 Normat **54**:3, 116–133 (2006)

Ortogonale polynomier og Hilbertmatricen

Christian Berg

Institut for Matematiske Fag
Universitetsparken 5
DK 2100 København Ø
Danmark
berg@math.ku.dk

Resumé

I artiklen gives en kort introduktion til teorien for ortogonale polynomier og deres forbindelse til Hankelmatricer, dvs. matricer hvor elementet på i,j'te plads kun afhænger af summen af disse indices. Vigtige eksempler er Hilbertmatricerne, som indeholder reciprokke naturlige tal, og de analoge "Filbertmatricer", hvor elementerne er reciprokke Fibonacci tal.

Som et vigtigt eksempel på ortogonale polynomier betragtes Legendrepolynomierne. De har heltallige koefficienter, og der vises hvorledes dette kan bruges til at indse, at de inverse til Hilbertmatricerne har heltallige elementer.

Til sidst nævnes nogle nyere resultater, som forbinder det indeterminerede moment problem med forskellige områder af matematikken.

1 Indledning

I elementær matrixregning møder man *Hilbertmatricen*

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

hvis ij'te element er $1/(i+j+1)$, når man nummererer de $n+1$ rækker og søjler med tallene $0,1,\ldots,n$. For små værdier af n kan man let udregne determinanten og den inverse matrix. For $n=1,2$ finder man $\det(H_1)=1/12,\ \det(H_2)=1/2160$ og

$$H_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Det overraskende er, at de inverse matricer får heltallige elementer, og at determinanten følgelig bliver en stambrøk, altså en brøk af formen $1/k$ for et naturligt tal k. Hilbertmatricen blev introduceret af Hilbert i [15], hvor der gives en formel for determinanten. Hilbertmatricen og dens uendelig dimensionale variant har en række interessante egenskaber, som findes behandlet i [12]. Hvis man ønsker at udregne den inverse matrix på computer og repræsenterer stambrøkerne ved decimalbrøker opdager man, at der kan ske betydelige afrundingsfejl.

D. Hilbert år 1900

Den kendsgerning, at

$$\frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 x^{i+j}\,dx,$$

som kan udtrykkes, at Hilbertmatricen er Hankelmatricen (s_{i+j}) hørende til momenterne $s_n = 1/(n+1)$ for Lebesguemålet på enhedsintervallet, jfr. detaljerne nedenfor, fik mig til at spekulere på om ikke egenskaber ved de tilhørende ortogonale polynomier, nemlig *Legendrepolynomierne*, skulle kunne forklare, at de reciprokke Hilbertmatricer er heltallige, og det viste sig at være tilfældet. Dette er motiveringen for nærværende arbejde.

I de sidste 20 år har der været stor matematisk aktivitet i området ortogonale polynomier og specielle funktioner. Der kan fremhæves mange grunde til det og lad mig nævne fem:

Med de fantastiske beregningsmuligheder som computerne har givet, har der været behov for at raffinere de eksisterende teoretiske metoder. De klassiske ortogonale polynomier har altid spillet en vigtig rolle via Gauss kvadratur.

Computerne har gjort det meget nemmere end tidligere at teste hypoteser om specielle funktioner.

Teorien for q-serier eller q-specielle funktioner, der går tilbage til Heine, har fået en renæssance bl.a. på grund af fysiske teorier om kvantedeformation. Værket [14] har haft stor betydning og kan opfattes som en statusrapport over vores viden på området.

Det blev observeret, at adskillige af Ramanujans opdagelser kunne forstås i et nyt lys ved teorien for ortogonale polynomier. Her skal henvises til R. Askeys vidunderlige artikel [4], hvor han bl. a. påpeger, at flere af Ramanujans besynderlige formler kan fortolkes som løsninger til indeterminerede momentproblemer, som er momentproblemer, hvor der er forskellige sandsynlighedsmål med de samme momenter. Min egen forskning har i en årrække været orienteret mod det indeterminerede momentproblem, se f. eks. [6].

