

Matematik i en Nautilusskal

Leif Andersen og Vagn Lundsgaard Hansen

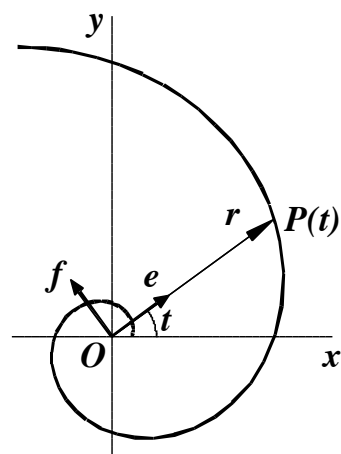
Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
Matematiktorvet, Bygning 303
2800 Kgs. Lyngby
V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Der er udvist megen kreativitet i forsøg på at finde det gyldne snits forhold repræsenteret i naturens former; se fx [4], [5]. Mange af de postulerede sammenhænge er dog ikke begrundede og kan næppe betragtes som fuldt videnskabeligt dokumenterede. En af de ofte fremførte påstande knytter sig til den smukke skal i blæksprutten Nautilus. Gennemskæres skallen ser man en logaritmisk spiral. Gennem de såkaldte hvirvlende kvadrater knyttes denne spiral (fejlagtigt) til Fibonacci talrækken og derved til det gyldne snit. En logaritmisk spiral er equiangulær, idet vinklen som tangenten i et kurvepunkt danner med halvlinien fra centrum i spiralen gennem kurvepunktet er konstant langs spiralen; denne konstante vinkel fastlægger spiralen fuldstændigt pånær en skaleringsfaktor. Spiralen knyttet til de hvirvlende kvadrater er derimod ikke equiangulær; den tilhører en anden spiraltype, kendt under navnet Fibonacci spiraler.

Med udgangspunkt i en logaritmisk spiral, konstrueres i [3] en matematisk Nautilusskal ved at placere krumningscirklerne for den logaritmiske spiral vinkelret på både spiralen selv og dens plan, så krumningscentre falder i de tilhørende kurvepunkter. Konstruktionen er første gang beskrevet i [2]. For netop én vinkel i den logaritmiske (equiangulære) spiral, vil fladens vinding lukke pænt sammen om spiralen lag mod lag og fremstå som en Nautilus-lignende skal. Denne vinkel er eksperimentelt bestemt i [3] og ligger tæt på halvdelen af den gyldne vinkel. I den matematiske Nautilusskal er der således en nær sammenhæng mellem den logaritmiske spiral og det gyldne snit. Det er dog tvivlsomt om den fundne vinkel svarer til en vinkel, der kan måles i en Nautilusskal i naturen. Men den fundne sammenhæng illustrerer måske alligevel på den anden side, at der bag afvigelse fra de perfekte former og mønstre, som findes i naturens overvældende rigdom af

strukturer, er en stærk forbindelse til enkle matematiske principper og modeller. De bemærkelsesværdige bøger af Theodore Andrea Cook [1] og D'Arcy Wentworth Thompson [6] bærer vidnesbyrd derom.

I denne artikel gives en kort fremstilling af de geometriske begreber, der indgår i konstruktionen af den matematiske Nautilusskal i [3]. Konstruktionen tager udgangspunkt i en logaritmisk spiral (se figur 1), eller ækvivalent en equiangulær spiral. Den entydigt bestemte vinkel, for hvilken krumningscirklerne i den logaritmiske (equiangulære) spiral kan anbringes omkring spiralen i en Nautilus-lignende skal, fastlægges ved et system af to ligninger og bestemmes derefter numerisk. Der argumenteres endelig for, at der i den matematiske Nautilusskal er en nærliggende forbindelse mellem den logaritmiske spiral og det gyldne snits forhold, repræsenteret ved den gyldne vinkel.



Figur 1: Logaritmisk spiral

Logaritmiske og equiangulære spiraler

Igennem hele artiklen betragter vi en fast euklidisk plan, som vi orienterer med omløbsretningen imod uret som den positive omløbsretning. Planen udstyres med et fast retvinklet koordinatsystem med origo i punktet O og koordinater (x, y) . Punkter P i planen fastlægges ved deres koordinater $P(x, y)$ eller ved deres stedvektorer ud fra origo \overrightarrow{OP} .

