriske udtryk til formålet.

Han indser herefter, at de funktioner som opfylder andet hovedpunkt, det vil sige ikke ændrer sine værdier ved en permutation af rødderne, må være funktioner af de symmetriske udtryk. Nu går problemet ud på at vise, at symmetriske udtryk altid kan skrives som funktioner af de elementære symmetriske polynomier. Dette er det samme problem som Waring med sin hovedsætning løser [40].

På baggrund af sine observationer for anden- og tredjegradsligningen foreslår Vandermonde en lignende funktion for den generelle n'tegradsligning

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)+\frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1 x_1+\ldots+\omega_n x_n)^n}+\frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1^2 x_1+\ldots+\omega_n^2 x_n)^n} +\ldots+\frac{1}{n}\sqrt[n]{(\omega_1^{n-1} x_1+\ldots+\omega_n^{n-1} x_n)^n},$$

hvor $\omega_1,\ldots,\omega_n$ er n'te enhedsrødder. Funktionen for tredjegradsligningen har ovenstående form, men også i andengradsligningens tilfælde er løsningsformlen på ovenstående form. Vandermondes observation for andengradsligningen er jo således, at en rod til denne kan skrives på formen

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{(1\cdot x_1-1\cdot x_2)^2}\right),$$

hvor $\omega_1=1$ og $\omega_2=-1$.

Vandermondes arbejde bærer præg af en dybere indsigt end Warings, og han finder ligesom Lagrange (se artiklens del 2) på at benytte sig af hjælpeligninger (resolvente). Vandermonde ser også på permutationer baseret på studiet af symmetriske funktioner og det faktum, at disse kan udtrykkes ved de elementære symmetriske funktioner. Han må således formodes enten at have kendt til Warings arbejde fra 1762, eller have vist samme resultat uafhængigt af Waring. Det mest bemærkelsesværdige ved Vandermondes studier af disse permutationer er dog, at han introducerer, hvad der i dag svarer til cykliske permutationer (se definition i artiklens del 2). Hans introduktion til permutationerne er dog ganske omstændelig og ikke nær så klart formuleret som den af Lagrange. Alligevel skal hans idéer og arbejder på dette felt senere have spillet en vigtig rolle i udviklingen af permutationsteorien [25].

Litteratur

[1] *The Great Soviet Encyclopedia*, Udkommet i 31 bind i oversættelse fra russisk. Macmillian, Inc. New York, 1970–1979/1973–1982.

[2] *Dictionary of Scientific Biography*, Udkommet i 18 bind. Charles Scribner's Sons, New York, 1970–1980.

[3] Victor S. Adamchik and David J. Jeffrey, *Polynomial Transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard*, ACM SIGSAM Bulletin **37** (2003), no. 3, 90–94.

[4] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, and M. A. Lavrent'ev, *Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning,* i oversættelse fra russisk, The M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 1956/1969.

[5] Kirsti Andersen, Inge Andersen, Kirsten Garm, Klaus Holth, Ivan Tafteberg Jakobsen, and Lars Mejlbo, *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*, Forlaget Trip, Vejle, 1986, Editor: Kirsti Andersen.

[6] Raymond G. Ayoub, *Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic*, Archive for History of Exact Sciences **23** (1980), 253–277.

[7] David Heiberg Backchi, Uffe Thomas Volmer Jankvist, and Neslihan Sağlanmak, *Algebraisk ligningsløsning fra Cardano til Cauchy – et studie af kombinationers, permutationers samt invariansbegrebets betydning for den algebraiske ligningsløsning* før *Gauss, Abel og Galois*, Tekster fra IMFUFA nummer 409, 2002.

[8] F. L. Bauer, *Decrypted Secrets – Methods and Maxims of Cryptology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.

[9] Heinrich Burkhardt, *Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini*, Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik **38** (1892), 119–159.

[10] Girolamo Cardano, *Artis Magnæ Sive De Regulis Algebraicis,* i engelsk oversættelse*, Ars Magna or the Rules of Great Art,* af T. Richard Witmer fra 1968, Dover Publications, Inc., New York, 1545/1968.

[11] A. L. Cauchy, *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une function peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*, Journal de l'Ecole Polytechnique **10** (1815), 1–28.

