Begreppet funktion i historisk belysning

Johan Häggström

Institutionen för pedagogik och didaktik
Göteborgs universitet
Box 300
SE–405 30 Göteborg
johan.haggstrom@ped.gu.se

Funktionsbegreppet är ett av de viktigaste och mest använda begreppen, inte bara inom matematiken. Funktioner används i stort sett i alla vetenskaper och har haft en mycket stor betydelse för de senaste seklernas oerhörda framsteg, inte minst inom de naturvetenskapliga och tekniska områdena. Med tanke på den centrala roll som funktionsbegreppet spelat i matematiken och den vidsträckta användning det haft borde väl innebörden vara precist och entydigt formulerad? En snabb titt i några olika läromedel och i begreppshistorien visar att så inte är fallet. Det finns ett stort antal olika sätt att definiera begreppet funktion. I artikeln ges exempel på den variation som finns i framställningen i läromedel och i hur begreppet uppfattats och använts i ett historiskt perspektiv.

Nedslag i läromedel

I läromedel för grundskolan görs sällan ens informella definitioner av begreppet funktion. Istället använder man ofta något eller några exempel för att illustrera betydelsen. Koordinatsystem och diagram tas ofta upp i anslutning till funktioner. Det är, som i citatet nedan, vanligt att man i framställningen använder uttryck som *samband*, *beror på* och liknande.

> Hur stor omkrets har en uppblåst ballong? Det beror förstås på hur mycket luft man har blåst in i den. Om man mäter omkretsen efter t ex vart 5:e pumptag kan man visa sambandet mellan antalet pumptag och omkretsen i ett diagram. [. . .] Ballongens omkrets är en *funktion* av antalet pumptag. Kurvan du ritat i diagrammet kallas *funktionens graf.* (Skoogh m fl., 1996, sid.8)

I läromedel för gymnasieskolan används också beskrivningar av mer eller mindre välbekanta situationer som utgångspunkt. Det är också vanligt att man använder flera olika representationsformer för att beskriva funktionsbegreppet och att informella definitioner formuleras.

> Eftersom vi vet att tågets fart är 120 km/h kan vi räkna ut hur långt tåget hinner köra på en viss tid:
>
> $$\text{sträckan} = 120\,\text{km/h} \cdot \text{tiden}$$
>
> [...]
> Om vi betecknar sträckan med s (km) och tiden med t (h), så kan vi skriva
>
> $$s = 120 \cdot t$$
>
> Denna formel anger hur körsträckan för ett tåg beror av tiden, om tåget färdas med farten 120 km/h. Vi säger att formeln beskriver sträckan s som en *funktion* av tiden t.
> [...]
> En funktion är en regel, som beskriver hur värdet av en variabel bestäms med hjälp av värdet av en annan variabel. (Andersson, 1996, sid. 310)

> En regel som till varje tillåtet x-värde ger exakt ett y-värde kallas en *funktion*. Vi säger då att y är en *funktion* av x. (Björk m fl., 1992, sid.55)

I gymnasielitteraturen finns ett ofta uttalat krav att den beroende variabeln skall kunna beräknas enligt en bestämd regel och att denna beräkningsföreskrift *är* själva funktionen. Det illustreras i vissa fall med en s.k. *funktionsmaskin* där ett tal från definitionsmängden kan matas in i ena änden och ut ur andra änden kommer resultatet. Detta är en väldigt dynamisk framställning av funktionsbegreppet. Även i läromedel för högskolan kan man finna en liknade dynamik i användningen av termen *regel*, som då ses som att man utgår från den oberoende variabeln och därefter beräknar funktionsvärdet (skrivningar som "från A till B" antyder en sådan "rörelse").

> Låt A och B vara två icke tomma mängder. En funktion f från A till B är en regel som till varje element x i A ordnar exakt ett element i B. Detta senare element kallas bilden av x genom f och skrivs $f(x)$. (Vretblad, 1995, sid. 54)

Det kanske mest spridda läromedlet i analys definierar funktionen på ett liknande sätt.