En fri vektor \mathbf{v} i planen kan angives ved koordinaterne for den tilhørende stedvektor ud fra origo. Drejes vektoren \mathbf{v} vinklen $\frac{\pi}{2}$ i positiv retning fremkommer tværvektoren $\hat{\mathbf{v}}$ til \mathbf{v} .

For $t \in \mathbb{R}$, defineres et bevægeligt retvinklet koordinatsystem i planen med origo i O og med førsteaksen fastlagt af enhedsvektoren

$$\mathbf{e}(t) = (\cos(t), \sin(t)) ,$$

og andenaksen af den tilhørende tværvektor $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{e}}(t)$,

$$\mathbf{f}(t) = (-\sin(t), \cos(t)) .$$

For ethvert par af positive, reelle tal $a, b > 0$, defineres den tilhørende *logaritmiske spiral* som den kurve, der gennemløbes af punktet $P(t)$ med stedvektor

$$\overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{r}(t) = a \exp(bt) \mathbf{e}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} .$$

I denne fremstilling repræsenterer t fysisk set tiden i punktets bevægelse i planen og geometrisk set måler t retningsvinklen for stedvektoren til punktet i forhold til førsteaksen i det faste koordinatsystem.

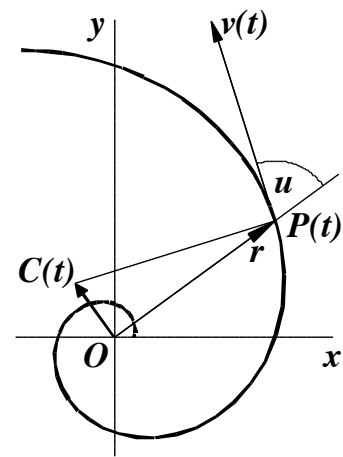
Spiralbevægelsens hastighedsvektor $\mathbf{v}(t)$, som geometrisk fastlægger kurvens tangent, findes ved differentiation,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = ab \exp(bt) \mathbf{e}(t) + a \exp(bt) \mathbf{f}(t) .$$

Dette udtryk for $\mathbf{v}(t)$ viser, at vinklen u (figur 2) mellem $\mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{v}(t)$, hvor $0 < u < \frac{\pi}{2}$, er bestemt ved formlen,

$$\tan(u) = \frac{1}{b} .$$

Vinklen u mellem $\mathbf{r}(t)$ (ensrettet med $\mathbf{e}(t)$) og $\mathbf{v}(t)$ er således uafhængig af parameteren t . Den logaritmiske spiral har derfor følgende geometriske egenskab.



Figur 2: Equiangular spiral

Sætning 1. *I en logaritmisk spiral skærer halvlinierne fra origo gennem kurvepunkterne de tilsvarende tangenter under en konstant vinkel u i intervallet $0 < u < \frac{\pi}{2}$.*

I almindelighed vil vi ved en *spiralkurve* i planen forstå en kurve der gennemløbes af et punkt $P(t)$ med stedvektor

$$\overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} ,$$

hvor $r(t) > 0$ er en positiv reel funktion, som forudsættes at være differentiabel med kontinuert differentialkvotient $r'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

En spiralkurve med egenskaben i Sætning 1 kaldes en *ligesidet*, eller mere rammente, en *equiangular*, spiral. En logaritmisk spiral er altså en equiangular spiral. Man kan vise, at også det omvendte gælder, og vinkelegenskaben er dermed karakteristisk for klassen af logaritmiske spiraler.

