Bøker

A. D. Alexandrov: *Convex Polyhedra*. Springer 2005. ISBN: 3–540–23158–7.

Denne boken er en utvidet oversettelse til engelsk av Alexandrovs bok fra 1950 (på russisk, tysk overs. 1959). Boken fra 1950 er blitt en klassiker og det er bare naturlig at den nå foreligger på engelsk, og i utvidet versjon, for mye har skjedd siden 1950 (og til og med siden 1959). At den er blitt en klassiker skyldes at den er en lærebok som starter nærmest på bunnivå og behandler stoffet uhyre grundig, samtidig som den inneholder mange videregående forskningsresultater og problemer.

Utgangspunktet er det vanlige tredimensjonale rom og mengder i dette. Et konvekst polyeder er en mengde som er snittet av endelig mange lukkede halvrom (et lukket halvrom består av punktene i et plan og på den ene siden av dette). Er polyedret i tillegg begrenset, kalles det oftest en konveks polytop. Bokens to første kapitler består for en stor del grunnleggende stoff av geometrisk og topologisk natur. De er også verdifulle ved at de gir en omfattende oversikt over hvilke tema som skal behandles, og hvilke metoder som skal brukes, i de etterfølgende kapitler. Ikke-eksperter vil finne interessant stoff allerede her, slik som Cauchys bevis for at to konvekse polytoper med parvis kongruente sideflater selv er kongruente, forutsatt at sideflaten i det ene er koblet sammen på samme måte som de i det andre. Det er rimelig å tro at tidlige anvendelser av Eulers polyedersats på 4-fargeproblemet er inspirert av Cauchys kombinatoriske arbeid her.

Et annet høydepunkt i denne første del er et resultat av Brouwer fra 1913. Resultatet er velkjent men utenfor pensum i mange topologikurs. Det kan brukes i mange forbindelser, og jeg vil gjerne skissere forfatterens eget bevis (nevnt i boken) for algebraens fundamental-teorem ved hjelp av dette. Se på mengden av alle n-mengder av komplekse tall. Den kan oppfattes som en mangfoldighet A av dimensjon $2n$. Mengden B av alle moniske polynomer i z av grad n, med komplekse koeffisienter, og uten multiple røtter er også en mangfoldighet av dimensjon $2n$. Definer nå en avbildning fra A til B ved $f\big(\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}\big(= (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)\big)$. Det er klart at f er kontinuerlig og injektiv, og da viser Brouwer at f avbilder åpne mengder i A på åpne mengder i B. En ser lett at f avbilder en lukket mengde i A på en lukket mengde i B og at B er sammenhengende. Siden A er både åpen og lukket i A er $f(A)$ både åpen og lukket i B og derfor lik hele B, og vi er ferdig.

I de følgende ni kapitler brukes så verktøyet fra de første til å bevise en lang rekke resultater om eksistens og entydighet av konvekse polyedre som tilfredsstiller visse krav. Et strålende eksempel er Minkowskis sats som sier at dersom enhetsvektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ ikke er koplanare og tallene $F_1, \ldots, F_m$ er positive, med $F_1\vec{v}_1 + \ldots + F_m\vec{v}_m = 0$, så fins det en konveks polytop der sideflatene har areal $F_1, \ldots, F_m$ med utoverrettede enhetsnormaler henholdsvis $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$. Her bruker forfatteren Brouwers resultat, nevnt ovenfor, men Minkowskis opprinnelige bevis gjengis også.

I tillegg til de mange interessante resultater og bevis, får vi også bemerkninger om mulige generaliseringer til rom av dimensjon større enn 3, og til hyperbolske rom. En rekke uløste problemer angis også. Siden originalutgaven kom ut er mange av disse løst og denne utgaven er utvidet med mange kommentarer og referanser. I tillegg består kapitel 12 av lengre kommentarer til kapitlene 3,4, og 5 (men disse stammer fra 1958, 1960 og 1967).

Denne boken er et matematisk og pedagogisk praktstykke, med en rikdom av interessant, viktig og aktuelt stoff, presentert på en meget klar og pedagogisk måte, så utgivelsen på engelsk er absolutt velkommen. Jeg ble først litt skeptisk da jeg på side 1 leste «the first general uniqueness theorem was proved by Cauchy [C] in 1913» og så «Cauchy's proof is an exemplar of witticism», men disse eksemplene på trykkfeil og merkelig engelsk er heldigvis atypiske.

Siden det nylig (i 2003) kom ut en oppdatert utgave av en annen, delvis overlappende, klassisk bok, B. Grünbaums *Convex Polytopes* (1967) vil jeg gjerne nevne også denne. Forskjellen på de to bøkene er blant annet at den siste er mye mer kombinatorisk orientert, mens den første også tenderer i retning av differensialgeometri. Den siste har et fortrinn mht. referanselister, idet det for hver referanse angis hvor i boken den er brukt. Men ellers er begge bøkene svært gode, hver på sin måte og begge bør finnes i ethvert skikkelig matematisk bibliotek.