> A **function** f on a set D into a set S is a rule that assigns a *unique* element $f(x)$ in S to each element x in D. (Adams, 1999, sid. 26)

En viktig skillnad mellan definitionerna i litteratur för gymnasiet och för högskolan är att man i de senare har generaliserat variablerna från att vara "talvärden" till att vara "element", samt att begreppet regel inte längre är begränsat till att vara en beräkningsföreskrift.

Ytterligare en variant är att utgå ifrån begreppet *relation* i definitionen.

> En funktion $f\colon A \to B$ är en relation från A till B sådan att
>
> (1) För varje $a \in A$ finns ett $b \in B$ sådant att $a\ f\ b$,

> (2) Om $a\ f\ b_1$ och $a\ f\ b_2$, så gäller $b_1 = b_2$,
>
> I stället för $a\ f\ b$ skriver man i detta fall normalt $b = f(a)$. (Vretblad, 1995, sid. 62)

I det kanske mest spridda matematiklexikonet i Sverige används termen *avbildning*. Under uppslagsordet funktion hittar man följande,

> **funktion.** En avbildning från X till Y, där Y är en talmängd, t ex $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. En funktion f från X till Y skrivs $f\colon X \to Y$. Den definieras genom $x \mapsto f(x)$, där $f(x)$ kallas funktionsvärdet till x. Det bör nämnas att funktion ibland används synonymt med avbildning. (Thompson, 1991b, sid. 131)

Noteras bör att i denna definition talas endast om *talmängder*. Det innebär en begränsning i hur funktionen kan tillämpas. Mängderna X och Y måste enligt den här definitionen innehålla tal och därmed utesluts en höjning av abstraktionsnivån till att omfatta exempelvis funktioner av funktioner, dvs. att en funktion kan beskriva en avbildning mellan mängder av funktioner. I definitionen från *Matematikterminologi i skolan*, en skrift från Skolöverstyrelsen, talas det däremot om element istället för tal och mängderna är således inte begränsade till mängder av tal. Här är alltså funktionsbegreppet i den meningen mer generellt än i definitionen ovan. Dessutom framhäver terminologin från mängdläran funktionsbegreppet som en statisk struktur snarare än som en procedur eller operation.

> Om varje element i en mängd A entydigt tillordnas ett element i en mängd B säger man att man har en **funktion** från A till B. Om funktionen betecknas f, betecknas det element i B som är tillordnat x i A, med $f(x)$. [. . .] $f(a)$ kallas **funktionsvärdet** för $x = a$. A kallas **definitionsmängd** och kan betecknas D_f. Mängden av funktionsvärden $f(x)$ kallas **värdemängd** och kan betecknas V_f. (Skolöverstyrelsen, 1979, sid. 96)

Redan dessa spridda nedslag i litteraturen ger vid handen att funktionsbegreppet kan beskrivas och definieras på många olika sätt. Hur olika författare väljer att uttrycka sig har naturligtvis att göra med tänkt målgrupp. I definitionerna förekommer termer som *Samband*, *Avbildning*, *Regel*, *Relation* och *Entydig tillordning* för att beskriva innebörden i funktionsbegreppet. Dessa är relativt moderna termer och funktionsbegreppet kan rimligtvis inte alltid ha hanterats eller uppfattas på dessa vis. Det är snarare så att de här definitionerna är resultatet av en lång utveckling. Det krävs också en hel del förförståelse av en läsare för att kunna tolka definitionerna.

Nedslag i begreppshistorien

Många matematiska begrepp, metoder och idéer har genomgått en lång och ofta krokig utveckling. Det gäller inte minst begreppet funktion. Hur många människor som på olika sätt bidragit till dess framväxt, hur många olika blindspår man varit inne på, hur många goda idéer som inte fått någon spridning och glömts bort (och som därmed kanske måste återfinnas och utvecklas på nytt) osv är förstås omöjligt att säga. Varje beskrivning av hur begreppet funktion utvecklats genom historien måste därför med nödvändighet bli förenklad och översiktlig.

Redan i den sumeriska kulturen finns spår av vad man skulle kunna uppfatta som ett mer intuitivt funktionsbegrepp i form av tabeller skrivna med kilskrift på brända lertavlor. Sumererna hade tabeller över inverterade tal, kvadratrötter mm. En sådan tabell kan ses som en funktion där relationen mellan tal i två mängder är entydigt beskriven. Sumererna har också lämnat efter sig astronomiska tabeller där olika fenomen på himlen, t ex månens positioner, beskrivs som en funktion av tiden.

