Oppgaver

460. Betrakt mengden av alle reelle tallpar (a, b) som er slik at ligningen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

har minst én reell rot. Hva er den minste verdien $a^2 + b^2$ kan ha? (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i 1973.)

461. La $\mathbb{Q}_+$ være mengden av positive rasjonale tall. Bestem alle funksjoner $f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ som er slik at

$$f(1/x) = f(x) \quad \text{og} \quad (x+1)f(x) = xf(x+1) \qquad \text{for alle } x \in \mathbb{Q}_+.$$

(Fra Baltic Way 2003.)

462. La f og g være kontinuerlige funksjoner på intervallet $[0, 1]$, og anta at

$$\int_0^1 \big(f(t)\big)^m \big(g(t)\big)^n \, dt = \frac{1}{(m+1)(n+1)}$$

for alle ikke-negative heltall m og n.

Bevis at kurven gitt ved parameterfremstillingen

$$(x, y) = \big(f(t), g(t)\big), \qquad t \in [0, 1]$$

utfyller kvadratet $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. (Innsendt av Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.)

463. La P være et ikke-konstant polynom med heltallige koeffisienter, og la $n(P)$ være antall distinkte heltall k som er slik at $\big(P(k)\big)^2 = 1$. Vis at $n(P) \le 2 + \deg(P)$, der $\deg(P)$ betegner graden til polynomet P. (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i 1974.)

464. La n være et vilkårlig naturlig tall. Vis at det fins et tall som skrives med bare sifrene 1 og 0 i titallsystemet og er delelig med n. (For eksempel har vi $7 \mid 11011$, $13 \mid 111111$, $15 \mid 1110$ og $19 \mid 11001$.) (Innsendt av Peter Lindqvist, Trondheim, NO.)

Løsninger

443. La (a, b, c) være et primitivt pytagoreisk trippel, dvs. a, b og c er positive heltall med $\gcd(a, b, c) = 1$ og $a^2 + b^2 = c^2$.

(a) Vis at $c - a$ og $c + a$ ikke kan være sidelengder i en og samme pytagoreiske trekant.

(b) Vis at ingen av tallene $c^2 + 4ab$, $c^2 - 4ab$ og $c^2 - 9a^2$ kan være kvadrattall. (Innsendt av Kent Holing, Trondheim, NO.)

(Innsendt av Kent Holing, Trondheim, NO.)

Løsning: Vi vil få bruk for et velkjent resultat som sier at sidelengdene i en primitiv pytagoreisk trekant er av formen r^2-s^2, $2rs$, r^2+s^2, der r og s er innbyrdes primiske naturlige tall som er slik at $r > s$ og $r + s$ er et oddetall. Dessuten får vi nytte av to resultater av Fermat som sier at ingen av de to ligningene $(*)$ $x^4 + y^4 = z^2$ og $(**)$ $x^4 - y^4 = z^2$ har heltallsløsninger med $xyz \neq 0$. (Se f.eks. s. 227–228 i [1].)

(a) (Etter *Pål Grønnås*.) Anta at $c+a$ og $c-a$ er henholdsvis hypotenusen og en katet i en pytagoreisk trekant. Da må $(c+a)^2 - (c-a)^2 = 4ac$ være et kvadrattall, og siden $\gcd(a, c) = 1$, må både c og a være kvadrater, altså $c = \gamma^2$ og $a = \alpha^2$. Det gir $\gamma^4 - \alpha^4 = c^2 - a^2 = b^2$, i strid med Fermats resultat om $(**)$.

Anta så at $c + a$ og $c - a$ begge er kateter i en pytagoreisk trekant. Da må det finnes et tall m slik at $m^2 = (c + a)^2 + (c - a)^2 = 2(c^2 + a^2)$. Det betyr at m og $c^2 + a^2$ må være partall, og dermed må både a og c være oddetall. Ifølge resultatet nevnt i innledningen fins det da r og s slik at $a = r^2 - s^2$ og $c = r^2 + s^2$, og vi får $(m/2)^2 = (c^2 + a^2)/2 = r^4 + s^4$, i strid med Fermats resultat om $(*)$.

(b) Vi observerer at $c^2 - 2ab = (a - b)^2$, c^2 og $c^2 + 2ab = (a + b)^2$ alle er kvadrattall. Ifølge en kjent setning av Fermat (teorem 8 på side 74 i [2]), fins det ikke 4 forskjellige kvadrattall som danner en aritmetisk følge. Derfor kan hverken $c^2 - 4ab$ eller $c^2 + 4ab$ være kvadrattall.

Det gjenstår å vise at $c^2-9a^2 = (c+3a)(c-3a)$ ikke kan være et kvadrat. Vi viser først at hvis c^2-9a^2 er et kvadrattall, så må a være et partall. Anta nemlig at a er et oddetall. Da har vi $c = r^2+s^2$, $a = r^2-s^2$ og $c^2-9a^2 = -8r^4+20r^2s^2-8s^4$. Siden r og s har motsatt paritet, ser vi at $c^2 - 9a^2 \equiv 8 \pmod{16}$. Men ingen kvadrattall er kongruente med 8 modulo 16. Altså er a et partall, og vi har $a = 2rs$.

