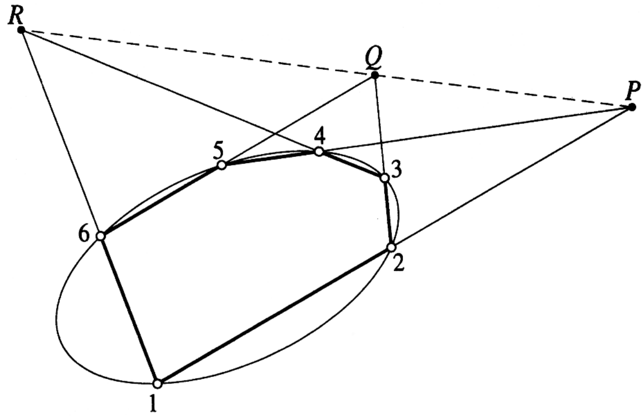
Generalisering fra Pascals 6-kantsetning til $(4n + 2)$-kanter

Hans Georg Killingbergtrø

NO-7120 Leksvik
Norge

Historisk stoff om 16-åringen Pascals 6-kantsetning er godt behandlet i [1]. La meg innlede med å sitere fra de første avsnittene av denne lesverdige artikkelen.

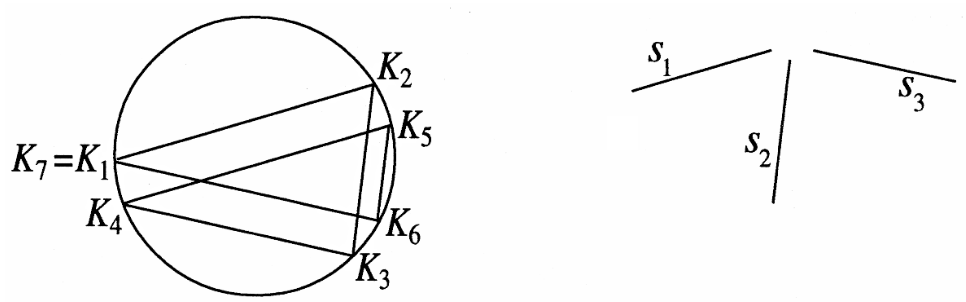
«Blaise Pascal (1623–1662) publiserte i 1640, bare 16 år gammel, en kort avhandling om kjeglesnitt der han gir Desargues æren for å ha gjort ham kjent med de projektive metoder. Dette arbeidet inneholder setningen som han selv kalte Hexagramma Mysticism, av ettertiden kjent som Pascals setning. Setningen sier dette: *Hvis en sekskant er innskrevet i et kjeglesnitt, så skjærer motstående sider hverandre i tre punkter som ligger på en rett linje.*



Pascal beviste ikke setningen i sin avhandling. Han bare konstaterte at den gjelder for sirkler og derfor for vilkårlige kjeglesnitt. Og det er sannsynlig at Pascal brukte Desargues' metoder i sitt bevis. Girard Desargues (1591–1661) studerte kjeglesnitts-egenskaper som bevares under sentralprojeksjon. Han innførte begrepene uendelig fjernt punkt og uendelig fjern linje. Parallelle linjer møtes i et uendelig fjernt punkt. Og totaliteten av uendelig fjerne punkter i et plan utgjør dette planets uendelig fjerne linje. Således er Pascals setning opplagt riktig i tilfellet med en regulær sekskant innskrevet i en sirkel (eller mer generelt for en sekskant der motstående sider er parallelle). I Desargues' framstilling kan ethvert kjeglesnitt oppfattes som sentralprojeksjonen av en sirkel.»

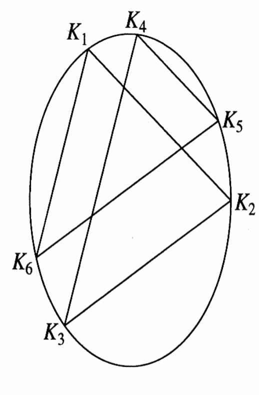
Det er tidvis gått sport i å søke et enklest mulig bevis for setningen. Ett slikt søk avstedkom noe uventet en åpen dør til å generalisere fra 6-kanter til (4n + 2)-kanter, der Pascals setning svarer til n = 1. Ved sentralprojeksjon får som vi antydet ovenfor setningen enten den vanlige versjonen eller en parallellversjon, og det holder å bevise den ene.