I den antika grekiska kulturen fanns också idén om beroende storheter. Ett exempel är Ptolemaios (grekisk astronom verksam i Alexandria på 100-talet, författare till *Almagest*, vilken behandlar den geocentriska världsbilden), som inte bara använde tabeller utan också gav beskrivningar av hur man kan räkna fram ”funktionsvärdet” för ett givet värde på den ”oberoende variabeln”. Katz (1993) menar att det är uppenbart att Ptolemaios var helt införstådd med ett modernt funktionsbegrepp, även om han inte använde ett modernt symbolspråk. Det verkar som att de procedurer som används tas för givna av Ptolemaios och Katz drar därför slutsatsen att dessa procedurer och metoder måste ha varit väl bekanta för hans läsare och antagligen använts av astronomer långt före hans tid.

Utvecklingen mot ett mer explicit funktionsbegrepp tar fart i Europa i slutet av 1500-talet. Vid den tiden tar algebran och symbolspråket ett kvalitativt viktigt steg framåt, vilket gör det möjligt att använda bokstäver som symboler för variabler och att skriva allt mer kompakta formler. Fram till den här tiden hade algebra i stort handlat om ekvationslösning. Bokstäver användes före 1500-talet endast som symboler för *obekanta tal*. François Viète (1540–1603) anses vara den som först börjar använda bokstäver också för att beteckna *givna* eller *kända tal*. Bokstäverna i uttryck kunde nu tolkas som variabler, symboler som samtidigt betecknar ett stort antal olika tal. Det blev möjligt att uttrycka generella, icke-numeriska lösningar på olika problem. Den nya rollen hos bokstäverna var nödvändig för att den matematiska formeln skulle bli möjlig.

På 1600-talet hamnade studiet av rörelse i fokus hos flera vetenskapsmän, bl a Galileo Galilei (1564–1642) och Johannes Kepler (1571–1630). Pendelrörelse, fallrörelse och planetrörelse studerades intensivt. Galilei studerade t ex pendlars rörelse och fallrörelsen. Han gjorde bland annat experiment med kulor som rullade i rännor. Kepler intresserade sig för planetrörelse. Med hjälp av Tycho Brahes observationer kunde han formulera sina lagar över hur planeterna rör sig, de s k *Keplers lagar*. De säger bland annat att planetbanorna är ellipser med solen i ena brännpunkten. Morris Kline (1979) menar att Galileo Galilei spelade en speciellt betydande roll i utvecklingen av funktionsbegreppet i och med att han överger den, ända från antiken förhärskande, uppfattningen att vetenskapen ska försöka *avslöja syftet* med olika naturfenomen och ersätter den med att kvantitativt försöka *beskriva* fenomenen.

> It was Galileo’s decision to seek the mathematical formulas that describe nature’s behaviour. This thought, like most thoughts of genius, may leave the reader unimpressed on first contact. There seems to be no real value in these bare mathematical formulas. They explain nothing. They simply *describe* in precise language. Yet such formulas have proved to be the most valuable knowledge man has ever acquired about nature.
> (Kline, 1979, sid. 216)

Fram till Galilei formulerades de samband och regelbundenheter, som upptäcktes, i första hand med det naturliga språket. I motsats till Kline (se ovan) menar dock Katz (1993) att Galilei föredrog att uttrycka sig i geometriska termer snarare än algebraiska. Redan ett par hundra år tidigare hade den franske matematikern Nicole Oresme (1320–1382) utvecklat en metod, att med hjälp av en kurva, beskriva sambandet mellan hastighet och tid. Denna teknik dyker nu upp igen och kopplas ihop med idén att beskriva rörelse, som sambandet mellan varierande storheter uttryckt med hjälp av formler. René Descartes (1596–1650) och Pierre de Fermat (1601–1665) utvecklar nästan samtidigt koordinatsystemet och börjar använda ekvationer för att representera kurvor. I slutet av 1600-talet finns alltså flera olika sätt att beskriva funktionssamband – naturligt språk, tabeller, grafer och formler – samt möjligheter att göra ”översättningar” mellan dem.