Nyere talteoretiske resultater har kunnet bevises på elegant måde ved inddragelse af polynomial approksimation via ortogonale polynomier. For eksempel kan Apérys sensationelle resultat om irrationaliteten af værdien af Riemanns zetafunktion for $x = 3$

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

bevises ved udnyttelse af Legendrepolynomierne for intervallet $]0,1[$, se [5, Afsnit 7.7]. Det er de samme ortogonale polynomier vi skal udnytte i dette arbejde for at indse, at den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.

2 Ortogonale Polynomier

Vi antager, at der er givet et sandsynlighedsmål μ på den reelle tallinje $\mathbb{R}$, og vi betragter målets *momenter*

$$s_n = s_n(\mu) = \int x^n \, d\mu(x), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

som antages at eksistere. Se eksemplerne i skemaet nedenfor. Det er nu muligt at indføre et skalarprodukt på vektorrummet $\mathbb{P}$ af polynomier med reelle koefficienter ved

$$\langle p, q\rangle = \int p(x)q(x)\, d\mu(x), \qquad p, q \in \mathbb{P}. \tag{3}$$

Med til kravet for et skalarprodukt hører, at $\|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} = 0$ kun er muligt, når p er nulpolynomiet. Af $\int p(x)^2 \, d\mu(x) = 0$ skal altså følge, at p er nulpolynomiet. Da et egentligt polynomium kun har endeligt mange rødder, må vi kræve, at sandsynlighedsmålet μ ikke er koncentreret i endeligt mange punkter. Mængden af sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$ med vilkårlige momenter og som ikke er koncentreret i endeligt mange punkter betegnes $\mathcal{M}^*$.

Lad der nu være givet $\mu \in \mathcal{M}^*$. Gennemføres Gram–Schmidt ortonormalisering af monomierne $1, x, x^2, \ldots$ opnås en følge $(P_n)_{n\geq 0}$ kaldet de *ortonormale polynomier* knyttet til μ, og som er entydigt bestemt ved kravene

(i) P_n er et polynomium af grad n med positiv ledende koefficient,

(ii) $$\int P_n(x)P_m(x)\, d\mu(x) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{for } n = m \\ 0, & \text{for } n \neq m. \end{cases}$$

Da μ har masse 1 må $P_0(x) = 1$. Hvis $(k_n)_{n\geq 0}$ er en følge af tal så $k_0 = 1$, $k_n \neq 0$ for $n \geq 1$, så vil polynomierne $p_n = k_n P_n$ i stedet for (ii) opfylde

$$\int p_n(x)p_m(x)\, d\mu(x) = k_n^2 \delta_{n,m}.$$

De ortonormale polynomier P_n er især nyttige ved teoretiske overvejelser, men de klassiske ortogonale polynomier er sædvanligvis givet som $p_n = k_n P_n$ med en passende følge k_n.

Lad os se på nogle vigtige eksempler i følgende skema:

Sandsynlighedsmål	Momentfølge	Ortogonale polynomier
$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx$	$\begin{cases} s_{2n} = 1\cdot 3\cdots(2n-1) \\ s_{2n+1} = 0 \end{cases}$	Hermitepolynomier
$e^{-x} 1_{]0,\infty[}(x)\,dx$	$s_n = n!$	Laguerrepolynomier
$1_{]0,1[}(x)\,dx$	$s_n = \frac{1}{n+1}$	Legendrepolynomier
$e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\delta_k$	$s_n = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n a^k}{k!}$	Charlierpolynomier

I dette skema har de tre første mål tætheder med hensyn til Lebesgue målet, medens det sidste mål er diskret og afhænger af en parameter $a > 0$, idet δ_k betegner det sandsynlighedsmål, der har massen 1 koncentreret i tallet k. For et interval I betegner 1_I indikatorfunktionen for I givet ved

$$1_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x \in I \\ 0, & \text{for } x \notin I. \end{cases}$$