Sætning 2. *Enhver equiangular spiral er en logaritmisk spiral.*

Bevis. Betragt en spiralkurve fastlagt ved

$$\overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} ,$$

hvor $r(t) > 0$ er en positiv reel funktion, som er differentiabel med positiv differentialkvotient $r'(t) > 0$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

En tangentvektor til spiralkurven bestemmes ved differentiation,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = r'(t) \mathbf{e}(t) + r(t) \mathbf{f}(t) .$$

Hvis spiralkurven er equiangular følger, at

$$\frac{d}{dt} \ln(r(t)) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{1}{\tan(u)} = b ,$$

for en konstant $b > 0$. Så følger straks, at

$$\ln(r(t)) = bt + c ,$$

for en konstant c , og dermed, at

$$r(t) = \exp(c) \exp(bt) = a \exp(bt) .$$

Dette er netop formlen for en logaritmisk spiral. □

Navnet equiangulær spiral skyldes den franske matematiker og filosof René Descartes (1596–1650), der som den første beskrev denne kurveform og dens egenskaber i et brev fra 1638. Den schweiziske matematiker Jacob Bernoulli (1654–1705) var så fascineret af spiralen, at den blev sat på hans gravmæle; i et værk fra 1691 omtalte han som den første spiralen som en logaritmisk spiral.

Krumning i en logaritmisk spiral

Vi ser nu igen på den generelle logaritmiske spiral givet ved

$$\overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{r}(t) = a \exp(bt) \mathbf{e}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} .$$

Længden af hastighedsvektoren i spiralbevægelsen kaldes *farten* i bevægelsen og betegnes $v(t)$. Da hastighedsvektoren er givet ved

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = ab \exp(bt) \mathbf{e}(t) + a \exp(bt) \mathbf{f}(t) ,$$

kan farten $v(t)$ straks bestemmes til

$$v(t) = a \sqrt{1 + b^2} \exp(bt) .$$

Den med fortegn regnede *buelængde* $s(t)$ af spiralkurven fra punktet $P(0)$ til punktet $P(t)$, er dermed givet ved

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = a \sqrt{1 + b^2} \int_0^t \exp(b\tau) d\tau = a \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b} (\exp(bt) - 1) .$$

Ved spiralkurvens *tangentdrejning* $\theta(t)$ ud fra punktet $P(0)$ forstås den vinkel (regnet med fortegn), som tangenten drejer på kurvepunktets vej langs kurven fra $P(0)$ til $P(t)$. Da den logaritmiske spiral er equiangulær følger umiddelbart, at $\theta(t) = t$.

For en vilkårlig kurve beregnes kurvens *krumning* $\kappa(t)$, som tangentdrejningen for kurven per enhed af buelængden. Krumningen for en logaritmisk spiral kan dermed let bestemmes ved udregningen,

$$\kappa(t) = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{v(t)} .$$

Vi kan nu indføre *krumningscirklen* i ethvert kurvepunkt $P(t)$. Krumningscirklen giver den bedste tilnærmelse med en cirkel til kurven i nærheden af $P(t)$. Radius $\rho(t)$ i krumningscirklen kaldes *krumningsradius* i kurvepunktet; den bestemmes som den reciprokke til den absolutte værdi af krumningen i kurvepunktet. For den logaritmiske spiral kan krumningsradius umiddelbart beregnes,

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = v(t) .$$

Stedvektoren til centrum $C(t)$ i krumningscirklen (figur 2), det såkaldte *krumningscentrum*, er givet ved

$$\overrightarrow{OC(t)} = \mathbf{r}(t) + \rho(t) \frac{\hat{\mathbf{v}}(t)}{v(t)} = \mathbf{r}(t) + \hat{\mathbf{v}}(t) = ab \exp(bt) \mathbf{f}(t).$$

Dette udtryk viser, at krumningscentret $C(t)$ også gennemløber en logaritmisk spiral, når $P(t)$ gennemløber den oprindelige spiral. Desuden ser man, at $\overrightarrow{OC(t)}$ fremkommer ved at dreje $\overrightarrow{OP(t)}$ vinklen $\frac{\pi}{2}$ om origo O efterfulgt af en skalering med faktoren b .