For interesserte med mulig behov for en rask tematisk innføring eller repetisjon, er parallellversjonen og tilfellet med en sirkel godt egnet: I figur 1 er et punkt K_1 fritt valgt på en gitt sirkel. Med tre ulike sikteretninger s_1, s_2, s_3 får vi punktene på sirkelen, K_2, K_3, K_4 ved å gå i s_1-retningen fra K_1 til K_2, i s_2-retningen fra K_2 til K_3, og i s_3-retningen fra K_3 til K_4. Da vil K_4 vanligvis ikke havne nøyaktig i K_1.

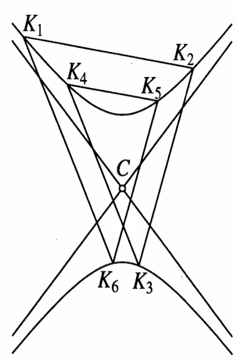


Figur 1

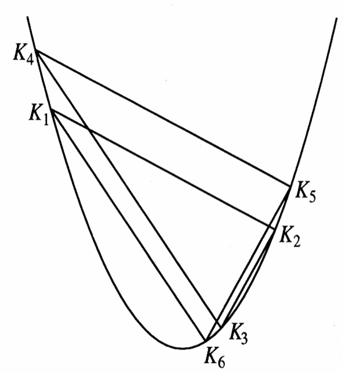
Men bruker vi de samme sikteretningene s_1, s_2, s_3 en runde til, kommer vi fra K_4 til K_5, fra K_5 til K_6, og fra K_6 til K_7, som alltid vil ligge nøyaktig i K_1. Vi kan si at en sirkel og tre ulike retninger brukt syklisk to ganger, lukker en sekskant. Dette følger av sirkelens rikholdige symmetrier, som viser at buene mellom to parallelle sekanter er like lange. Det Pascals setning sier, er at samme lukking skjer også om sirkelen er byttet ut med kjeglesnitt generelt, slik det antydes med ellipse, hyperbel og parabel i figurene 2, 3 og 4.



Figur 2

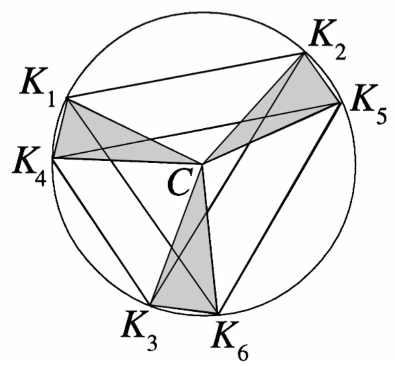


Figur 3



Figur 4

Vi skal se at ellipsen reddes av sirkelen. Men for hyperbel og parabel må vi søke noe annet enn buer mellom parallelle sekanter. I figur 5 er C sirkelens sentrum. Da vil trekantene $CK_4K_1, CK_2K_5, CK_6K_3$ og det som måtte være CK_4K_7, ha like store omløpsorienterte arealer, som viser at K_7 ligger i K_1.



Figur 5

Om det er å håpe at dette vil virke for hyperbelen, trengs det noe annet for parabelen, da den mangler sentrum. Derfor lanseres

Påstand 1: Nevnte areallikheter gjelder også for hyperbelen.

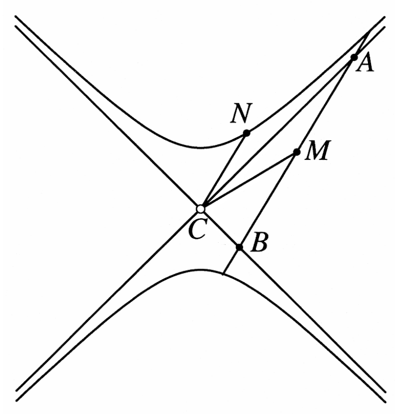
Påstand 2: Når $K_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, 7$, er punkter på parabelen $y = x^2$ i figur 4 og $K_1K_2 \parallel K_4K_5, K_2K_3 \parallel K_5K_6$ og $K_3K_4 \parallel K_6K_7$, er $x_1 - x_4 = x_5 - x_2 = x_3 - x_6 = x_7 - x_4$, slik at $x_7 = x_1$, med andre ord at K_7 og K_1 er samme punkt.

De to påstandene har et påfallende enkelt bevis. Det bygger på to så troskyldige midler som hyperbelens og parabelens riktignok fåtallige symmetrier, og på affinitet, en avbildningsmåte som fortjener større påaktelse enn den har fått. Reelt handler affinitet om en figur som er parallellprojisert fra et plan til et annet, i en fast, men fritt valgt skråretning, bare ikke parallelt med noe av de to planene. Men formelt har den et eneste krav å oppfylle, nemlig å bevare lengdeforholdet mellom parallelle linjestykker. Vel er det ikke uttalt at de parallelle linjenes bilder også skal være parallelle, men det enerådende forholdskravet er sterkt nok til å opprettholde både parallellitet, planstykkers arealforhold, og type kjeglesnitt: Ellipse og sirkel avbildes i ellipse eller sirkel, hyperbel avbildes i hyperbel, og parabel avbildes i parabel.