När det gäller den fortsatta utvecklingen mot ett modernt funktionsbegrepp kan insatserna av Isaac Newton (1643–1727) och Gottfrid Wilhelm Leibniz (1646–1716) knappast övervärderas. Vem som egentligen var först med att utveckla infinitesimalkalkylen, början på analysen som en egen gren inom matematiken, har tidvis debatterats livligt. De grundläggande idéerna utvecklade de troligtvis först oberoende av varandra. Senare kom de också att via brev diskutera sina teorier. De använde olika benämningar och symboler i sina arbeten. De av Leibniz utvecklade symbolerna visade sig vara mer livskraftiga och många av dem som fortfarande används kommer från honom. Leibniz var också den som introducerade benämningen funktion, för ett samband mellan olika sträckor som beskriver punkter på en kurva, t ex sambandet mellan abskissa och ordinata (Vilenkin, 1995). Både Newton och Leibniz försökte lösa problem som handlade om ett speciellt fenomen, nämligen den momentana förändringshastigheten hos varierande storheter. Behovet att kunna hantera den momentana hastigheten (till skillnad från medelhastigheten) uppstår när ett föremål rör sig med varierande hastighet. För att matematiskt kunna hantera kroppar som faller, planeter som rör sig, pendel- och projektilrörelser etc. är det helt nödvändigt att kunna bestämma momentanhastigheten. Svårigheten ligger i att den momentana hastigheten inte kan beräknas på samma sätt som medelhastigheten. I ett viss ”fruset” ögonblick förflyttar sig föremålet sträckan noll under tiden noll (och att dividera dessa är ju meningslöst). Newton och Leibniz utvecklade metoder för att hantera kvoten mellan sträcka och tid när man studerar allt kortare tidsintervall och framför allt när tidsintervallet blir oändligt litet. I det här sammanhanget skapades s k *infinitesimaler*, oändligt små tal, som mått på t ex ett oändligt kort tidsintervall. Den allvarliga kritik från den irländske biskopen och filosofen George Berkeley (1685–1753), som riktades mot Newtons arbete, handlade just om det sätt på vilket Newton hanterade dessa infinitesimaler i sina kalkyler. Kritiken gick ut på att Newton omväxlande lät infinitesimalerna ibland vara mycket små tal, väldigt nära noll men *skilda* från noll och ibland *exakt lika* med noll. Berkeley hävdade att antingen är en infinitesimal lika med noll eller så är den inte lika med noll (Hall, 1970). Varken Newton eller Leibniz lyckades reda ut hur man först kan använda ett tal, som är skilt från noll, i olika beräkningar och sedan när man är klar sätta talet lika med noll. Infinitesimalkalkylen var visserligen fantastiskt framgångsrik i att beskriva rörelse, men den matematiskt logiska underbyggnaden lämnade mycket att önska. ”... nevertheless, mathematicians went on using infinitesimals for another century, and with great success. Indeed physicists and engineers have never stopped using them” (Davis & Hersh, 1990). Alla är dock inte överens om att Newton och Leibniz verkligen arbetade med funktioner. "The calculus of Newton and Leibniz was not cast in the mould of functions, but was rather an ingenious collection of problem-solving methods applicable to curves, which were paths generated by moving points" (Selden & Selden, 1992). Kanske kan man säga att Newton och Leibniz använde funktionsbegreppet på ett relativt intuitivt och informellt sätt när de sökte hantera svårigheterna med den momentana hastigheten.

Behovet att utvidga och precisera funktionsbegreppet utöver vad som kunde beskrivas algebraiskt med en formel blev tydligt i samband med ett berömt gräl mellan Leonhard Euler (1707–83), Jean d'Alembert (1717–83) och Daniel Bernoulli (1700–82) angående ett problem med vibrerande strängar. Två olika lösningar på problemet med att beskriva svängningen hos vibrerande strängar hade presenterats. Bernoulli hade en lösning uttryckt i en enda formel, medan d'Alemberts lösning innehöll flera formler. Kontroversen som bröt ut runt denna fråga handlade i grunden om funktionsbegreppet, kopplingen mellan funktionssamband och möjligheten att uttrycka dessa med hjälp av formler. Den ena ståndpunkten var att en funktion måste gå att formulera med *en* formel eller med *ett* uttryck.

