 Normat **53**:3, 118–129 (2005)

Det tellbare og det overtellbare

Lars Kristiansen

Ingeniørutdanningen, Høgskolen i Oslo
Matematisk institutt, Universitetet i Oslo
larskri@iu.hio.no

«. . . – Hvorfor jager dere den vesle geitekillingen? spurte oksen.
– Han teller oss, rautet kalven. – Men vi skal ta'n, sa bjellekua.
– Jeg er en og kalven er to og kua er tre og oksen fire, 1-2-3-4, sa geitekillingen. – Å, nå telte han deg også, rautet kalven. – Han kan bare prøve, brølte oksen og ble med de andre for å ta geitekillingen.»

– fra *Geitekillingen som kunne telle til ti* av Alf Prøysen

Kardinaliteter

Geitekillingen setter elementene i en ikketom endelig mengde i en-til-en korrespondanse med et initialsegment av de positive heltallene. På folkemunne kalles dette å telle. Det er denne aktiviteten vi skal analysere og generalisere. La oss starte med å filosofere litt over hvorfor geitekillingen, kalven og bjellekua er færre enn geitekillingen, kalven, bjellekua og oksen? Vi skal si at en mengde som består av geitekillingen, kalven og bjellekua har mindre *kardinalitet* enn en mengde som består av geitekillingen, kalven, bjellekua og oksen, og at en mengde som består av geitekillingen, kalven, bjellekua og oksen har større kardinalitet enn en mengde som består av geitekillingen, kalven og bjellekua.

Definisjon 1. En mengde X har *mindre eller lik kardinalitet* enn en mengde Y dersom det er mulig å avbilde ethvert element i X på et unikt element i Y.

Ved å avbilde et element på et annet element mener vi ikke noe mer mystisk enn at det er mulig å trekke en pil fra det ene elementet til det andre. Så hvis A er mengden som består av nettopp geitekillingen, kalven og bjellekua, og B er mengden som består av geitekillingen, kalven, bjellekua og oksen, så har A mindre eller lik kardinalitet som B siden vi f.eks. kan sette opp følgende avbildning

$$\begin{array}{lcl} \text{bjellekua} & \longrightarrow & \text{geitekillingen} \\ \text{kalven} & \longrightarrow & \text{kalven} \\ \text{geitekillingen} & \longrightarrow & \text{oksen} \\ & & \text{bjellekua} \end{array}$$

Vi ser at pilene som går fra elementene i A treffer hvert sitt element i B. Det finnes ikke to piler som treffer samme element i B. Derfor har A mindre eller lik kardinalitet som B. Det finnes selvsagt flere mulige avbildninger som viser at A har mindre eller lik kardinalitet som B. I avbildningen

$$\begin{array}{lcl} \text{bjellekua} & \longrightarrow & \text{bjellekua} \\ \text{geitekillingen} & \longrightarrow & \text{kalven} \\ \text{kalven} & \longrightarrow & \text{oksen} \\ & & \text{geitekillingen} \end{array}$$

avbildes også hvert element i A på et unikt element i B.

Definisjon 2. En mengde X har *ekte større kardinalitet*[1] enn en mengde Y dersom

1. Y har mindre eller lik kardinalitet som X, og
2. det ikke er slik at X har mindre eller lik kardinalitet som Y.

Så dersom X har ekte større kardinalitet enn Y, så kan ethvert element i Y avbildes på et unikt element i X, mens det er ikke mulig å avbilde hvert element i X på et unikt element i Y. Det betyr at mengden B (den som består av geitekillingen, kalven, bjellekua og oksen) har ekte større kardinalitet enn mengden A (den som består av geitekillingen, kalven og bjellekua). Hvert element i A kan avbildes på et unikt element i B (så kardinaliteten til A er mindre eller lik kardinaliteten til B), mens ethvert forsøk på å avbilde elementene i B på unike elementer i A, vil skjære seg ...

$$\begin{array}{lcl} \text{oksen} & \longrightarrow & \text{bjellekua} \\ \text{geitekillingen} & \longrightarrow & \text{kalven} \\ \text{kalven} & \longrightarrow & \text{geitekillingen} \\ \text{bjellekua} & & \end{array}$$

... og på hvilket element skal vi avbilde bjellekua? Alle elementene i A er opptatt. Man behøver ikke akkurat være en Einstein for å se at alle andre forsøk på å avbilde elementene i B på unike elementer i A også vil skjære seg. Så mengden B har større kardinalitet enn mengden A.

[1] Av stilistiske grunner sier vi leilighetsvis «større» istedet for «ekte større».

Definisjon 3. En mengde X har *ekte mindre kardinalitet*[2] enn en mengde Y dersom Y har ekte større kardinalitet enn X.