[12] Edgar Dehn, *Algebraic Equations – An Introduction to the Theories of Lagrange and Galois*, Dover Publications, Inc., New York, 1960.

[13] Jean Dieudonné, *Mathematics – The Music of Reason,* oversat fra fransk af H.G. og J.C. Dales, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987/1992.

[14] Leonhard Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra,* i engelsk oversættelse*, Elements of Algebra,* af John Hewlett fra 1840, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1770/1972.

[15] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae,* i engelsk oversættelse af Arthur A. Clarke fra 1966, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1801/1966.

[16] Marshall Hall, Jr., *The Theory of Groups*, Chelsea Publishing Company, New York, 1976.

[17] Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces – A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer Verlag New York Inc., 2002.

[18] B. Melvin Kiernan, *The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Sciences **8** (1971), 40–154.

[19] Morris Kline, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[20] Georg Simon Klügel, *Mathematisches Wörterbuch,* 1. Abtheilung, Die reine Mathematik, 1. Theil von A bis D, Leipzig, 1803.

[21] Rudolf Kochendörffer, *Introduction to Algebra*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972.

[22] Manfred Kracht and Erwin Kreyszig, *E. W. von Tschirnhaus: His Role in Early Calculus and His Work and Impact on Algebra*, Historia Mathematica **17** (1990), 16–35.

[23] Joseph-Louis Lagrange, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* i *œuvres de Lagrange Tome III* 1867–1892, Gauthier-Villars, Paris, 1770–1771, Editor: J.-A. Serret.

[24] ———, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris, 1808.

[25] Luboš Nový, *Origins of Modern Algebra*, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1973.

[26] Julius Petersen, *De algebraiske Ligningers Theori*, Andr. Fred. Høst & Søns Forlag, Kjøbenhavn, 1877.

[27] J. Pierpont, *Lagrange and His Place in The Theory of Substitutions*, Bulletin of the American Mathematical Society **2** (1895), 196–204.

[28] ———, *On the Ruffini-Abelian Theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society **2** (1896), 200–221.

[29] Paolo Ruffini, *Opere matematiche di Paolo Ruffini – tomo primo*, Tipografia Matematica di Palermo, 1799/1915, Editor: Ettore Bortolotti.

[30] Christian Skau, *Gjensyn med Abels og Ruffinis bevis for umuligheten av å løse den generelle n'tegradsligningen algebraisk når* $n \geq 5$, Normat **38** (1990), 53–84.

[31] Ian Stewart, *Galois Theory* Second Edition, Chapman and Hall, London, New York, 1989.

[32] Henrik Kragh Sørensen, *Niels Henrik Abel and the theory of equations*, History of Science Department, University of Århus, Denmark, 1999.

[33] Jean-Pierre Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations* i oversættelse fra fransk, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1980/1988.

[34] B. L. van der Waerden, *A History of Algebra – From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.

[35] N. Vandermonde, *Sur la résolution des équations,* i tysk oversættelse*, Abhandlungen aus der reinen Mathematik,* af Carl Itzigsohn fra 1888, Berlin Verlag von Julius Springer, 1770/1888.

[36] V.S. Varadarajan, *Algebra in Ancient and Modern Times*, American Mathematical Society and Hindustan Book Agency, 1998.

[37] François Viète, *In Artem Analyticem Isagoge,* i tysk oversættelse*, Einführung in die Neue Algebra,* af Karin Reich og Helmuth Gericke fra 1973, Werner Fritsch, München, 1591/1973.

[38] ———, *In Artem Analyticem Isagoge,* i engelsk oversættelse*, The Analytic Art,* af T. Richard Witmer fra 1983, The Kent State University Press, Ohio, 1615/1983.

[39] Edward Waring, *Meditationes Algebraicæ,* i engelsk oversættelse af Dennis Weeks fra 1991, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1782/1991.

[40] Hans Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

[41] Hans Wussing and Wolfgang Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1975.

Redaksjonen takker følgende for portrettene brukt i artikkelen: Institut Mittag-Leffler (Cardano, Euler, Lagrange, Viète), Matematisk institutt, Universitetet i Oslo (Abel), The MacTutor History of Mathematics archive, University of St. Andrews (Galois, Ruffini, Tschirnhaus, Waring).