En matematisk Nautiluskal

Den matematiske model for en Nautiluskal foreslået i [2], og udbygget i [3], tager udgangspunkt i en logaritmisk spiral givet ved

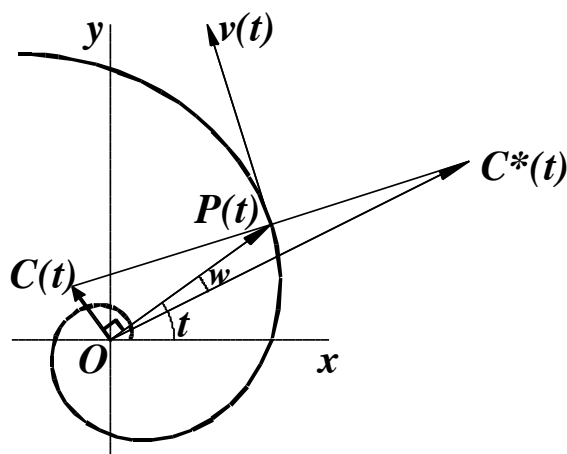
$$\overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{r}(t) = a \exp(bt) \mathbf{e}(t) \quad \text{for } t \in \mathbb{R} .$$

Som det vil fremgå, reduceres de mulige problemer i forbindelse med konstruktionen af fladen, som modellerer den matematiske Nautiluskal, til et spørgsmål om den gensidige beliggenhed af to kurver i planen, der indeholder den logaritmiske spiral.

Konstruktionen af den efterspurgte flade forløber således. I ethvert punkt $P(t)$ af den logaritmiske spiral placeres den tilhørende krumningscirkel, så krumningscentret falder i $P(t)$, og samtidigt drejes den ud i rummet til vinkelret stilling i forhold til både spiralkurven selv og planen for spiralkurven. Derved fremkommer en flade i rummet. For små vinkler u i den logaritmiske spiral er der luft mellem vindingerne i fladen og for store vinkler har den selvgennemskæringer. Som vi nu skal vise, findes der netop én vinkel u for hvilken fladens vinding lukker pænt sammen om spiralen lag mod lag.

Den beskrevne flade skærer planen for den logaritmiske spiral i to kurver. Den indre skæringskurve (i forhold til origo) er netop den logaritmiske spiral, som gennemløbes af krumningscentrene $C(t)$ for den oprindelige logaritmiske spiral. For senere nem reference, omtaler vi denne skæringskurve som *den indre spiral*. Den indre spiral er bestemt ved

$$\overrightarrow{OC(t)} = \mathbf{r}(t) + \rho(t) \frac{\hat{\mathbf{v}}(t)}{v(t)} = \mathbf{r}(t) + \hat{\mathbf{v}}(t) = ab \exp(bt) \mathbf{f}(t).$$



Figur 3: Den ydre spiral

Den ydre skæringskurve (i forhold til origo) omtaler vi som *den ydre spiral*. Den ydre spiral gennemløbes af punkterne $C^*(t)$ (figur 3), som fremkommer ved spejling af krumningscentrene i den oprindelige logaritmiske spiral. Den ydre spiral er derfor bestemt ved

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC^*(t)} &= \mathbf{r}(t) - \rho(t) \frac{\hat{\mathbf{v}}(t)}{v(t)} = \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{v}}(t) \\ &= 2a \exp(bt) \mathbf{e}(t) - ab \exp(bt) \mathbf{f}(t) . \end{aligned}$$

Heraf følger let, at

$$|OC^*(t)| = a \sqrt{4 + b^2} \exp(bt) .$$

Vinklen $\angle(C^*(t)OP(t))$ spiller en afgørende rolle; den benævnes med w (figur 3). Ved regning med skalarproduktet $\mathbf{r}(t) \overrightarrow{OC^*(t)}$ får man, at

$$\cos(w) = \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}} ,$$

som giver ligningen

$$(1) \quad w = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + b^2}}\right) .$$

Punktet $C^*(t)$ ligger også på en logaritmisk spiral, idet

$$\overrightarrow{OC^*(t)} = a \sqrt{4 + b^2} \exp(bt) \mathbf{e}(t - w) .$$

For at vindingen i modelfladen for den matematiske Nautilusskal skal lukke pænt sammen lag mod lag, skal den indre spiral løbe sammen med den ydre spiral efter en forskydning af parameteren. Mere præcist skal punktet $C(t + \frac{3}{2}\pi - w)$ falde i punktet $C^*(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Dette kan kun opfyldes hvis

$$b \exp\left(b\left(t + \frac{3}{2}\pi - w\right)\right) = \sqrt{4 + b^2} \exp(bt) ,$$

som giver ligningen

$$(2) \quad w = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2b} \ln\left(1 + \frac{4}{b^2}\right).$$