Definisjon 4. To mengder X og Y har *samme kardinalitet* dersom

1. X har mindre eller lik kardinalitet som Y, og
2. Y har mindre eller lik kardinalitet som X.

Så mengden som består av Faderen, Sønnen og bikkja deres[3] har samme kardinalitet som mengden som består av kalven, kua og oksen. Vi kan avbilde ethvert element i den første mengden på et unikt element i den andre mengden, f.eks. slik

Faderen	$\longrightarrow$	kalven
Sønnen	$\longrightarrow$	kua
Den hellige hund	$\longrightarrow$	oksen

og vice versa, vi kan avbilde hvert element i den andre mengden på et unikt element i den første mengden, f.eks. slik

oksen	$\longrightarrow$	Faderen
kua	$\longrightarrow$	Sønnen
kalven	$\longrightarrow$	Den hellige hund

Dermed har de to mengdene samme kardinalitet i følge definisjonen.

Noen gremmer seg kanskje nå. Hva skal disse infantile definisjonene tjene til? At en mengde f.eks. har større kardinalitet enn en annen mengde betyr åpenbart at det er flere elementer i den ene mengden enn den andre. Har to mengder samme kardinalitet, så betyr det at det er like mange elementer i de to mengdene. Hvorfor ikke bare si det og bli ferdig med det? Vi vet alle hva ord som «flere», «færre» og «like mange» betyr. Vel, det er først når vi begynner å snakke om uendelige mengder at våre definisjoner kommer til sin rett. Definisjonene gjør det mulig å snakke om grader av uendelighet. Vi skal se at en uendelig mengde kan ha større kardinalitet enn, eller mindre kardinalitet enn, eller samme kardinalitet som, en annen uendelig mengde. Mengden av primtall har for eksempel samme kardinalitet som mengden av partall. Vi kan sette elementene i den ene mengden i en-til-en korrespondanse med elementene i den andre mengden, f.eks. slik

$$\begin{array}{ccc} 2 & \longleftrightarrow & 0 \\ 3 & \longleftrightarrow & 2 \\ 5 & \longleftrightarrow & 4 \\ 7 & \longleftrightarrow & 6 \\ 11 & \longleftrightarrow & 8 \\ 13 & \longleftrightarrow & 10 \\ & \vdots & \end{array}$$

[2]... og vi sier av og til «mindre» istedet for «ekte mindre».
[3]Den hellige hund.

Når vi kan sette opp en slik en-til-en korrespondanse mellom elementene i to mengder, så har de to mengdene samme kardinalitet. Da kan jo hvert element i den første mengden avbildes på et unikt element i den andre mengden, og vice versa, hvert element i den andre mengden kan avbildes på et unikt element i den første mengden.

Enhver endelig mengde har åpenbart en kardinalitet som svarer til et naturlig tall. Vi sier at en endelig mengde som består av n elementer har kardinalitet n. I stigende rekkefølge har vi kardinalitetene

kardinalitet 0	–	kardinaliteten til den tomme mengden $\emptyset$
kardinalitet 1	–	som f.eks. er kardinaliteten til mengden $\{0\}$
kardinalitet 2	–	som f.eks. er kardinaliteten til mengden $\{0, 1\}$
kardinalitet 3	–	som f.eks. er kardinaliteten til mengden $\{0, 1, 2\}$
kardinalitet 4	–	som f.eks. er kardinaliteten til mengden $\{0, 1, 2, 3\}$
	$\vdots$	

Etter denne rekken av endelige kardinaliteter følger kardinaliteten det er vanlig å kalle $\aleph_0$. (Tegnet $\aleph$ er den første bokstaven i det hebraiske alfabetet, og den uttales «aleff» med trykk på første stavelse.) Dette er kardinaliteten til alle mengder som kan settes i en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene. Mengden av partall og mengden av primtall er eksempler på mengder som har kardinalitet $\aleph_0$. Så i stigende rekkefølge har vi kardinalitetene $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, \aleph_0$. Finnes det flere kardinaliteter? Ja, den minste kardinaliteten større enn $\aleph_0$ kalles $\aleph_1$. Merkelig nok er vi ikke sikre på hvilke mengder som har denne kardinaliteten. Dette kommer vi tilbake til. I første omgang skal vi se nærmere på kardinaliteten $\aleph_0$.