> In Euler's time it was thought that a function must be expressed by means of a single formula, so a relation not so expressible was regarded as 'sewn together' from functions. For example, the relation
>
> $$y = \begin{cases} x, & \text{if } x < 0 \\ x^2, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$
>
> was thought to consist of two *different* functions. (Vilenkin, 1995, sid. 76)

Den definitiva upplösningen av oenigheten lät vänta på sig ända till i början av 1800-talet då den franske matematikern Joseph Fourier (1768–1830) visade att summan av trigonometriska funktioner kan uttryckas med olika formler över olika intervall (Vilenkin, 1995).

En av de första som mer explicit uttryckte innebörden i begreppet funktion var Jean Bernoulli (1667–1748), en av många framstående matematiker från den schweiziska familjen Bernoulli och far till Daniel. Hans definition från 1718 är vag och lyder enligt Boyer (1985, sid 462) "[a function is] a quantity composed in any manner of a variable and any constants". Innebörden av "composed in any manner" förklaras inte närmare, men troligen var tolkningen snävare då än den är idag (Selden & Selden, 1992). En funktion skulle kunna uttryckas i *en* formel med variabeln, konstanter och aritmetiska operationer så att funktionsvärdet kan beräknas för varje givet värde på variabeln.

Euler, som introducerar beteckningen $f(x)$ år 1734, definierar en funktion på ett liknande sätt. "I sin *Introductio* från 1748 skriver Euler att en funktion av en varierande storhet är *ett analytiskt uttryck*, som på något sätt är sammansatt av variabeln i fråga och tal eller konstanta storheter" (Thompson, 1991b. sid.131). Detta är den första av Eulers definitioner och innebörden i ett analytiskt uttryck är enligt Katz (1993) att en funktion måste gå att skriva med en formel. Euler generaliserar efter hand funktionsbegreppet och frigör det till slut från den symboliska tvångströjan. Redan år 1755 har han bytt ut sin ursprungliga definition mot en annan, "a quantity should be called a function only if it depends on another quantity in such a way that if the latter is changed, the former undergoes change itself” (Sfard, 1992, sid. 62). I den här definitionen finns inte längre kravet att en funktion ska vara uttryckt med symboler i en formel. I princip är varje samband där en storhet beror på en annan en funktion, helt oavsett hur vi beskriver det. En graf t ex, som beskriver ett samband mellan x och y-koordinater, kan representera en funktion även om sambandet inte är möjligt att uttrycka symboliskt med en formel. Vill man tänja betydelsen av den senaste definitionen, kan man hävda att det i själva verket inte har någon betydelse, om vi över huvud taget kan beskriva sambandet eller ej, bara det existerar så är det en funktion. Jag är tveksam till om Euler själv hade gått med på den tolkningen.

Fram till 1800-talet användes funktioner för att beskriva den fysikaliska verkligheten kvantitativt. De ledande fysikerna och matematikerna var i de flesta fall samma personer. Det var först under 1800-talet som intresset började vändas mot funktionerna i sig. Oklarheter, som huruvida infinitesimalerna är noll eller ej, måste redas ut. Euler och andra matematiker var säkert inte tillfreds med infinitesimalkalkylens vaga begrepp och icke-rigorösa uppbyggnad. Varje matematisk teori borde ha samma karaktär som den Euklidiska geometrin, där preciserade definitioner och stringenta bevis säkerställer resultaten. Den euklidiska myten var fortfarande förhärskande (Davis & Hersh, 1990). Den säger att den rigorösa framställningen av geometrin i Euklides *Elementa* beskriver eviga sanningar. Genom att utgå från uppenbart sanna påståenden kan man härleda ny kunskap som är sann, objektiv och universell. Troligen bortsåg man från bristerna hos infinitesimalkalkylen för att man intuitivt kände att den omfattade viktiga idéer även om man ännu inte riktigt kunde styrka allt på ett tillfredsställande sätt.