Det skal bemærkes, at Legendrepolynomierne ofte henføres til intervallet $]-1,1[$, og at der for dette interval betragtes familien af Jacobipolynomier hørende til målet

$$c(\alpha,\beta)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta 1_{]-1,1[}(x)\,dx,$$

idet konstanten $c(\alpha,\beta)$ er fastlagt, så målet bliver et sandsynlighedsmål. Konstanten kan udtrykkes ved Eulers betaintegral, se f.eks. [5], og man må kræve $\alpha,\beta > -1$. Legendrepolynomierne (for $]-1,1[$) hører til det specielle valg $\alpha = \beta = 0$. Normalt betragtes også mere generelle Laguerrepolynomier end ovennævnte, idet man betragter målet

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-x} 1_{]0,\infty[}(x)\,dx,$$

hvor $\alpha > -1$ er en parameter. Ved at have divideret med Eulers Gammaintegral fås et sandsynlighedsmål. Laguerrepolynomierne fra skemaet hører til $\alpha = 0$.

Hermite, Laguerre og Jacobipolynomierne kaldes under et de klassiske ortogonale polynomier. Man kan vise, at der ikke er andre muligheder (bortset fra skalering af intervallerne), hvis man samtidig ønsker, at polynomierne skal være løsninger til en differentialligning af anden orden. Dette resultat går tilbage til Bochner (1929).

Der er også en række andre egenskaber, der karakteriserer de klassiske ortogonale polynomier, se f. eks. [2].

Lad mig nævne nogle vigtige sandsynlighedsmål (også kaldet fordelinger), som ikke fører til ortogonale polynomier i sædvanlig forstand.

For *binomialfordelingen*

$$\mu = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} r^k (1-r)^{N-k} \delta_k,$$

hvor $0 < r < 1$ er en parameter, vil μ ikke tilhøre $\mathcal{M}^*$ da $\|p\| = 0$ for $p(x) = x(x-1)\cdots(x-N)$. Cauchyfordelingen $1/(\pi(1+x^2))\,dx$ tilhører heller ikke $\mathcal{M}^*$, men det er fordi den ikke har momenter af orden ≥ 1, idet $|x|^\alpha$ er integrabel med hensyn til Cauchyfordelingen netop når $\alpha < 1$.

Vedrørende den generelle teori for ortogonale polynomier henvises til de klassiske værker af Szegő [22] og Akhiezer [1], til Chiharas bog [11] og til det helt nye monumentale værk af Ismail [16]. De vigtigste ortogonale polynomier optræder i det såkaldte Askey-skema eller dets q-version. Det er de polynomier der kan fremstilles som hypergeometriske funktioner eller q-hypergeometriske funktioner op til niveauet ${}_4F_3$ henholdsvis ${}_4\varphi_3$. Vi henviser også til Kaijsers artikel [17] om de ortogonale polynomier med hensyn til målet

$$\mu = \frac{1}{2\cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\,dx.$$

Det er værd at bemærke, at skalarproduktet (3) kun afhænger af momenterne, for hvis

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l \tag{4}$$

så finder vi

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} s_{k+l} a_k b_l, \tag{5}$$

som fremhæver betydningen af matricerne

$$H_n = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

kaldet *Hankelmatricerne*. Læg mærke til at det i,j'te element i $(n+1)\times(n+1)$ matricen H_n er s_{i+j}, idet der er tradition for at nummerere rækker og søjler fra 0 til n. Matricen H_n er symmetrisk og den tilhørende kvadratiske form hænger sammen med skalarproduktet

$$\langle p, p \rangle = (a_0, a_1, \ldots, a_n) H_n (a_0, a_1, \ldots, a_n)^t,$$

idet p er som i (4) og $(a_0, a_1, \ldots, a_n)^t$ er en søjlevektor. Dette udtryk viser også, at matricen H_n er positivt definit, og dermed er $D_n := \det H_n > 0$ for hvert n.[1]

Det er iøvrigt en simpel øvelse i determinantteori at vise, at P_n kan udtrykkes på følgende måde (idet vi sætter $D_{-1} = 1$)

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Ved at udvikle determinanten efter sidste række ser man nemlig, at formlen (6) definerer et polynomium P_n af n'te grad og den ledende koefficient er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n}, \tag{7}$$

så (i) er opfyldt. For at se (ii) udnyttes også udvikling af determinanten efter sidste række, så for $k \le n$ er

$$\int P_n(x)x^k \, d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{k+n} \end{vmatrix},$$

som er 0 for $k < n$ fordi to rækker er ens, og for $k = n$ er udtrykket lig med

$$\frac{D_n}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}.$$

Heraf fås altså, at P_n er ortogonal på alle monomier x^k med $k \le n-1$ og dermed på alle polynomier af grad $\le n-1$. Udnyttes dette kan vi skrive

$$\int P_n^2(x) \, d\mu(x) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}} \int P_n(x)x^n \, d\mu(x) = 1,$$

og vi har vist, at også (ii) gælder.