Det tellbare

En mengde med kardinalitet $\aleph_0$ kalles en *tellbart uendelig* mengde. Elementene i den kan settes i en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene. Det er med andre ord mulig å liste opp, eller *telle opp*, elementene i en slik mengde. Vi har allerede nevnt et par slike mengder: mengden av primtall og mengden av partall. Mengden av heltall, positive som negative, har også kardinalitet $\aleph_0$. Vi kan f.eks. telle heltallene opp etter mønsteret

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ -5,\ 5, \ldots$$

Hva med mengden av positive rasjonale tall? Dette er mengden av tall som kan uttrykkes som en brøk m/n der m og n er naturlige tall ekte større enn 0. Kan denne mengden telles opp? Svaret finner vi hjelp av denne figuren:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	3	6	10	15
2	2	4	7	11	16	
3	5	8	12	.		
4	9	13	.			
5	14	.				
6						

Vi ser hjørnet av en uendelig stor matrise. I feltene i matrisen finner vi de naturlige tallene systematisk listet opp. Hvert felt i matrisen har to naturlige tall som koordinater, en vertikalkoordinat og en horisontalkoordinat. Brøken m/n kan assosieres med det naturlige tallet som har horisontalkoordinat m og vertikalkoordinat n. Vi har altså

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longleftrightarrow & \frac{1}{1} \\ 1 & \longleftrightarrow & \frac{2}{1} \\ 2 & \longleftrightarrow & \frac{1}{2} \\ 3 & \longleftrightarrow & \frac{3}{1} \\ 4 & \longleftrightarrow & \frac{2}{2} \\ 5 & \longleftrightarrow & \frac{1}{3} \\ & \vdots & \end{array}$$

Har vi dermed en en-til-en korrespondanse mellom de positive rasjonale tallene og de naturlig tallene? Nei, mange av brøkene i listen angir samme rasjonale tall, f.eks. brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{4}$. Dermed er det ikke en en-til-en korrespondanse mellom de naturlige tallene og de positive rasjonale tall vi har satt opp. Det er snarere en en-til-en korrespondanse mellom de naturlige tallene og en mengde uttrykk (eller notasjoner) for rasjonale tall. Likevel viser opptellingen vår at mengden av rasjonale tall har kardinalitet $\aleph_0$. En en-til-en korrespondanse mellom de naturlige tallene og de rasjonale tallene, kan man få ved å fjerne alle brøker som ikke er forkortet helt ned fra listen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \ldots$. Listen vi da sitter igjen med $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \ldots$ inneholder nøyaktig ett uttrykk for hvert rasjonale tall. Elementene i denne listen kan settes i en en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene. Så mengden av rasjonale tall har kardinalitet $\aleph_0$.

Mengden av alle endelige bitsekvenser har også kardinalitet $\aleph_0$. Bitsekvenser kan listes opp etter mønsteret.

(*) $\quad 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, 0001, 0010, \ldots$

Først lister vi alle bitsekvenser med lengde én. (Det finnes to slike.) Deretter lister vi alle bitsekvenser med lengde to. (Det finnes fire slike.) Deretter alle strenger med lengde tre. (Det er 8 stykker.) Slik fortsetter det, og vi ender opp med en uendelig lang liste der elementene kan settes i en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene.

En bitsekvens er en sekvens over alfabetet som består av tegnene 0 og 1. Hvis et alfabet har mer en to tegn, f.eks. 10 tegn, kan vi også liste opp alle endelige sekvenser av tegn fra alfabetet etter mønsteret i (*). Først lister vi opp alle sekvensene som består av ett tegn. Det er 10 stykker. Deretter lister vi opp alle sekvensene som består av to tegn. Det er 100 stykker. Og så videre.

Dersom hvert element i en mengde X kan refereres til ved en endelig sekvens av tegn fra et alfabet, så må X ha kardinalitet mindre eller lik $\aleph_0$. Hvorfor det? Jo, fordi mengden av alle endelige sekvenser over det aktuelle alfabetet har kardinalitet $\aleph_0$, og ethvert element i X kan åpenbart avbildes på et unikt element i mengden som inneholder alle endelige sekvenser. Dersom flere sekvenser refererer til samme element $a \in X$, velger vi bare en av sekvensene og avbilder a på den. Dermed er kardinaliteten til X mindre eller lik kardinaliteten til mengden av alle endelige sekvenser over alfabetet, den er med andre ord mindre eller lik $\aleph_0$. Mengden av rasjonale tall er et eksempel på en mengde hvor ethvert element kan refereres til ved en endelig sekvens av tegn fra et alfabet. Et rasjonalt tall kan jo refereres til ved en streng hvor tegnene er hentet fra alfabetet som består av sifrene '0', ..., '9', en brøkstrek og fortegnet '$-$' (minus). Mengden av reelle tall er ikke et eksempel på en slik mengde. Et reelt tall kan jo ha en uendelig desimalutvikling. Men så har da heller ikke mengden av reelle tall kardinalitet $\aleph_0$.

