Oppgaver

465. Vis at tallet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$$

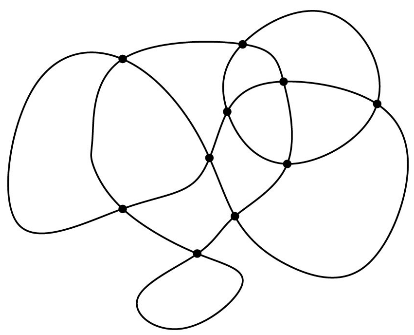
ikke er delelig med 5 for noe heltall $n \geq 0$.

466. Finn alle heltallsløsninger av ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2.$$

467. Det er gitt to sirkler i planet som skjærer hverandre. La A være det ene skjæringspunktet. To punkter, P og Q, starter samtidig fra A og beveger seg med jevn hastighet langs hver sin sirkel i samme omløpsretning. Punktene kommer samtidig tilbake til A etter ett omløp. Vis at det finnes et punkt R i planet slik at vi til enhver tid har $|PR| = |QR|$.

468. Konstruer med passer og linjal en trekant ABC, gitt lengden a av siden BC, høyden h_a fra A på BC, og lengden v_A av vinkelhalveringslinjen fra hjørnet A til BC. (Innsendt av Niels Bejlegaard, Vanløse, DK.)



469. Betrakt en endelig, sammenhengende graf G i planet, som er slik at det går nøyaktig 4 kanter ut fra hvert hjørne (node) i grafen. Grafen deler planet i et endelig antall mangekanter (gjerne med krumme sider). Vis at hvis denne oppdelingen ikke inneholder noen en- eller tokanter, så må den inneholde minst åtte trekanter. (Den ubegrensede delen av planet regnes også med som en av mangekantene.) Figuren viser et eksempel der planet er delt i en 1-kant, en 2-kant, seks 3-kanter, tre 4-kanter og en 7-kant.

Løsninger

451. Angi alle par (a, b) av hele tall med $0 < a < b$ som er slik at en trekant med sidelengder a, b og 49 har to hjørnevinkler i forholdet $1 : 2$. (Innsendt av Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.)

Løsning: (Etter *Pål Grønnås*, Stjørdal, NO.) Det siste kravet i oppgaven innebærer at vinklene i trekanten er α, 2α og $180° - 3\alpha$, der $\alpha < 60°$. La (x, y, z) være en permutasjon av (a, b, c) slik at x og y har henholdsvis α og 2α som motstående vinkler. Av sinussetningen får vi

$$\frac{\sin\alpha}{x} = \frac{\sin 2\alpha}{y} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{y},$$

som gir $2\cos\alpha = y/x$. I kombinasjon med cosinussetningen (den utvidede pytagoreiske setningen) medfører dette at

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha = y^2 + z^2 - \frac{y^2 z}{x}.$$

Av dette får vi

$$x(x+z)(x-z) = (x-z)y^2.$$

Altså må vi ha (1) $x = z$ eller (2) $y^2 = x(x+z)$.

Tilfelle 1: Av sinussetningen får vi $\sin\alpha/x = \sin(180° - 3\alpha)/z$. Siden $x = z$, må vi ha $\alpha = 180° - 3\alpha$, altså $\alpha = 45°$. Da får vi $y/x = 2\cos\alpha = \sqrt{2}$, men det er umulig siden x og y er hele tall og $\sqrt{2}$ er irrasjonal. Dette tilfellet gir følgelig ingen løsning av problemet.

Tilfelle 2: Fra elementær tallteori vet vi at $x = pt^2$ for to naturlige tall p og t, der p er kvadratfritt. Siden $x(x+z) = y^2$, er dermed $x + z = ps^2$ for et naturlig tall $s > t$. Dette innebærer at

$$(x, y, z) = (pt^2, pst, p(s^2 - t^2)).$$

En nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at dette triplet skal kunne utgjøre sidelengdene i en trekant, er $x + y + z > 2 \cdot \max(x, y, z)$. Denne ulikheten er oppfylt hvis og bare hvis $p(s^2 + t^2) > 2z = 2p(s^2 - t^2)$ og $p(s^2 + st) > 2z = 2p(s^2 - t^2)$ (husk at $x < y$), som er ekvivalent med henholdsvis $(s+t)(s-2t) < 0$ og $s(s-t) > 0$, altså $t < s < 2t$.

En av sidelengdene skal være lik 49. Denne forutsetningen gir oss følgende tre muligheter:

- $pt^2 = 49$. Eneste mulighet er $p = 1$ og $t = 7$, så $(x, y, z) = (49, 7s, s^2 - 49)$. Nå er $7 < s < 14$, og det følger at $(a, b) = (s^2 - 49, 7s)$ for $8 \le s \le 11$ og $(a, b) = (7s, s^2 - 49)$ for $12 \le s \le 13$.