3 Christoffel–Darboux's summationsformel

I teorien for Fourier rækker spiller Dirichlets kerne en vigtig rolle, idet den tillader beregning af rækkens afsnit. I teorien for ortogonale polynomier spiller kernen

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_k(y) \tag{8}$$

[1] En berømt Sætning af Hamburger fra 1920 karakteriserer momentfølgerne ved disse egenskaber: *Lad* (s_n) *være en reel talfølge med egenskaberne* $D_n := \det H_n > 0$ *for alle* $n \ge 0$ *og antag* $s_0 = 1$. *Så er* (s_n) *momentfølge for et passende* $\mu \in \mathcal{M}^*$.

en analog rolle. Ortogonaludviklingen for en funktion f med hensyn til (P_n) er den uendelige række

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x), \qquad \text{hvor } c_k = \int f(x) P_k(x)\, d\mu(x).$$

Man ser let, at rækkens afsnit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ er bestemt ved formlen

$$S_n(x) = \int f(y) K_n(x,y)\, d\mu(y). \tag{9}$$

Der vides iøvrigt næsten intet om punktvis konvergens af ovenstående ortogonaludvikling i det generelle tilfælde.

Som optakt til Christoffel–Darboux's formel for kernen $K_n(x,y)$ skal vi først redegøre for et andet nøgleresultat om ortogonale polynomier. Ortogonaludviklingen for $xP_n(x)$ er den endelige sum

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c(n,k) P_k(x), \tag{10}$$

hvor

$$c(n,k) = \int x P_n(x) P_k(x)\, d\mu(x), \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Polynomiet P_n er ortogonalt på alle polynomier af grad $\leq n-1$ og specielt på $xP_k(x)$ for $k \leq n-2$. Dette viser, at der er højst 3 led i summen (10). Sættes for $n = 0, 1, \ldots$

$$a_n = \int x P_n^2(x)\, d\mu(x), \quad b_n = \int x P_n(x) P_{n+1}(x)\, d\mu(x), \tag{11}$$

har vi klart $c(n,n) = a_n$, $c(n,n+1) = b_n$ men også (for $n \geq 1$)

$$c(n, n-1) = \int x P_n(x) P_{n-1}(x)\, d\mu(x) = b_{n-1}.$$

Udnyttes, at den ledende koefficient i $P_n(x)$ er givet ved (7), så ser man let af (11), at b_n er givet ved udtrykket i følgende hovedresultat:

Sætning 3.1 (Treleds-rekursionen) *Lad følgerne $(a_n), (b_n)$ være defineret ved* (11). *Så gælder*

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= b_n P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) + b_{n-1} P_{n-1}(x), \qquad n \geq 1, \\ xP_0(x) &= b_0 P_1(x) + a_0 P_0(x). \end{aligned}$$

Videre gælder

$$b_n = \frac{\sqrt{D_{n-1} D_{n+1}}}{D_n} > 0, \qquad n \geq 0.$$

Ved at definere $P_{-1} = 0$ behøver man ikke huske specialtilfældet $n = 0$ i treleds-rekursionen. Ved at udnytte denne 2 gange finder man ved lidt regning

$$(x-y)P_k(x)P_k(y) = \\ b_k\big(P_{k+1}(x)P_k(y) - P_k(x)P_{k+1}(y)\big) - b_{k-1}\big(P_k(x)P_{k-1}(y) - P_{k-1}(x)P_k(y)\big).$$

Summeres dette udtryk for $k = 0, 1, \ldots, n$ og udnyttes, at højresiden teleskoperer fås:

Sætning 3.2 (Christoffel–Darboux's summationsformel)

$$(x-y)K_n(x,y) = b_n\big(P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)\big).$$

Vi skal nu give et andet udtryk for $K_n(x,y)$, som er afgørende for de talteoretiske aspekter af dette arbejde.