Det overtellbare

Mengder som har kardinalitet større enn $\aleph_0$ kalles gjerne overtellbare mengder. Det er på en måte for mange elementer i disse mengdene til at de kan telles opp. Det er ikke mulig å sette elementene i en overtellbar mengde i en en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene. Vi har sett at mengden av alle *endelige* bitsekvenser er tellbar. Vi skal nå forsøke å forstå hvorfor mengden av alle *uendelige* bitsekvenser ikke har kardinalitet mindre eller lik $\aleph_0$. Den har kardinalitet ekte større enn $\aleph_0$ og er med andre ord overtellbar. For å overbevise oss selv om at det faktisk er slik, må vi ty til *diagonaliseringsteknikk*. Det er en bevisteknikk som kan spores tilbake til Georg Cantor.[4] Det finnes mange varianter av teknikken, men vi skal benytte den i sin aller reneste form.

Tenk deg en matrise hvor elementene kan være 0 eller 1. La oss si at den er 7×7-stor. Ta f.eks. matrisen

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0}
\end{array}$$

[4] Russisk-tysk matematiker, 1845–1918.

I hver av matrisens rader finner vi en syvbitssekvens. I den første raden finner vi sekvensen 1000000, i den andre sekvensen 0001111, og så videre. Bitene på diagonalen fra det øvre venstre til det nedre høyre hjørnet, er uthevet. De gir også en syvbitssekvens.

(diagonal)	1	0	1	1	0	0	0

La oss forandre hvert eneste bit i denne sekvensen. Vi gjør enerne om til nuller og nullene om til enere. Syvbitssekvensen vi ender opp med kalles *matrisens modifiserte diagonal.*

(modifisert diagonal)	0	1	0	0	1	1	1

Matrisens modifiserte diagonal kan ikke være blant syvbitssekvensene vi finner som rader i matrisen. Den er jo forskjellig fra sekvensen i første rad i det første bitet, forskjellig fra sekvensen i andre rad i det andre bitet, ... kort sagt, den er forskjellig fra sekvensen i n'te rad i det n'te bitet for $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. En uendelig bitmatrise har en uendelig modifisert diagonal. Den er forskjellig fra sekvensen i n'te rad i det n'te bitet for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Den uendelige modifiserte diagonalen kan ikke være blant de uendelig mange uendelige bitsekvensene vi finner som rader i den uendelige matrisen.

Vi skal altså overbevise oss selv om at mengden av alle uendelige bitsekvenser *ikke har* kardinalitet mindre eller lik $\aleph_0$. Vi antar nå at dette er galt! Vi antar nå at denne mengden av sekvenser *har* mindre eller lik kardinalitet som mengden av naturlige tall. Det betyr at enhver uendelig bitsekvens kan avbildes på et unikt naturlig tall. Vi har ikke lov til å trekke noen konklusjoner om hvordan denne avbildningen ser ut, men vi har lov til å trekke den konklusjon at en slik avbildning finnes. Det er jo nettopp det det betyr at denne mengden av sekvenser har mindre eller lik kardinalitet som mengden av naturlige tall. Det er *slik vi har definert* at en mengde har mindre eller lik kardinalitet som en annen mengde. Så la S_0 være sekvensen som er avbildet på tallet 0. La S_1 være sekvensen som er avbildet på tallet 1, S_2 være sekvensen som er avbildet på 2 og så videre. Vi kan nå sette opp sekvensene $S_0, S_1, S_2, \ldots$ linje for linje slik at vi får en uendelig matrise:

$$\begin{array}{llllllll}
S_0\colon & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\
S_1\colon & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
S_2\colon & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
S_3\colon & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\vdots
\end{array}$$

Vi vet altså ikke hvordan sekvensen S_0, eller sekvensen S_1, eller S_{19}, eller noen av de andre radene i matrisen ser ut. Vi har bare slengt inn noen bit i det øvre høyre hjørnet for å illustrere at matrisen er faktisk fylt opp, men det er helt avgjørende å få med seg at argumentasjonen vår ikke hviler på hvor i matrisen de enkelte nullene og enerne er plassert. Argumentet vårt holder for, og det må holde for, enhver distribusjon av nuller og enere i denne matrisen. Noen av linjene i matrisen kan også være tomme. Det kan jo hende at noen tall ikke har fått avbildet en sekvens på seg. I disse linjene setter vi inn en uendelig sekvens av nuller.

Matrisen over ble konstruert fra en avbildning. De uendelige bitsekvensene er avbildet på de naturlige tallene slik at hver sekvens er avbildet på minst ett tall, og to forskjellige sekvenser er aldri avbildet på samme tall. Det betyr at enhver uendelig bitsekvens forekommer som en rad i denne matrisen. Men det kan ikke være riktig! Matrisens modifiserte diagonal er en uendelig bitsekvens, og den kan ikke forekomme som som en rad i matrisen. Dermed leder antagelsen om at mengden av uendelig bitsekvenser har kardinalitet mindre eller lik $\aleph_0$ til noe vi vet er galt. Dermed trekker vi konklusjonen at mengden ikke kan ha kardinalitet mindre eller lik $\aleph_0$. Den må ha større kardinalitet. Den må være overtellbar.