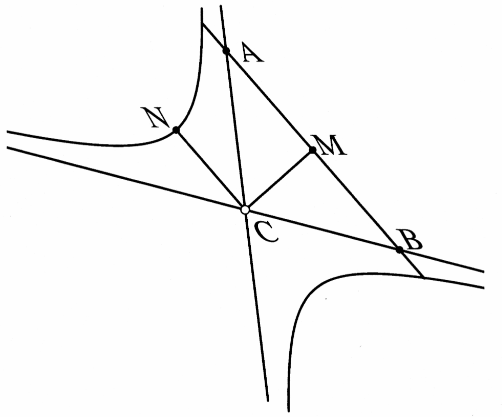
Eksempelvis kan en affinitet gjøre bildet av en gitt ellipse kongruent med en figur der korder i lilleaksens retning beholder retning og lengde, mens korder i storaksens retning beholder retning, men krympes så bildet av ellipsen blir en sirkel. Parallelle ellipsekorder er avbildet i parallelle sirkelkorder, så parallellversjonen av Pascals setning er uten videre gyldig også for ellipsen.

For hyperbelen kan vi, ut fra vinkelen mellom en symmetriakse og korder K_2K_3 og K_5K_6 i figur 3, finne en affinitet som setter disse kordenes bilder normalt på en symmetriakse i hyperbelens bilde. C er asymptotenes skjæringspunkt. Om det ikke er lett a se at trekanter CK_5K_2 og CK_3K_6 har samme areal, vil bildets symmetri borge for at trekantenes bilder har samme areal, og derfor må arealene av originaltrekantene være like store.

I figur 6 tenker vi oss et kartesisk koordinatsystem med origo i C og en hyperbel med asymptoter $y = x$ og $y = -x$. Koordinataksene her og i figur 7 er sløyfet for a avlaste figurene litt. En korde skjærer asymptotene i $A(a, a)$ og i $B(b, -b)$, $0 < b < a$. Midtpunktet på $[AB]$ er $M((a+b)/2, (a-b)/2)$, og når N ligger på hyperbelen og CN er parallell med AB, er tangenten i N parallell med CM. Vi søker en affinitet, vist i figur 7, der bildet av CM er blitt symmetriakse i bildet av hyperbelen ved at $\angle NCM$ er avbildet som 90°. Det oppnår vi ved at ethvert punkt (x, y) avbildes i $(x - hy, ky)$, der $h = (a_2 + b_2)/(a_2 - b_2)$ og $k = 2ab/(a_2 - b_2)$.



Figur 6



Figur 7

Vi rekapitulerer at A og B i figur 6 er asymptotepunktene på en korde $[K_2K_3]$ i figur 3, der den er parallell med en korde $[K_5K_6]$. Da vil symmetrien i det affine bildet, figur 7, vise at bildene av trekantene CK_2K_5 og CK_6K_3 har like store areal, og da må originaltrekantene også ha like store areal.

For hvert av parene som er parallelle korder i figur 3, fins det en affinitet som helt enkelt ved sin symmetri viser at trekantene CK_4K_1, CK_2K_5 og CK_6K_3 har like store areal. Påstand 1 er dermed bevist.

For Påstand 2 om parabelen $y = x^2$ bruker vi likeså en affinitet for hvert par parallelle korder, her affiniteten som avbilder (x, y) i $(x, y - kx)$, der k er stigningstallet for vedkommende kordepar. Bildene av disse kordene står da normalt pa parabelbildets akse, og igjen vil symmetrien vise at når bildene av eksempelvis K_2K_3 og K_5K_6 er horisontale, er $x_5 - x_2 = x_3 - x_6$. Og x-verdiene er uforandret ved denne avbildningen. Det viser at Påstand 2 er riktig.

Når parallellversjonen av Pascals setning nå er bevist gjennom tre likhetsbevarende affiniteter, melder det seg en mulighet for generalisering ut fra de tilsvarende tre korderetningene som skal brukes gjennom to runder: Er det noe i veien for å bruke fire retninger eller flere? Og hva med mer enn to runder på andre kurver enn kjeglesnitt?