Det er uden videre klart, at vi kan skrive

$$K_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}^{(n)} x^i y^j, \tag{12}$$

hvor tallene $a_{i,j}^{(n)}$ er entydigt bestemt og $a_{i,j}^{(n)} = a_{j,i}^{(n)}$. Samles disse tal i en $(n+1)\times(n+1)$-matrix $A_n = (a_{i,j}^{(n)})$, så er denne matrix den inverse til Hankelmatricen H_n:

Sætning 3.3 *Der gælder*

$$A_nH_n = H_nA_n = E_n,$$

idet E_n er enhedsmatricen af orden $n+1$.

Bevis. For $0 \le k < m$ er $\int x^k P_m(x)\,d\mu(x) = 0$, så for $0 \le k \le n$ er

$$\int x^k K_n(x,y)\,d\mu(x) = \sum_{m=0}^{k} P_m(y)\int x^k P_m(x)\,d\mu(x) \tag{13}$$

et polynomium i y af grad $\le k$. På den anden side har vi

$$\int x^k K_n(x,y)\,d\mu(x) = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{n} s_{k+i}a_{i,j}^{(n)}\Big)y^j,$$

og derfor er

$$\sum_{i=0}^{n} s_{k+i}a_{i,j}^{(n)} = 0,$$

når $k < j \le n$, og når $j = k$ er summen lig med koefficienten til y^k i (13), altså netop lig med

$$\sqrt{D_{k-1}/D_k}\int x^k P_k(x)\,d\mu(x) = \int P_k^2(x)\,d\mu(x) = 1.$$

Da matricen H_nA_n er symmetrisk, viser ovenstående, at den er enhedsmatricen. □

Selv om det ikke er relevant for denne fremstilling, er der god grund til at gøre opmærksom på, at treleds-rekursionen karakteriserer ortogonale polynomier.

Sætning 3.4 (Favards Sætning) *Lad $(a_n), (b_n)$ være to vilkårlige reelle talfølger og antag at $b_n > 0$ for alle n. Sæt $P_{-1} = 0, P_0 = 1$ og definér polynomierne $(P_n)_{n\geq 1}$ successivt ved treleds-rekursionen*

$$xP_n(x) = b_nP_{n+1}(x) + a_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x), n \geq 0.$$

Med disse forudsætninger findes $\mu \in \mathcal{M}^*$, så (P_n) er de ortonormale polynomier knyttet til μ.

Sætningen blev formuleret og bevist af Favard[2] i 1935, men det er blevet påpeget, at resultatet har været kendt før i mindre eksplicit form, se [11, p. 21].

4 Legendrepolynomier

Vi skal nu studere tilfælde III i skemaet fra paragraf 2.

Sætning 4.1 *Polynomierne*

$$p_n(x) = \frac{1}{n!}D^n\left[x(1-x)\right]^n, \qquad n \geq 0 \tag{14}$$

er ortogonale med hensyn til målet $\mu = 1_{]0,1[}(x)\,dx$, og de tilhørende ortonormale polynomier er givet ved

$$P_n(x) = (-1)^n\sqrt{2n+1}p_n(x). \tag{15}$$

Polynomierne p_n har heltallige koefficienter og er givet ved formlen

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{n}x^k. \tag{16}$$

Bevis. Formel (14) kaldes Rodrigues' formel efter den fransk matematiker og bankier O. Rodrigues, om hvem der for nylig er udkommet en biografi [3].

[2] J. Favard(1902-65), fransk matematiker. Han tilbragte en periode omkring 1925 i København for at studere næstenperiodiske funktioner hos Harald Bohr.