Vi har nettopp gjennomført et *ad absurdum* argument. Det er en meget vanlig matematisk argumentasjonsform basert på at enten p eller «ikke p» er sann. (Her står p for en vilkårlig påstand.) Dersom «ikke p» har absurde konsekvenser, så kan det ikke være slik at «ikke p» er sann, ergo må det være p som er sann. I vårt tilfelle har det absurde konsekvenser at mengden ikke er overtellbar: *At den modifiserte diagonalen forekommer som en rad i matrisa er en selvmotsigelse.* Dermed konkluderer vi at mengden *er overtellbar.*

Har du blitt overbevist om at det finnes kardinaliteter som er ekte større en $\aleph_0$? Det finnes mennesker som tilsynelatende aldri lar seg overbevise om dette. Det finnes en egen rase som på engelsk går under betegnelsen «mathematical cranks». Vi kan kalle dem vinkeltredelere på norsk. Dette er mennesker som ikke vil, eller ikke kan, godta standard og alment akseptert matematikk. Og de stiller seg heller ikke likegyldig eller uforstående til denne matematikken. Tvertimot. De har en tendens til å legge betydelig arbeid og energi i å motbevise hva generasjoner av seriøst arbeidende matematikere har kommet fram til. Ja, enkelte vier faktisk livet sitt til dette. De forsøker for eksempel å tredele en vinkel ved hjelp av passer og linjal. Det er umulig. Det kan bevises at det er umulig. Man forsøker å fortelle dem at det er umulig, men det biter liksom ikke på dem. De går løs på oppgaven med friskt mot. Produserer den ene avhandlingen etter den andre hvor de hevder at det umulige er mulig. Utallige av avhandlingene har gjennom årenes løp blitt donert matematiske institusjoner verden over. En venn av meg fant egenhendig et lite knippe da han ryddet i et gammelt arkiv på Matematisk institutt ved Universitetet i Oslo. Det var etter sigende underholdende lesning, blant annet kunne en pensjonert lærer fra Forsvarets radarskole fortelle at verdien av det velkjente irrasjonale tallet e lå atskillig nærmere 3 enn hva man tidligere hadde tenkt seg. (Dersom vi også kunne få redusert verdien av π litt, så ... ja, hvem vet, kanskje $e = \pi$?)

Et yndet tema for vinkeltredelere er eksistensen av overtellbare kardinaliteter (se [3]). De liker tydeligvis ikke at slike kardinaliteter finnes. Den måten vi har argumentert på over, finner de slett ikke overbevisende. De later til å mene at det burde være mulig å sette opp matrisen så smart og snedig at diagonaliseringsargumentet slår feil. (Det er selvsagt bare tøv. Uansett hvordan matrisen settes opp, vil den ha en diagonal, og har den en diagonal så har den en modifisert diagonal.) Internett og epostlister er tumleplass nummer én for vinkeltredelere. Der kan de virkelig boltre seg. Gödels ufullstendighetsteoremer er et annet tema de har en tendens til å beskjeftige seg med. Så vær på vakt. Enkelte vinkeltredelere kan til tider virke relativt tilforlatelige.