Det siste spørsmålet er ikke mitt, men en annens, og blir ikke behandlet her, men nevnes som en spennende utfordring for den som matte ha lyst.

Det første spørsmålet kan skilte med en tallmessig raritet. Om vi i sirkeltilfellet prøver med fire sikteretninger i stedet for tre, skulle to omganger gi håp om en 8-kant, men vi vil se at prosessen oftest ikke lukker noe oktogon. Buen mellom K_l og i dette tilfellet K_5 etter en runde, er doblet etter neste runde i stedet for a være nullet ut, om den ikke er 180°. Men med fem sikteretninger vil avviket mellom K_1 og nå K_6 oppveies av avviket mellom K_6 og her $K_{11} = K_1$ så prosessen gir alltid en lukket 10-kant. Generelt vil $2n$ sikteretninger bare unntaksvis lukke en $4n$-kant etter to runder, men $2n + 1$ sikte-retninger vil alltid lukke en $4n + 2$-kant etter to runder. Beviset er nøyaktig som det jeg har vist for 6-kanter, bare at en må bruke $2n+1$ affinitetsavbildninger i stedet for tre.

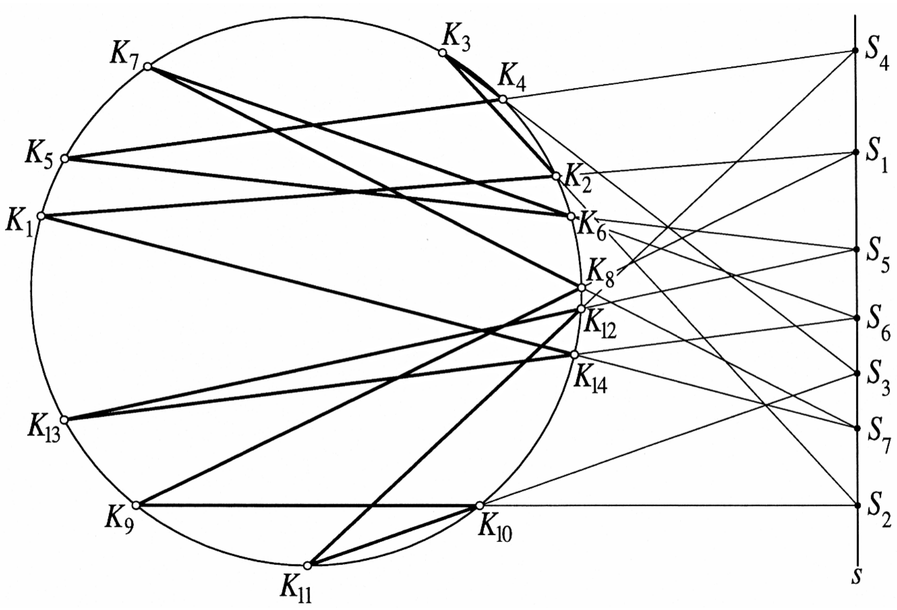
Den «dramatiske» forskjellen på partalls og oddetalls sikteretninger ligger i at en skal tenke seg orienterte trekantarealer F, der $F(ABQ) = -F(BAQ)$. Fra gang til gang skifter orienteringen fortegn (dreieretning). Dermed er orienteringen slik den var for $2n$ ganger siden, men motsatt hva den var for $2n+1$ ganger siden.

Skal den stridige partalls-situasjonen unntaksvis oppføre seg pent, må feilen etter første runde ($2n$ ganger) som sagt være 180°, for da vokser den ti1 360° etter $4n$ ganger, og K_{4n+1} ligger i K_1. Vi kan altså velge bare de $2n-1$ første retningene fritt, for så å sørge for at den siste av de $2n$ retningene fullfører første runde med å bringe K_{2n+1} til sirkelpunktet diametralt motsatt K_1. I løpet av hele den neste runden vil alle tenkte linjer K_iK_{2n+i} dermed gå automatisk gjennom sirkelens sentrum. Dette kan, om vi går fra parallell- til ordinærversjonen, muligens vekke skoleminner om pol og polare.

Det som skiller ordinærversjonen fra parallellversjonen, er at sikte*retninger* s_1, s_2, $s_3, \ldots$ er byttet ut mot sikte*punkter* $S_1S_2, S_3, \ldots$. Men skal analogien bevares, må vi huske at retninger i planet er det samme som uendelig fjerne punkter som, vel å merke, *ligger på linje*, nemlig på planets uendelig fjerne linje. Dermed krever analogien at $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ligger på linje.