- $pst = 49$. Dette gir $s \ge 7$ og $t = 1$, men det er umulig siden $s < 2t$.

- $p(s-t)(s+t) = 49$. Her må vi ha $s-t = 1$, så $s = t+1$. Dermed er $p(2t+1) = 49$. Ergo er enten $p = 2t+1 = 7$ eller $p = 1$ og $2t+1 = 49$. Disse to løsningene gir $(p,s,t) = (7,4,3)$ og $(p,s,t) = (1,25,24)$. I og med at $(a,b) = (x,y)$ i dette tilfellet, får vi løsningene $(a,b) = (63,84)$ og $(a,b) = (576,600)$.

Alt i alt har altså denne oppgaven åtte løsninger.

Også løst av: Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

452. La $P(x)$ være et polynom av grad n som er slik at $P(k) = k/(k+1)$ for $k = 0$, 1, 2, ..., n. Bestem $P(n+1)$. (Fra USAs matematikkolympiade 1975.)

Løsning: La $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Da er $Q(x)$ et polynom av grad $n+1$ som har nullpunkter i $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, så $Q(x) = Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ for en passende konstant A. Setter vi $x = -1$, får vi $1 = A(-1)^{n+1}(n+1)!$, og dermed

$$P(x) = \frac{Q(x)+x}{x+1} = \frac{1}{x+1}\Big(x + (-1)^{n+1}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(n+1)!}\Big).$$

Det gir

$$P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n \text{ er odde,} \\ \frac{n}{n+2} & \text{hvis } n \text{ er jevn.} \end{cases}$$

Løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

453. Gitt en vinkel på $180°/n$, der n er et naturlig tall som ikke er delelig med 3. Vis at denne vinkelen kan tredeles på «euklidsk» vis, altså ved hjelp av bare passer og linjal. (Fra USAs matematikkolympiade 1981.)

Løsning: (Etter *Henrik Meyer*, Birkerød, DK.) Da 3 ikke er divisor i n, er n og 3 primiske, og derfor eksisterer naturlige tall h og k slik at

$$hn - k3 = 1.$$

Herav får vi $1/3n = h/3 - k/n$, og derfor

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{180°}{n} = h \cdot 60° - k \cdot \frac{180°}{n}.$$

Dette beviser påstanden.

Også løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.

454. For et gitt reelt tall x_1 konstruerer vi følgen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ved å sette

$$x_{n+1} = x_n\Big(x_n + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Vis at det eksisterer nøyaktig en verdi av x_1 som er slik at $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ for alle $n \geq 1$. (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i 1985.)

Løsning: (Etter Murray Klamkin.) Det er klart at hvis $x_1 > 0$, så blir $x_n > 0$ for alle naturlige tall n. Da er $x_n < x_{n+1}$ hvis og bare hvis $x_n > 1-1/n$. Hvis vi nå definerer polynomer $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$ ved $P_1(x) = x$ og $P_{n+1}(x) = P_n(x)(P_n(x) + \frac{1}{n})$ for $n \geq 1$, ser vi at $x_n = P_n(x_1)$ for alle $n \geq 1$. Problemet kan derfor reformuleres til følgende:

Vis at det fins nøyaktig ett positivt tall x_1 slik at

$$1 - \frac{1}{n} < P_n(x_1) < 1 \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Polynomene P_1, P_2, $\ldots$ har bare ikke-negative koeffisienter og er derfor voksende og konvekse over den positive delen av tall-linjen. Videre er $P_n(0) = 0$ og $P_n(1) \geq 1$. For hver $n \geq 1$ fins det derfor entydig bestemte tall a_n og b_n slik at $0 < a_n < b_n \leq 1$, $P_n(a_n) = 1 - 1/n$ og $P_n(b_n) = 1$. Nå er

$$P_{n+1}(a_n) = P_n(a_n)\Big(P_n(a_n) + \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot 1 < 1 - \frac{1}{n+1} = P_{n+1}(a_{n+1}).$$

Det følger at $a_n < a_{n+1}$. På tilsvarende måte ser vi at $P_{n+1}(b_n) = 1 + 1/n > P_{n+1}(b_{n+1})$, og dermed $b_n > b_{n+1}$. Vi har dermed fått en strengt voksende tallfølge $\{a_n\}$ og en strengt avtagende tallfølge $\{b_n\}$. Siden $a_n < b_n$, er følgene begrensede og derfor også konvergente.