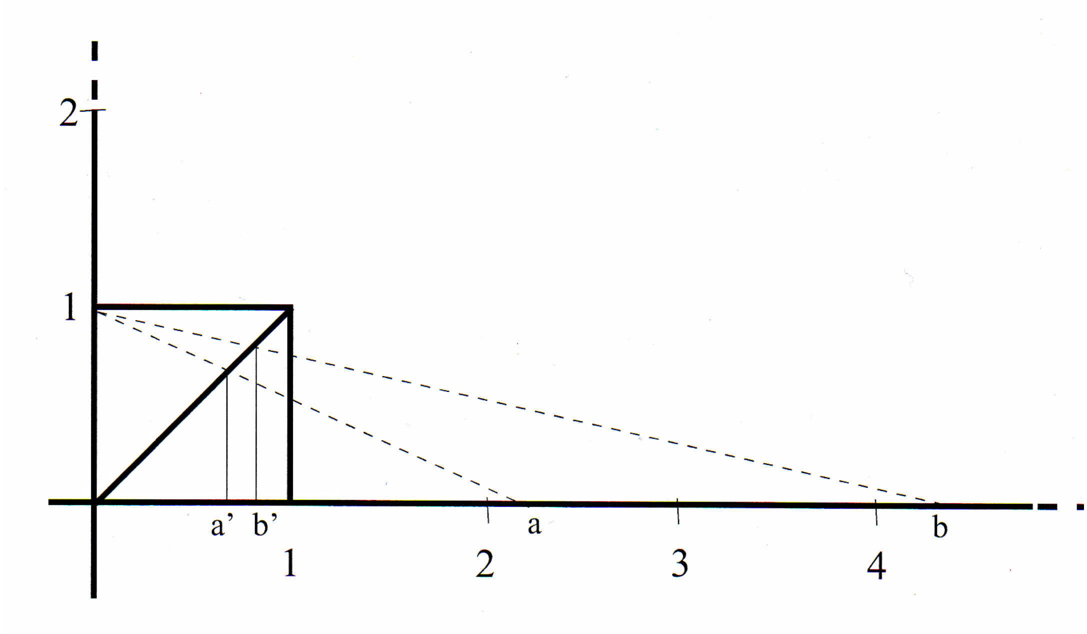
Kontinuumshypotesen

Tenk deg en linje – en rett strek – sett 0 i den ene enden på denne linjen og 1 i den andre. Da har du en slags målestokk. Mellom 0 og 1 på målestokken ligger en rekke punkter. Hvert punkt svarer til det som kalles et reelt tall mellom null og én. At et punkt x ligger til høyre for et punkt y på linjen betyr det samme som at x svarer til et tall som er større enn y. Et punkt kan svare til et tall som har en uendelig lang desimalutvikling. Det er ikke mulig å skrive ned den nøyaktige verdien av tallet dersom man skriver sifre etter et komma. Man kan begynne 0,32938374939394847..., men man blir aldri ferdig. Dersom man regner om et tall fra brøkrepresentasjon til desimalrepresentasjon, vil man enten ende opp med en endelig desimalutvikling eller en desimalutvikling der en desimalsekvens repeteres i det uendelige. Regner man f.eks. om $\frac{1}{8}$ får man den endelige desimalutviklingen 0,125, regner man om $\frac{1}{7}$ får man utviklingen 0,142857142857142... hvor sekvensen 142857 repeteres i det uendelige. Noen av punktene på linjen vil således svare til tall som ikke kan representeres som brøker. De svarer til tall som har en uendelig ikkerepeterende desimalutvikling, til såkalte irrasjonale tall.

Denne omtalte linjen av punkter kalles *kontinuum*, og mengden av punkter på linjen kalles gjerne *kontinuumsmengden*. Per definisjon er det altså like mange elementer i kontinuumsmengden som det er reelle tall mellom null og én, og hvor mange er det? Hva er kardinaliteten til kontinuumsmengden? Vel, det er relativt lett å bevise at kontinuumsmengden har samme kardinalitet som mengden av alle uendelige bitsekvenser. Vi skal ikke gjøre det, men det er ikke vanskeligere enn at de skarpeste av leserne bør få det til på egenhånd. (Se forøvrig figur 1.) Vi har sett at mengden av alle uendelige bitsekvenser er overtellbar. Det betyr at mengden av punkter på kontinuum også er overtellbar. Den har altså en kardinalitet som er ekte større enn $\aleph_0$. Spørsmålet er hvor mye større?

La oss oppsummere litt. Vi har kardinalitetene til de endelige mengdene. En endelig mengde har en kardinalitet som svarer til et naturlig tall, og det er vanlig å benytte de naturlige tallene som navn på disse kardinalitetene. Vi har da i stigende rekkefølge kardinalitetene 0,1,2,3,.... Etter disse kardinalitetene følger kardinaliteten som kalles $\aleph_0$ – kardinaliteten til mengden av naturlige tall. Vi har da i stigende rekkefølge kardinalitetene $0, 1, 2, 3, \ldots \aleph_0$. Dette er (per definisjon) de tellbare kardinalitetene, og disse kardinalitetene er uproblematiske. Det er også helt uproblematisk at det finnes mengder som ikke har tellbar kardinalitet. Men så begynner moroa. Hvilken kardinalitet følger etter $\aleph_0$? Vel, selve spørsmålet kan faktisk bedra og villede. Er det nå så sikkert at en bestemt kardinalitet følger etter $\aleph_0$? Kunne vi ikke tenke oss at det kommer to kardinaliteter β_1 og β_2 etter $\aleph_0$? Det finnes ingen kardinalitet mellom $\aleph_0$ og β_1, og det finnes ingen kardinalitet $\aleph_0$ og β_2, men likevel er ikke β_1 mindre eller lik β_2, og β_2 er ikke mindre eller lik β_1. De to kardinalitetene β_1 og β_2 er på en måte usammenlignbare. Joda, det er slett ikke helt fjernt å tenke seg en slik situasjon, men nå forholder det seg slik at dersom man godtar utvalgsaksiomet,[5] så kan man bevise at det følger én, og bare