> Leonhard Euler [...] still believed that the calculus was unsound but gave correct results only because errors were offsetting each other. [...] It was a fortunate circumstance that mathematics and science were closely linked in the Newtonian era and that physical reasoning could guide mathematicians and keep them on the right track. [...] the calculus worked so well and to such great advantage that at times mathematicians willingly closed their minds to problem of rigor. (Kline, 1979, sid. 267)

När nu mer renodlade matematiker dök upp under 1800-talet och intresset vändes mot de matematiska objekten i sig, blev det tydligt att stora delar av matematiken vilade på osäker grund. Geometrin organiserades och presenterades på ett deduktivt sätt redan före Jesu födelse. Däremot saknades explicita grundvalar för aritmetiken och algebran. De naturliga talen och de positiva rationella talen (bråk) hade sedan länge accepterats utifrån erfarenheter av den fysikaliska omvärlden. De togs mer eller mindre för givna. Leopold Kronecker (1823–91) uttryckte det så här vid ett möte i Berlin 1886, ”Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenverk” (Gud skapade de hela talen, allt annat har människan hittat på) (Struik, 1966). Från de naturliga talen har sedan talområdet successivt utvidgats och räkneregler och räknelagar, som accepterats på mer eller mindre empirisk väg, har börjat tillämpats på de nya talen. Så länge de matematiska resultaten visade sig korrekta och funktionella vid tillämpning inom andra vetenskaper och verksamheter hölls eventuella tvivel tillbaka, men när matematiken själv började synas mer närgånget upptäcktes bristerna. I detta sammanhang genomgår funktionsbegreppet en fortsatt utveckling mot ett alltmer generellt, abstrakt begrepp och definitionerna blir allt mer inommatematiska. Det finns en strävan mot att göra innebörden av funktionsbegreppet oberoende av icke-matematiska begrepp.

Thompson (1991b) menar att det moderna funktionsbegreppet skapas av Lejeune Dirichlet (1805–59) år 1837 då han formulerar sin allmänna definition av en funktion.

> "if a variable y is so related to a variable x that whatever a numerical value is assigned to x there is a rule according to which a unique value of y is determined, then y is said to be a function of the independent variable x". (Sierpinska, 1992, sid 46)

Dirichlets definition innebär att det till varje värde på x finns ett unikt värde på y. Kieran (1996) menar att funktionsbegreppet därmed övergår från att vara en "beroenderelation" till ett godtyckligt samband (korrespondens) mellan reella tal. Sambandet behöver inte heller vara möjligt att beskriva med matematiska operationer. En hel del av "dynamiken" i de tidigare definitionerna har försvunnit. Anna Sfard har beskrivit hur olika matematiska begrepp genomgår en liknande historisk utveckling, från dynamiska procedurer till statiska strukturer (se t ex Sfard, 1991). Funktionsbegreppet tar med Dirichlets definition ett steg mot en mer strukturell innebörd, vilket gör det möjligt att betrakta en funktion som ett objekt i sig på vilket man kan operera.

> [...] to see the reason for such a general notion, not only must one have seen the uses of its particular examples; the need must be felt for statements on classes or spaces of functions. The conceptualisation of function has to go beyond the stage of "process" [...] the concept must become an object which the mind can manipulate as an element. (Sierpinska, 1992, sid 47)

Men i och med att funktionsbegreppet "matematiseras" allt mer avlägsnar det sig också från sitt ursprung och blir svårare att uppfatta. Å andra sidan så möjliggör en mer formell framställning att funktioner som länge var otänkbara, pga av att de svårligen kan tänkas ha någon motsvarighet i "verkligheten", nu kan betraktas som "vilken funktion som helst".

> [...] as soon as they regressed the notion of a function, mathematicians embarked on its thorough study. Then it turned out that many of the objects covered by the rigorous definition were most unlikely to have been studied by mathematicians of past centuries. For example, Dirichlet observed that the correspondence
>
> $$y = \begin{cases} 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \\ 1, & \text{if } x \text{ is rational} \end{cases}$$
>
> is a function. No 18^{th}-century mathematician would have studied such a correspondence. They only studied functions that described dependencies between physical or geometrical magnitudes. (Vilenkin, 1995, sid. 78)

Detta kan vara det första exemplet på en funktion som inte är given av ett eller flera "analytiska uttryck" eller som en kurva. Det är också en funktion som är diskontinuerlig överallt, men som ändå uppfyller villkoret på parbildning mellan element i två mängder.