Siden r og s er innbyrdes primiske og ethvert kvadrattall er kongruent med 0 eller 1 modulo 3, er det klart at $c = r^2 + s^2$ ikke er delelig med 3. Det følger lett at $\gcd(c+3a, c-3a) = 1$ (gcd = «greatest common divisor» = største felles divisor). Hvis $c^2 - 9a^2$ er et kvadrattall, må derfor både $c - 3a$ og $c + 3a$ være kvadrattall. Men nå er både $c - a = (r - s)^2$ og $c + a = (r + s)^2$ kvadrattall, og dermed vil $c - 3a$, $c - a$, $c + a$ og $c + 3a$ danne en aritmetisk følge av fire kvadrattall. Det strider imidlertid mot den nevnte setningen av Fermat.

Bemerkning: Påstandene i oppgaven holder også for ikke-primitive pytagoreiske tripler, for hvis m er en felles faktor i a, b og c, så er m også en faktor i tallene $c - a$ og $c + a$, og m^2 er en faktor i $c^2 + 4ab$, $c^2 - 4ab$ og $c^2 - 9a^2$.

[1] Gareth A. Jones og J. Mary Jones: *Elementary Number Theory*, Springer, 1998.
[2] Wacław Sierpiński: *Elementary Theory of Numbers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964.

Løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO.

Oppgavene 447–450 har vært foreslått til den internasjonale matematikkolympiaden.

447. Vis at det finnes en entydig bestemt uendelig følge u_0, u_1, u_2, $\ldots$ av positive heltall slik at for alle $n \geq 0$ er

$$u_n^2 = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+r}{r} u_{n-r}.$$

Løsning: For $n = 0$ gir ligningen i oppgaven at $u_0^2 = u_0$, og siden u_0 skal være positiv, får vi $u_0 = 1$. For $n > 0$ får vi ligningen

$$u_n^2 - u_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n+r}{r} u_{n-r}. \tag{1}$$

Hvis u_0, u_1, $\ldots$, u_{n-1} alle er positive, vil (1) ha nøyaktig en positiv løsning. Det er dermed klart at den gitte ligningen gir en entydig bestemt følge u_1, u_2, $\ldots$ av positive tall. Direkte utregning viser at $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ og $u_3 = 8$, og vi vil vise at $u_n = 2^n$ for alle $n = 0, 1, 2, \ldots$. Siden løsningen er entydig bestemt, er det nok å vise at

$$S_n := \sum_{r=0}^{n} \binom{n+r}{r} 2^{n-r} = 2^{2n} \qquad \text{for alle } n \geq 0. \tag{2}$$

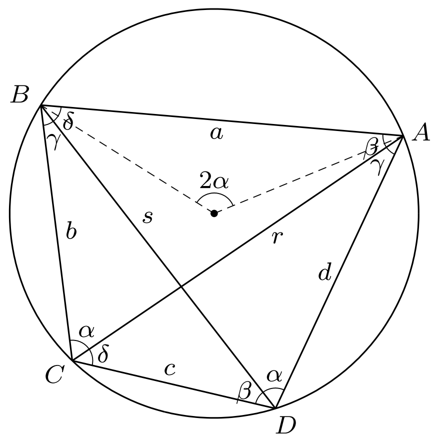
Det følger av det foregående at (2) er riktig for $n = 0$, 1, 2 og 3. Anta nå at (2) holder for $n = k$, der k er et heltall $k \geq 1$. Vi skal vise at da holder (2) også for $n = k+1$. Benytter vi identiteten $\binom{k+1+r}{r} = \binom{k+r}{r-1}\binom{k+r}{r}$ (jf. Pascals trekant), får vi

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= 2^{k+1} + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1+r}{r} 2^{k+1-r} \\
&= 2^{k+1} + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+r}{r-1} 2^{k+1-r} + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+r}{r} 2^{k+1-r} \\
&= 2^{k+1} + \frac{1}{2}\left[S_{k+1} - \binom{2k+2}{k+1}\right] + \left[2\left(S_k - 2^k\right) + \binom{2k+1}{k+1}\right] \\
&= \frac{1}{2} S_{k+1} + 2S_k - \frac{1}{2}\binom{2k+2}{k+1} + \binom{2k+1}{k+1} = \frac{1}{2} S_{k+1} + 2S_k.
\end{aligned}$$

Dette gir $S_{k+1} = 4S_k = 42^{2k} = 2^{2k+2}$, og (2) følger ved induksjon.

Løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Ole Jørsboe, Kongens Lyngby, DK; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

448. Betrakt en konveks firkant som er innskrevet i en sirkel med radius 1, dvs. alle hjørnene i firkanten ligger på sirkelen. Vis at differensen u mellom omkretsen og summen av lengdene av diagonalene tilfredsstiller ulikhetene $0 < u < 2$.