[5]Det finnes mange formuleringer av utvalgsaksiomet i litteraturen. I matematikken er det ofte slik at to prinsipp som ser forskjellige ut ved første øyekast, er ekvivalente i den forstand at de medfører nøyaktig det samme. En vanlig og tilgjengelig formulering av utvalgsaksiomet lyder slik: *Anta at du har en samling ikketomme mengder $A_0, A_1, A_2, \ldots$, gjerne overtellbart mange. Anta videre at mengdene i samlingen er disjunkte. Det betyr at hvis x er med i én av mengdene, så er ikke x med i noen av de andre mengdene. Dersom det finnes en mengde som inneholder alle*



Figur 1: Utrolig nok kan ethvert punkt på den positive delen av den reelle tallinjen avbildes på et unikt punkt som ligger mellom 0 og 1 på den samme tallinjen. Punktet a på den positive delen av x-aksen i koordinatsystemet avbildes på punktet a' som ligger mellom 0 og 1 på x-aksen. Avbildningen skjer ved at det trekkes en linje fra a til punktet 1 på y-aksen. Linjen som er stiplet i figuren, vil alltid skjære diagonalen i det inntegnede kvadratet, dvs. linjen trukket mellom punktene med koordinater $(0,0)$ og $(1,1)$. Fra punktet hvor linjen skjærer diagonalen trekkes en loddrett linje ned på x-aksen. Den loddrette linjen treffer punktet a' som vil ligge mellom 0 og 1. (Studer hva som skjer når a selv ligger mellom 0 og 1.) Figuren viser at dersom a og b er to forskjellige punkter på x-aksen, så vil de også avbildes på forskjellige punkter i intervallet 0 til 1. Mengden av positive reelle tall må altså ha samme kardinalitet som kontinuumsmengden. Leseren kan selv forsikre seg om at mengden av alle reelle tall, positive som negative, også har samme kardinalitet som kontinuumsmengden.

én, kardinalitet umiddelbart etter $\aleph_0$. Denne kardinaliteten har man døpt til $\aleph_1$. Utvalgsaksiomet er et matematisk prinsipp, eller kanskje man skulle si lov, som de fleste matematikere ikke finner alt for kontroversiell. Man vil helst unngå å bruke utvalgsaksiomet når man beviser noe, men samtidig vet man at enkelte teoremer ikke lar seg vise dersom man unnlater å benytte dette prinsippet. Et eksempel på et slikt teorem er nettopp teoremet som sier at det kommer én, og bare én, kardinalitet etter $\aleph_0$. Under forutsetning at utvalgsaksiomet holder, så finnes det faktisk en entydig rekke av kardinaliteter etter $\aleph_0$. $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots$. For ethvert naturlig tall i så kan det altså vises at det kommer én, og bare én, kardinalitet umiddelbar etter $\aleph_i$. Denne kardinaliteten heter per definisjon $\aleph_{i+1}$. Videre kan man vise at den entydige stigende følgen av kardinaliteter også fortsetter etter den uendelige rekken $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$. Da følger en kardinalitet som kalles $\aleph_\omega$. (ω er den

mengdene i samlingen, så finnes det også en mengde B som inneholder nøyaktig ett element fra hver av mengdene i samlingen. Så aksiomet tillater deg på en måte å lage en ny mengde B fra en mengde av mengder. Dette kan jo se ut som et uskyldig og ufarlig prinsipp, men aksiomet har noen underlige konsekvenser. Legg merke til at aksiomet ikke krever at du forteller hvilket element som skal velges fra A_0, hvilket element som skal velges fra A_1, hvilket element som skal velges fra A_2, osv.

siste bokstaven i det greske alfabetet. Den uttales «omega».) Etter $\aleph_\omega$ følger $\aleph_{\omega+1}$, så følger $\aleph_{\omega+2}$ osv. Vi har altså i stigende rekkefølge kardinalitetene

$$(\dagger) \qquad 0, 1, 2, 3, \ldots\ \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots\ \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \aleph_{\omega+3}, \ldots$$

og det fortsetter og fortsetter og fortsetter. Hvor langt dette fortsetter, avhenger av hvilke matematiske prinsipper man er villig til å godta.

Alt dette var Georg Cantor klar over allerede i 1877. Han vet at kontinuumsmengden har kardinalitet ekte større enn $\aleph_0$, og han ser for seg den stigende rekken av kardinaliteter $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots$, men klarer ikke å finne en mengde som har kardinalitet ekte større enn $\aleph_0$ og ekte mindre enn kardinaliteten til kontinuumsmengden. Dermed gjetter han at kontinuumsmengden har kardinalitet $\aleph_1$. Denne gjetningen har fått navnet *kontinuumshypotesen.* Han har altså intet presist matematisk argument som tvinger oss til å godta at det er slik. Det han kan bevise, under forutsetning at utvalgsaksiomet holder, er at det må finnes en mengde X med egenskapene

1. kardinaliteten til X er ekte større enn $\aleph_0$
2. det finnes ingen mengde som både har kardinalitet ekte større enn $\aleph_0$ og ekte mindre enn X
3. enhver annen mengde har enten større kardinalitet enn X, mindre kardinalitet enn X eller samme kardinalitet som X.