Ved en grafisk betragtning ses det, at ligningerne (1) og (2) har en entydig bestemt løsning. Løsningen bestemmes numerisk til

$$b = 0,3741$$

$$w = 0,1849 \text{ rad}.$$

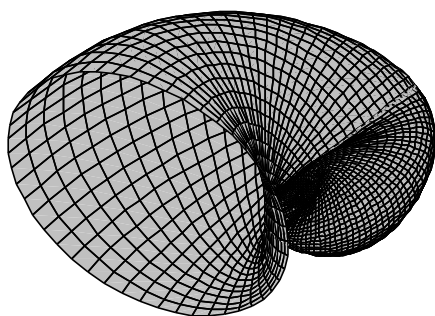
Der findes derfor netop én vinkel u i den underliggende logaritmiske spiral for hvilken fladen lukker pænt sammen. Ved at benytte formlen $\tan(u) = 1/b$ får man numerisk $u = 69,5$ grader.

Resultatet kan gives følgende formulering.

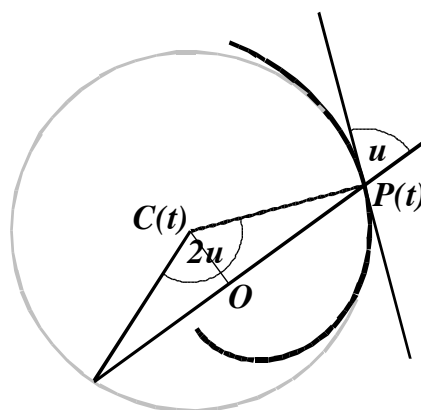
Sætning 3. *For netop én vinkel i den logaritmiske spiral kan krumningscirklerne anbringes omkring spiralen i en Nautilus-lignende skal.*

Figur 4 viser en computertegnet Nautilus.

Halvlinien fra origo O gennem kurvepunktet $P(t)$ på den logaritmiske spiral deler krumningscirklen i $P(t)$ ved en korde, hvor den mindste af de to derved fremkomne cirkelbuer har længden $2u$ radianer (se figur 5). Dette følger ved at bemærke, at korde-tangentvinklen i $P(t)$, der spænder over denne bue, netop er vinklen u . Den omtalte korde deler altså krumningscirklen i forholdet u/π .



Figur 4: Computer Nautilus



Figur 5: Deling af krumningscirklen

Det gyldne snit og Nautilus

Hvis et liniestykke AB ved et punkt C deles i to stykker på en sådan måde, at det mindste delstykke AC forholder sig til det største delstykke CB , som det største delstykke CB forholder sig til hele stykket AB , altså hvis

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AB|},$$

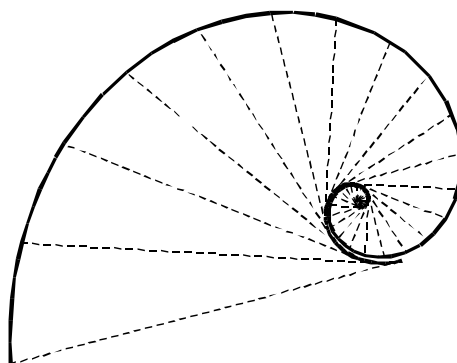
siges punktet C at dele AB i *det gyldne snits forhold* ϕ . En simpel udregning viser, at

$$\phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} .$$

På tilsvarende måde kan man ved en korde dele en cirkel i to delbuer. Hvis de to delbuer opfylder betingelsen svarende til betingelsen ved deling af liniestykker, siger man, at cirklen er delt i *det gyldne snits forhold*, og den mindste af de to delbuer siges at repræsentere *den gyldne vinkel*. Målt i grader har den gyldne vinkel størrelsen 137,5 grader med en decimals nøjagtighed.