O. Rodrigues (1794-1850)

Ved Leibniz' formel for den n'te afledede af et produkt af to funktioner følger straks, at polynomiet p_n givet ved (14) er af n'te grad og givet eksplicit ved (16). For en funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som er n gange kontinuert differentiabel på intervallet $[0,1]$, finder man ved gentagen partiel integration

$$\int_0^1 f(x)p_n(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \big[x(1-x)\big]^n f^{(n)}(x)\,dx.$$

Anvendes dette på $f(x) = x^k, k \le n$ får vi

$$\int_0^1 x^k p_n(x)\,dx = 0, \quad k < n; \quad \int_0^1 x^n p_n(x)\,dx = (-1)^n \int_0^1 \big[x(1-x)\big]^n\,dx,$$

men det sidste integral er let at regne ud til

$$\int_0^1 \big[x(1-x)\big]^n\,dx = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Da p_n har den ledende koefficient $(-1)^n\binom{2n}{n}$ følger, at de ortonormale polynomier er givet ved (15).

Bemærk, at $p_n(0) = 1$ for alle n. $\square$

Da momentfølgen er $s_n = 1/(n+1)$ ser vi, at Hankelmatricen H_n er en matrix af stambrøker

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix},$$

altså Hilbertmatricen fra indledningen. Den er positivt definit og der gælder

$$D_n = \frac{[(1!)(2!)\cdots(n!)]^4}{(1!)(2!)\cdots(2n+1)!}. \tag{17}$$

For at se (17) bemærker vi, at den ledende koefficient til P_n er

$$\sqrt{D_{n-1}/D_n} = \sqrt{2n+1}\binom{2n}{n}$$

ifølge (7), altså

$$\frac{D_{n-1}}{D_n} = (2n+1)\binom{2n}{n}^2 = \frac{(2n+1)!(2n)!}{(n!)^4},$$

og heraf fremgår formel (17), som skyldes Hilbert, se [15]. Det fremgår også, at $1/D_n$ er et helt tal. Der gælder imidlertid meget mere som påvist i [12]:

Sætning 4.2 *Den inverse matrix til Hilbertmatricen har heltallige indgange.*

Bevis. Vi skal blot vise, at matricen A_n har heltallige indgange. Af (15) og (16) fremgår, at

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)p_k(x)p_k(y)$$

har heltallige koefficienter til $x^i y^j$, men det er netop indgangene i matricen A_n. □

Bemærkning 4.3 I Chois arbejde [12] kan man finde formlen (17), men også en eksplicit formel for elementerne i A_n, som klart viser, at de er hele tal:

$$a_{i,j}^{(n)} = (-1)^{i+j}(i+j+1)\binom{n+1+i}{n-j}\binom{n+1+j}{n-i}\binom{i+j}{i}^2. \tag{18}$$

Choi giver ikke et detaljeret bevis for formlen. Han nøjes med en bemærkning om, at den kan bevises ved induktion eller alternativt ved udnyttelse af en determinant formel, der går tilbage til Cauchy.

Hvis vi indsætter formlen (16) i udtrykket ovenfor for $K_n(x,y)$ finder vi følgende udtryk:

$$a_{i,j}^{(n)} = (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^{n} (2k+1)\binom{k}{i}\binom{k}{j}\binom{k+i}{k}\binom{k+j}{k}. \tag{19}$$

Den identitet, der fremgår ved at sammenholde (18) og (19), kan vises ved induktion i n. Kaldes den numeriske værdi af højresiden i (18) for R_n og leddet i summen (19) for C_k, så består induktionsskridtet i formlen $R_{n+1} - R_n = C_{n+1}$, hvis bevis overlades til læseren.