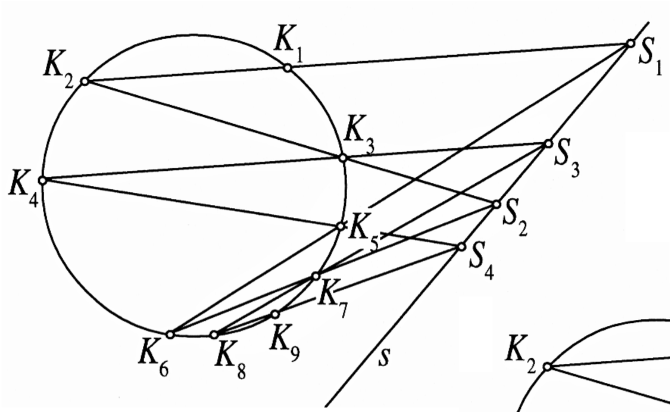
Linjen s som ordinære siktepunkt ligger på, kalles gjerne pascallinjen. Om den skjærer sirkelen, skal vi her se bort fra at noe siktepunkt ligger i et av skjæringspunktene, enda dette er fullt mulig med vise tilleggsregler, men disse krever kompliserende differensialbetraktninger.

Figur 8 viser eksempel på «den reale» oddetallssituasjonen, der $2n+1 = 7$ siktepunkter $S_1, \ldots, S_7$ kan velges fritt på pascallinjen s, som her ligger helt utenfor sirkelen. Også K_l er fritt valgt på sirkelen, og så går første runde slik: K_1S_1 gir K_2, K_2S_2 gir K_3, K_3S_3 gir K_4, K_4S_4 gir K_5, K_5S_5 gir K_6, K_6S_6 gir K_7, K_7S_7 gir K_8. Og annen runde forløper sånn: K_8S_1 gir K_9, K_9S_2 gir $K_{10}, K_{10}S_3$ gir $K_{ll}, K_{11}S_4$ gir $K_{12}, K_{12}S_5$ gir $K_{13}, K_{13}S_6$ gir $K_{14}, K_{14}S_7$ gir K_1! – en lukket 14-kant.

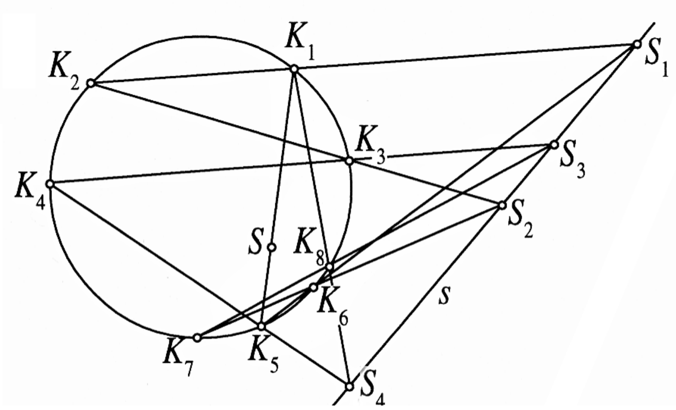


Figur 8

En vanligvis så ustyrlig partalls situasjon er eksemplifisert i figur 9, med $2n = 4$ fritt valgte siktepunkter på en pascallinje s og K_1 fritt valgt på sirkelen. Første runde: K_1S_1 gir K_2, K_2S_2 gir K_3, K_3S_3 gir K_4, og K_4S_4 gir K_5. Neste runde: K_5S_1 gir K_6, K_6S_2 gir K_7, K_7S_3 gir K_8, K_8S_4 gir K_9, som *ikke* ligger i K_1 og dermed *ikke lukker en oktogon*, bare fordi antall siktepunkter, tallet 4, er partall.



Figur9



Figur10

Til slutt vil figur 10 vise unntaket der et enn så udisiplinert partalls-tilfelle kan pålegges «å lukke etter seg». Det eneste som skiller situasjonen i figur 10 fra den i figur 9, er at bare S_1, S_2 og S_3 er fritt valgt på s og bestemmer K_2, K_3 og K_4 ut fra et valgt K_1. Så er K_5 spesialbestemt til å ligge på K_1S, der S er pol med s som polare. I stedet for at K_4 og S_4 skulle ha bestemt K_5, er rollene nå byttet så K_4 og K_5 bestemmer S_4. Deretter går annen runde som vanlig. Men merk at tenkte linjer K_2K_6, K_3K_7 og K_4K_8 går alle automatisk gjennom S.

Referanser

[1] H. E. Borgersen og I. H. Skau, *Tettere inn på Pascals setning*, Normat **46** (1998), 26–32.