Det sista steget i utvecklingen av funktionsbegreppet till en fullständigt stel, statisk struktur togs i början av 1900-talet drygt hundra år efter Dirichlet. Den i huvudsak franska gruppen av matematiker, som använde sig av pseudonymen

Nikolas Bourbaki, definierade en funktion som en relation mellan element i två mängder. Framställningen har stora likheter med den tidigare beskrivna statiska definitionen från *Matematikterminologi i skolan* (Skolöverstyrelsen, 1979), även om en mer dynamisk operation används i andra halvan av definitionen.

> In 1939, Bourbaki offered the following definition of function:
>
> Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a *functional relation* in y if, for all x in E, there exists a unique y in F which is in the given relation with x.
>
> We give the name of *function* to the operation which in this way associates with every element x in E the element y in F which is in the given relation x; y is said to be the *value* of the function at the element x, and the function is said to be *determined* by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the *same* function. (Kleiner, 1989, sid. 299)

En funktion kan så till slut betraktas som en mängd av ordnade par av element, en mängd som är ett objekt på vilket man kan utföra operationer av olika slag. Funktional- och differentialekvationer, där den obekanta är en funktion och inte ett tal, är exempel på hur funktioner kan betraktas och hanteras som egna objekt i mer sammansatta sammanhang. Funktionsbegreppets utveckling från en dynamisk operation eller beräkningsföreskrift till en statisk struktur eller ett objekt i sig är klar.

Att ge en fullständig beskrivning av hur funktionsbegreppet utvecklats är självfallet inte möjligt. Den fragmentariska framställningen ovan måste betraktas som ett försök till en översiktlig beskrivning, där några aspekter lyfts fram. Under hela utvecklingen av matematiken har olika begrepp vävs in i och växelverkat med varandra. När förståelsen av ett begrepp utvecklats eller klarnat har det i sin tur påverkat förståelsen av andra som i sin tur påverkat det första igen osv. I samband med utvecklingen av funktionsbegreppet är det många andra matematiska begrepp och idéer som har växelverkat. Ett exempel är begreppet tal, som i och med den s k symboliska abstraktionen (Thompson, 1991a) utvecklades från grekernas mer "konkreta" talbegrepp, där talet alltid är sammankopplat med en "enhet", till ett mer abstrakt begrepp. Det hänger samman med utvecklingen av det algebraiska symbolspråket, som starkt påverkade utvecklingen av funktionsbegreppet. Introduktionen av bokstäver, som beteckningar för givna eller kända tal, banade vägen för den matematiska formeln som gjorde det möjligt att symboliskt uttrycka funktioner. Detta i sin tur påverkade talbegreppet. Nya symboler bidrog till att man kunde tänka sig tal, som inte bara var frikopplade från enheter, utan dessutom kunde generaliseras till helt godtyckliga tal, tal vilka som helst. Man fick också symboler, som på en och samma gång representerade en hel klass av tal. Variabelbegreppets utveckling är nära kopplad till och har påverkat/påverkats av utvecklingen av symbolspråket och funktionsbegreppet.

Några avslutande reflektioner

Det är möjligt att betrakta den kollektivt-historiska utvecklingen av funktionsbegreppet ur många olika perspektiv. Jag har valt att lyfta fram tre aspekter som blivit synliga i beskrivningen ovan.

1. Från intuitiva idéer till exakta definitioner.

Thompson (1991b) menar att funktionsbegreppet har en stark intuitiv förankring i *kausalitetsprincipen*. Vår erfarenhet från omgivningen av att all verkan har en orsak leder till kausalitetsprincipen. Det intuitiva funktionsbegreppet uppstår i praktiska situationer som en dynamisk operation, som börjar med en orsak vilken något senare leder till en verkan. Denna innebörd uttrycks först på ett relativt informellt sätt, med stora inslag av vardagliga termer. Allteftersom blir formuleringarna mer och mer formaliserade för att slutligen hamna i formella definitioner, där exakthet och precision eftersträvas.