Siden P_n er en konveks funksjon, vil grafen til P_n over intervallet $[0, b_n]$ ligge under det rette linjen $y = x/b_n$ som går gjennom origo og punktet $(b_n, P_n(b_n)) = (b_n, 1)$. Spesielt er derfor $P_n(a_n) \leq a_n/b_n$, så $a_n \geq P_n(a_n)b_n = b_n - b_n/n$. Altså har vi

$$b_n - a_n \leq \frac{b_n}{n} \leq \frac{1}{n}\,.$$

Derfor må de to konvergente følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergere mot en felles grenseverdi λ. Tallet λ er da det entydig bestemte positive tallet som er slik at

$$1 - \frac{1}{n} < P_n(\lambda) < 1 \quad \text{for alle } n \geq 1.$$

Løst av: Jørgen Hilden, København, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Norvald Midttun, Bergen, NO; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Tor Skjelbred, Oslo, NO.

455. (a) Vis at

$$[5x] + [5y] \geq [3x + y] + [x + 3y]$$

for alle ikke-negative reelle tall x og y. (For et reelt tall t betegner $[t]$ heltallsverdien av t, det vil si det største hele tallet k som er slik at $k \leq t$.)

(b) Vis at

$$\frac{(5m)!\,(5n)!}{m!\,n!\,(3m+n)!\,(3n+m)!}$$

er et helt tall for alle naturlige tall m og n.

(Fra USAs matematikkolympiade 1975.)

Løsning: (Etter en versjon av Murray Klamkin.)

(a) La $x_1 = [x]$ og $y_1 = [y]$. Da er $x = x_1 + u$ og $y = y_1 + v$, der $0 \leq u, v < 1$. Ulikheten som skal vises, er da ekvivalent med

$$x_1 + y_1 + [5u] + [5v] \geq [3u + v] + [u + 3v].$$

Vi skal vise den sterkere ulikheten

$$[5u] + [5v] \geq [3u + v] + [u + 3v]. \tag{1}$$

På grunn av symmetrien kan vi åpenbart anta at $u \geq v$. Da er $[5u] \geq [3u+v]$. Hvis vi også har $u \leq 2v$, får vi også $[5v] \geq [u + 3v]$. Det gjenstår å undersøke tilfellet $u > 2v$. La $a = [5u]$ og $b = [5v]$, slik at $5u = a + \alpha$ og $5v = b + \beta$, der $0 \leq \alpha, \beta < 1$. Da kan (1) skrives som

$$a + b \geq \left[\frac{3a + 3\alpha + b + \beta}{5}\right] + \left[\frac{a + \alpha + 3b + 3\beta}{5}\right]. \tag{2}$$

Siden $1 > u > 2v$, er $5 > 5u > 10v$, altså $5 > a + \alpha > 2b + 2\beta$. Den første ulikheten her gir $5 > a$, så $4 \geq a$ (husk at a er et helt tall). Videre er $a \geq 2b$, for hvis $a < 2b$, ville vi ha $a \leq 2b - 1$, altså $a + 1 - 2b \leq 0$, og dermed $a + \alpha - 2b < 0$. Men det strider mot ulikheten $a + \alpha > 2b + 2\beta$.

Vi sitter derfor igjen med 9 mulige verdier for paret (a, b), nemlig

$$(0,0),\ (1,0),\ (2,0),\ (2,1),\ (3,0),\ (3,1),\ (4,0),\ (4,1),\ (4,2).$$

Det er nå enkelt å vise at ulikheten (2) holder i hver av disse 9 situasjonene, siden $3\alpha + \beta < 4$ og $\alpha + 3\beta < 4$.

(b) Den høyeste potensen av et primtall p som går opp i $m!$, er

$$\left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \cdots .$$

Det er derfor tilstrekkelig å vise at

$$\left[\frac{5m}{r}\right] + \left[\frac{5n}{r}\right] \geq \left[\frac{m}{r}\right] + \left[\frac{n}{r}\right] + \left[\frac{3m + n}{r}\right] + \left[\frac{3n + m}{r}\right] \tag{3}$$

for ethvert helt tall $r \geq 2$. Setter vi $m = rm_1 + x$ og $n = rn_1 + y$, der m_1, n_1, x og y er hele tall og $0 \leq x, y < r$, blir ulikheten (3) til

$$\left[\frac{5x}{r}\right] + \left[\frac{5y}{r}\right] \geq \left[\frac{3x + y}{r}\right] + \left[\frac{3y + x}{r}\right],$$

og dette følger umiddelbart fra (a).

Løst av: Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Henrik Meyer, Birkerød, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Tor Skjelbred, Oslo, NO.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, innen 30. juni 2006. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.