Kardinaliteten til X heter per definisjon $\aleph_1$. Kontinuumshypotesen sier at kontinuumsmengden har kardinalitet $\aleph_1$. Det er en gjetning.

Like før andre verdenskrig beviste Kurt Gödel[6] at det er konsistent med alle kjente matematiske prinsipper og sannheter at kontinuumshypotesen er riktig. Han viste altså *ikke* at kontinuumshypotesen er riktig. Han avledet den ikke fra andre matematiske prinsipper og sannheter, men han viste at det er *konsistent* med *all* annen kjent og alment godtatt matematikk at kontinuumshypotesen er sann. Det virker merkelig at det går an å vise noe sånt, men det gjør det altså. I 1963 viste Paul Cohen[7] at det også er konsistent med den samme matematikken at kontinuumshypotesen er gal. Og dette virker jo skikkelig merkelig. Det er merkelig at det er sånn, og det er merkelig at det er mulig å føre et bevis for at det er sånn. Det betyr at du kan velge hvorvidt du vi vil tro på kontinuumshypotesen eller ikke. Du kan velge i den forstand at uansett hva du velger å tro, så velger du ikke å tro på noe som er i konflikt med den øvrige matematikken. Dette *låter* mystisk. Det *er* ikke mystisk, men man må studere en del avansert mengdelære og matematisk logikk for å innse det. (Noen mennesker har en tendens til å overfortolke vitenskap de ikke forstår.)

Etterord. Man kan nok få et visst grep om forskjellen mellom det tellbare og det overtellbare ved lese en enkel liten artikkel som dette, men vil man ha en dypere forståelse av kontinuumshypotesen og dens filosofiske og matematiske implikasjoner, må man jobbe for det. Så da er det bare å gå igang å lese: Kamke [4], Devlin [2] og

[6] Tysk-amerikansk matematiker, 1906–1974.
[7] Amerikansk matematiker, født 1934.

Kuhnen [5] har vært undertegnedes lærebøker i mengdelære. Kamke [4] er lettlest og anbefales som innføringslektyre, Devlin [2] er ikke fullt så lettlest, mens Kuhnen [5] er en omfattende bok som krever sitt. Mengdelære er nært relatert til formell logikk, og det finnes et utall av innføringsbøker i logikk. Barwise & Etchemendy [1] er en lettlest bok som også tar opp sammenhengen mellom mengdelære og formell logikk – innføringsbøker i logikk gjør vanligvis ikke det. Shoenfield [6] er en tung og omfattende, men meget god, logikklærebok som inneholder mye mengdelære.

Slik forfatteren har formulert seg over, er det et åpent spørsmål om kontinuumshypotesen gir mening dersom utvalgsaksiomet ikke holder. I en vanlig lærebok i mengdelære utvikles en raffinert og omstendelig teori hvor kardinalitetsbegrepet defineres ved hjelp av såkalte velordninger. Hvis man ser det hele med en lekmanns øyne, ender en slik utvikling essensielt opp med det samme kardinalitetsbegrepet som utvikles i denne artikkelen. Imidlertid vil man *ikke* ha behov for utvalgsaksiomet når man skal vise at kardinalitetene kan ordnes lineært i stigende rekkefølge slik (†) antyder. Det betyr at kardinaliteten $\aleph_1$ er veldefinert selv om utvalgsaksiomet er galt. Dermed blir kontinuumshypotesen, som jo sier at kontinuumsmengden har kardinalitet $\aleph_1$, meningsfull uavhengig av hvorvidt utvalgsaksiomet holder. Det er forøvrig vist at utvalgsaksiomet har samme status som kontinuumshypotesen. Aksiomet er uavhengig av all annen kjent og alment akseptert matematikk. Gödel viste at det er konsistent med denne matematikken at utvalgsaksiomet holder, Cohen viste at det er konsistent at det ikke holder.

Referanser

[1] Barwise J. og Etchemendy J. *The Language of First-Order Logic.* CSLI Lecture Notes, 1993.

[2] Devlin, K. *The Joy of Sets.* Springer, 2nd ed., 1993.

[3] Hodges, W. *An editor recalls some hopeless papers.* Bull. Symbolic Logic **4** (1998), 1-16.

[4] Kamke, E. *Theory of Sets.* Dover, New York, 1950.

[5] Kuhnen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* North-Holland, 1980.

[6] Shoenfield, J.R. *Mathematical logic.* A. K. Peters.