På sin hjemmeside [4] omtaler R. Knott, hvordan tallene ϕ og $1 - \phi$ kan sættes i forbindelse med forhold i naturen, fx i placeringen af blade på en plante. Her kan der være en vinkel mellem to på hinanden følgende blade på ca. 137,5 grader, altså den gyldne vinkel.

I den matematiske Nautilusskal deles krumningscirklen for den underliggende logaritmiske spiral i ethvert kurvepunkt i to buer af linien gennem origo og kurvepunktet. Den mindste af buerne har størrelsen $2u$, som med en decimal er 139,0 grader. Når man iagttager, at skallen også skal have en vis tykkelse, er dette meget tæt på den gyldne vinkel. Der afsløres dermed en hidtil upåagtet sammenhæng mellem den logaritmiske spiral og det gyldne snits forhold. I figur 6 vises tværsnittet i en matematisk Nautilusskal konstrueret med halvdelen af den gyldne vinkel som vinkel i den underliggende logaritmiske spiral. Som vi nu skal vise, levner dette plads til en skaltykkelse på ca. 0,9% af skalåbningens diameter.



Figur 6: Skaltykkelse og den gyldne vinkel

Overvejelser vedrørende skaltykkelsen

Antager man, at vinklen u mellem stedvektoren til et punkt på spiralen og tangenten i samme punkt er lig med halvdelen af den gyldne vinkel, altså $180(1 - \phi) \simeq 68,7538$ grader, så får man følgende:

$$b = 1 / \tan(u) \simeq 0,3888$$

$$w = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{4 + b^2}}\right) \simeq 0,1920 \text{ rad} .$$

Hvis spiralen består af flere vindinger, måles tykkelsen $d(t)$ af skallen svarende til parameterværdien t som halvdelen af forskellen mellem den ydre spiral ved parameterværdien og den indre spiral i den næstfølgende vinding, altså ved

$$\begin{aligned} d(t) &= \frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{OC(t + \frac{3}{2}\pi - w)} \right| - \left| \overrightarrow{OC^*(t)} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(ab \exp(b(t + \frac{3}{2}\pi - w)) - a\sqrt{4 + b^2} \exp(bt) \right) \\ &= a \frac{1}{2} \left(b \exp(b(\frac{3}{2}\pi - w)) - \sqrt{4 + b^2} \right) \exp(bt) \\ &= aK \exp(bt) , \end{aligned}$$

hvor $K \simeq 0,1084$. Tykkelsen af skallen er således eksponentielt voksende med samme vækstrate som den oprindelige logaritmiske spiral.

Forholdet mellem skallens tykkelse og skalåbningens diameter kan herefter bestemmes som forholdet mellem $d(t)$ og diameteren i krumningscirklen ved parameterværdien $t + \frac{3}{2}\pi - w$. Man finder,

$$\begin{aligned} \frac{d(t)}{2\rho(t + \frac{3}{2}\pi - w)} &= \frac{aK \exp(bt)}{2a\sqrt{1 + b^2} \exp(b(t + \frac{3}{2}\pi - w))} \\ &= \frac{K}{2\sqrt{1 + b^2} \exp(b\frac{3}{2}\pi - bw)} \\ &\simeq 0,0087 , \end{aligned}$$

altså ca. 0,9%.

Litteratur

- [1] T.A. Cook, *The Curves of Life*, 1914. Dover Publications, 1979.
- [2] V.L. Hansen, *Den geometriske dimension*, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, 1989.
- [3] V.L. Hansen, *Mathematics of a Nautilus Shell*, Institut for Matematik, Danmarks Tekniske Universitet, 2001. Personlig hjemmeside: <http://www.mat.dtu.dk/people/V.L.Hansen/> .
- [4] R. Knott, *Fibonacci Numbers and the Golden Section*, Surrey University, UK. Personlig hjemmeside: <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html> .
- [5] M. Livio, *The Story of PHI, the World's most Astonishing Number*, Broadway, 2003.
- [6] D'Arcy W. Thompson, *On Growth and Form*, Cambridge University Press, 1917. Anden udgave 1942.