Løsning: (Etter *Knut Dale*, Bø i Telemark, NO.) I firkanten $ABCD$ lar vi $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ og $d = |DA|$ være sidene, mens $r = |AC|$ og $s = |BD|$ er diagonalene. Det gir $u = a+b+c+d-(r+s)$. Videre innfører vi vinklene $\alpha = \angle ACB = \angle ADB$, $\beta = \angle BDC = \angle BAC$, $\gamma = \angle CAD = \angle CBD$ og $\delta = \angle DBA = \angle DCA$. Da er $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$.

Det følger av trekantulikheten at $u > 0$: Ved å addere de fire ulikhetene $r < a+b$, $r < c+d$, $s < b+d$ og $s < d+a$, får vi $2(r+s) < 2(a+b+c+d)$.

Siden sirkelradien er lik 1 og fordi en periferivinkel er halvparten så stor som den tilsvarende sentralvinkelen, er $a = 2\sin\alpha$, $b = 2\sin\beta$, $c = 2\sin\gamma$ og $d = 2\sin\delta = 2\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Dessuten er $r = 2\sin(\alpha+\beta)$ og $s = 2\sin(\beta+\gamma)$. Dette gir

$$u = 2\big(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta+\gamma)\big).$$

Vi vil betrakte uttrykket på høyre side som en funksjon $f(\beta)$ av β, der β gjennomløper intervallet $[0, \pi-(\alpha+\gamma)]$. Bruker vi formlene

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

får vi

$$\begin{aligned} f''(\beta) &= -2\big(\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta) - \sin(\beta+\gamma)\big) \\ &= -4\sin\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}\Big(\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\Big) \\ &= 8\sin\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}\sin\alpha\sin\gamma > 0, \end{aligned}$$

siden $0 < \alpha+2\beta+\gamma < 2\pi$. Det betyr at f er en strengt konveks funksjon. Det følger at

$$u < f(0) = f\big(\pi-(\alpha+\gamma)\big) = 2\sin(\alpha+\gamma) \le 2.$$

Lar vi en side gå mot 0, for eksempel $c \to 0$, ser vi at $u \to a$. Hvis vi nå lar a være en diameter i sirkelen, ser vi at vi kan få u så nær 2 vi vil. Lar vi på den annen side a gå mot 0, ser vi at u også går mot 0.

Også løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

449. La k være et positivt heltall. Sett $a_0 = 0$ og

$$(1) \quad a_{n+1} = k(a_n+1) + (k+1)a_n + 2\sqrt{k(k+1)a_n(a_n+1)} \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vis at a_n er et positivt heltall for alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Løsning: (Etter *Pål Grønnås*, Stjørdal, NO.) Det er klart at $a_1 = k$, og ved induksjon finner vi lett at $a_{n+1} > a_n$ for alle $n \geq 0$. Ved å omordne (1) og kvadrere får vi

$$4k(k+1)a_n(a_n+1) = (a_{n+1} - (2k+1)a_n - k)^2,$$

som vi kan oppfatte som en annengradsligning for a_n. Løser vi denne, får vi

$$a_n = k(a_{n+1}+1) + (k+1)a_{n+1} \pm 2\sqrt{k(k+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)}.$$

Siden $a_n < a_{n+1}$, har vi derfor

$$(2) \qquad a_n = k(a_{n+1}+1) + (k+1)a_{n+1} - 2\sqrt{k(k+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)}.$$

Erstatter vi n med $n+1$ i ligning (1) og adderer til (2), finner vi at

$$a_{n+2} + a_n = 2k(a_{n+1}+1) + 2(k+1)a_{n+1}.$$

Siden $a_0 = 0$, $a_1 = k$ og k er et heltall, følger det at a_n er et heltall for alle $n \geq 0$.

Også løst av: Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

450. La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være positive, reelle tall, $n \geq 2$. Vis at

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leq n - 1$$

Løsning: (Etter en løsning av Murray S. Klamkin.)
La $z_i = x_i^2/(x_{i+1}x_{i+2})$, $i = 1, \ldots, n$, der vi lar $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$. Da er

$$\frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} = \frac{1}{1 + 1/z_i} = \frac{z_i}{1 + z_i} = 1 - \frac{1}{1 + z_i},$$

og vi ser at det er nok å vise at

$$(*) \qquad \frac{1}{1+z_1} + \frac{1}{1+z_2} + \cdots + \frac{1}{1+z_n} \geq 1$$

når $z_i > 0$ for $i = 1, \ldots, n$ og $z_1z_2 \ldots z_n = 1$. Hvis a og b er positive tall med $ab \leq 1$, så er

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{2+a+b}{1+ab+a+b} \geq 1.$$

Siden $(z_1z_2)(z_2z_3)\ldots(z_nz_1) = (z_1z_2\ldots z_n)^2 = 1$, må minst ett av produktene z_iz_{i+1} være mindre eller lik 1, og det følger at de tilsvarende to leddene i $(*)$ har sum ≥ 1. Dermed er hele summen i $(*)$ også ≥ 1. (Vi ser at for $n > 2$ har vi alltid ekte ulikhet, mens direkte utregning viser at vi alltid har likhet for $n = 2$.)

Løst av: Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Tor Skjelbred, Oslo, NO.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, innen 28. februar 2006. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.