Helge Tverberg

Richard K. Guy: *Unsolved Problems in Number Theory* (Third edition). Springer 2004. ISBN: 0–387–20860–7.

Tallteori er en urgammel del av matematikken, ja så gammel (og delvis så elementær) at den en tid ble regnet som umoderne i visse kretser. Ti år etter at en yngre Bourbakist fortalte meg at tallteori ikke var «in» arrangerte American Mathematical Society et stort symposium med den begrunnelse at det hadde skjedd så ekstra mye på feltet i de ti årene. Idag blomstrer feltet som aldri før (men pussig nok ikke i Norden, der den rike tradisjonen er nærmest utdødd). Men la oss gå inn i Guys bok.

Guy fikk idéen rundt 1960 ved å observere enkelte mer uformelt sirkulerende problemlister, og i tillegg Paul Erdős' ustoppelige problemspredning, både skriftlig og muntlig. Første utgave av boken kom i 1981, og den ble en suksess. Tredje utgave er mye tykkere enn første, både fordi nye problemer er kommet til og mye har skjedd med de gamle. Blant annet har lesere produsert en mengde ny informasjon. Et særtrekk ved denne utgaven er samarbeidet med USA-matematikeren Neil Sloane i forbindelse med hans database, som fortjener en spesiell kommentar.

Mange matematiske problemer, og kanskje særlig tallteoretiske, leder til en følge av naturlige tall. Kjenner man de første leddene i en slik følge, vil databasen ofte kunne fortelle om problemer som har generert en følge med denne starten, og dette kan være nyttig. (Eksempel: I vinter ble vårt institutt kontaktet av to skolejenter i Kongsberg som lurte på hvor mange trekanter som fremkommer når man trekker alle diagonaler i en regulær n-kant. For $n = 3, 4, 5, 6$ er svarene $1, 8, 35, 110$, og Sloanes database ledet oss da til det generelle svaret, som faktisk bare er ti år gammelt.) I boken finnes mange referanser til denne databasen.

En grov klassifisering av problemene er gitt ved A, ..., F som angir kategoriene primtall, delelighet, additiv tallteori, diofantiske ligninger, heltallsfølger og diverse annet. Stikkprøver: A.7 er om Sophie Germain-primtall (kjent fra hennes arbeid med Fermats siste sats), d.v.s. slike der p og $2p+1$ begge er prim. Man tror at det finnes uendelig mange slike. Man vet heller ikke om det finnes kjeder $p, 2p+1, 2(2p+1)+1, \dots$ som inneholder mer enn 16 primtall (en med 16 primtall ble funnet i 1999 og starter med 3203000719597029781). Fra B.7 plukker jeg: Finnes det tre tall a, b, c slik at $s(a) = b$, $s(b) = c$, $s(c) = a$? Her betyr $s(x)$ summen av divisorer i x, unntatt x selv. C.7 vedrører Frobenius' problem: La $a_1, \dots, a_n$ være tall slik at hvis d er en divisor i alle, så er $d = 1$. Finn $g(a_1, \dots, a_n)$, det største tall som ikke kan fåes som en sum der hver addend er en a_i. Ingen formel er kjent for $n \geq 4$. (Den for $n = 3$ ble gitt av min tidligere kollega Ernst S. Selmer og hans hovedfagsstudent Øyvind Beyer i 1977.)

Neste punkt, D.7, handler bl.a. om en ligning som kanskje ikke har noen løsninger i det hele tatt, og iallfall ikke for $m \leq 10^{20\,000\,000}$: $1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^n$. Bare under dette punktet gir Guy 19 referanser som spenner over tidsrommet 1949–2003, mange også med henvisninger til Math. Rev. Den fra 1949 er til en oppgave av Paul Erdős, og det er ingen overraskelse at han også dukker opp i E.7, med sitt problem om konvergens av rekken $-1/2+2/3-3/5+4/7-5/11\ldots$. F.7 er om en spesiell diofantisk ligning som har betydning for visse beregninger i kubiske tallkropper.

Disse prøvene gir et godt inntrykk av boken som helhet: Den samler mange aktuelle problemer, lett forståelige men vanskelige, ja noen er kanskje nesten umulige å løse. Den inneholder også et ypperlig referansemateriale, og den gir mange konkrete eksempler. (Dette i kontrast til André Weils kjente Basic Number Theory; i en anmeldelse av den ble det påpekt at stort sett fant man ikke andre tall i den enn de som nummererte sidene.)

Tidligere utgaver av boken har stimulert og vært nyttig for mange matematikere, og denne utgaven vil helt sikkert bli et enda nyttigere forskningsverktøy, og fortsatt en stimulans for mange. Det dreier seg ikke bare om en tørr oppsamling for forskere av problemer og referanser; bakgrunnsstoffet og klarheten i fremstillingen gjør boken til interessant lesning for alle matematikkinteresserte. Richard K. Guy har stor ære av sitt prosjekt.

Helge Tverberg