> The majority of mathematical concepts underwent a long period of development. They first arose as generalisations of intuitive ideas derived from everyday experience. With gradual elimination of details and accidental aspects, these intuitive ideas slowly crystallised into exact mathematical definitions. (Vilenkin, 1995, sid. 74)

2. Från dynamiska procedurer till statiska strukturer.

Den tidiga uppfattningen av funktionen, som en dynamisk operation eller procedur, utvecklas successivt till en uppfattning där funktionen framstår som en statisk struktur. Funktionen kan slutligen betraktas som ett eget objekt. Anna Sfard har i ett antal olika artiklar (se t ex Sfard, 1991, 1992) visat att den här utvecklingen är likartad för många matematiska begrepp och att den är nödvändig för att ett matematiskt begrepp ska kunna utgöra grund för en fortsatt utveckling. Det går inte att skapa nya procedurer ovanpå andra, tidigare procedurer hur långt som helst.

> [...] mathematics as a hierarchy in which what appears to be a process at one level must be transformed into a full fledged abstract object at a higher level to become a building block of more advanced mathematical constructs. (Sfard, 1992, sid. 94)

3. Från fysikaliska samband till abstrakt matematiskt begrepp.

En intressant aspekt av funktionsbegreppets utveckling är den tidiga kopplingen till experimentella studier av den fysiska verkligheten. Från början uppmärksammas inte funktionsbegreppet i sig, utan det används som ett redskap för att beskriva olika skeenden. Denna tidiga användning präglas av en pragmatisk syn. Så länge det fungerar och man lyckas förklara och förutsäga resultat från olika experiment ifrågasätts inte verktygen. Det är först när intresset vänds mot funktionsbegreppet i sig som utvecklingen mot ett alltmer abstrakt begrepp tar fart. Det är ett av kännetecknen för matematiken som vetenskap, att den strävar efter att avkontextualisera begreppen, så att de bli generella och abstrakta. De rena matematiska begreppen ska inte vara beroende av den fysiska verkligheten utan stå helt fria och därmed vara möjliga att tillämpa utan begränsningar.

I många läromedel beaktas tyvärr sällan de matematiska begreppens ofta intressanta utvecklingshistoria, annat än möjligen som fotnoter. Man nöjer sig ofta med att presentera ett färdigt resultat av utvecklingen. Förutom rent bildningsmässiga skäl till att bättre belysa förbindelsen mellan matematiska begrepp i modern tappning och deras ursprung, borde sådana beskrivningar också kunna bidra till en bättre förståelse för begreppen hos läsekretsen.

Referenser

Adams, R. A. (1999). *Calculus: a complete course*. Don Mills: Addison-Wesley.

Andersson, P. (1996). *MerIT Matematik A*. Lund: Studentlitteratur.

Björk, L-E, m fl (1992). *Matematik 2000 kurs B*. Stockholm: Natur och kultur.

Boyer, C. (1985). *A History of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1990). *The Mathematical Experience*. London: Penguin Books.

Hall, T. (1970). *Matematikens utveckling*. Lund: Gleerups.

Harel, G. & Dubinski, E. (Red.) (1992). *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (MAA Notes Volume 25). Washington: Mathematical Association of America.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics*. New York: Harper Collins College Publishers.

Kieran, C. (1996). Chapter 19: Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz et al. (eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Learning*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kline, M. (1979). *Mathematics in Western Culture*. London: Penguin Books.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal* **20**, 282–300.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function, summary and overview. In Harel & Dubinski (1992).

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education* **22**, 1–36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification – the case of function. In Harel & Dubinski (1992).

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In Harel & Dubinski (1992).

Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan*. Vällingby: Liber Utbildningsförlaget.

Skoogh, L. m fl (1996). *Möte med matte D*. Stockholm: Liber.

Struik, D. (1966). *Matematikens historia*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.

Thompson, J. (1991a). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.

Thompson, J. (1991b). *Matematiklexikon*. Helsingborg: Wahlström & Widstrand.

Vilenkin, N. Y. (1995). *In Search of Infinity*. Boston: Birkhäuser.

Vretblad, A. (1995). *Algebra och kombinatorik*. Malmö: Gleerups.