5 Nogle polynomier relateret til Legendrepolynomierne

Målet $\mu = 2x1_{]0,1[}(x)\,dx$ tilhører $\mathcal{M}^*$ og det har momenterne og n'te Hankelmatrix

$$s_n(\mu) = \frac{2}{n+2}, \quad H_n = \left(\frac{2}{i+j+2}\right)_{0\le i,j\le n}, \qquad n = 0,1,\ldots.$$

Også i dette tilfælde har den inverse matrix A_n heltallige indgange, idet de ortogonale polynomier kan udtrykkes ved Legendrepolynomierne p_n på følgende måde:

Sætning 5.1 *Polynomierne*

$$r_n(x) = \frac{p_n(x) - p_{n+1}(x)}{2x} \tag{20}$$

er ortogonale med hensyn til målet $\mu = 2x1_{]0,1[}(x)\,dx$, og de tilhørende ortonormale polynomier er givet ved

$$R_n(x) = (-1)^n\sqrt{n+1}\,r_n(x). \tag{21}$$

Polynomierne r_n har heltallige koefficienter og er givet ved formlen

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k+1}{n}x^k. \tag{22}$$

Bevis. Da $p_n(0) = 1$ for alle n, er r_n et polynomium af grad n, og det er klart ortogonalt på polynomier af grad $\le n-1$ med hensyn til μ. Da den ledende koefficient i r_n er

$$\frac{1}{2}(-1)^n\binom{2n+2}{n+1} = (-1)^n\binom{2n+1}{n}, \tag{23}$$

og da

$$\int_0^1 r_n(x)x^n\,d\mu(x) = \int_0^1 p_n(x)x^n\,dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

ifølge paragraf 4, ser man at

$$\int_0^1 r_n(x)^2\,d\mu(x) = \frac{\binom{2n+1}{n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n+1}.$$

Dette viser, at de tilhørende ortonormale polynomier R_n er givet ved (21). En lille regning med binomialkoefficienter leder fra (16) til (22). □

Bemærkning 5.2 Ved at udnytte (7) finder man i analogi med (17), at

$$\det\left(\frac{1}{i+j+2}\right)_0^n = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\frac{(1!\,2!\cdots n!)^4}{\big(1!\,3!\cdots(2n+1)!\big)^2} \tag{24}$$

er en stambrøk, og at den inverse matrix til $\big(1/(i+j+2)\big)_0^n$ har det ij'te element

$$(-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^{n} (2k+2)\binom{k}{i}\binom{k}{j}\binom{k+i+1}{k}\binom{k+j+1}{k}$$

$$= (-1)^{i+j}(i+j+2)\binom{n+i+2}{n-j}\binom{n+j+2}{n-i}\binom{i+j+1}{i}\binom{i+j+1}{j},$$

som altid er et lige tal.

Substitutionen $x = 1-y$ i integralet

$$\int_0^1 r_n(x)r_m(x)2x\,dx = \frac{\delta_{n,m}}{n+1}$$

viser, at polynomierne $q_n(x) = r_n(1-x)$ er ortogonale med hensyn til målet $\nu = 2(1-x)1_{]0,1[}(x)\,dx \in \mathcal{M}^*$. Momenterne er

$$s_n(\nu) = \int_0^1 x^n 2(1-x)\,dx = \frac{1}{\binom{n+2}{2}},$$

og de tilhørende ortonormale polynomier $Q_n(x)$ er givet ved

$$Q_n(x) = \sqrt{n+1}\,q_n(x). \tag{25}$$

Sætning 3.3 giver derfor i dette tilfælde, at Hankelmatricen af stambrøker

$$H_n = \left(\frac{1}{\binom{i+j+2}{2}}\right)_{0\le i,j\le n}$$

har en invers med heltallige indgange. Dette resultat er også inkluderet i [20].

Ovenstående metode kan bruges til at udregne den inverse matrix til

$$\left(\frac{1}{\alpha+i+j}\right)_{0\le i,j\le n}, \qquad \alpha > 0,$$

og som før ser man, at den har heltallige indgange for $\alpha = 1, 2, \ldots$. Vi henviser til [7] for detaljer.

6 Mere om momentfølger

En følge (s_n) kaldes en Stieltjes- resp. Hausdorff-momentfølge, hvis den er momentfølge for et mål koncentreret på intervallet $[0,\infty[$ resp. intervallet $[0,1]$. De tre sidste momentfølger i skemaet i paragraf 2 er alle Stieltjes-momentfølger, og af dem er kun følgen $\big(1/(n+1)\big)$ en Hausdorff-momentfølge. Stieltjes karakteriserede

Stieltjes-momentfølgerne i et berømt arbejde [21], som først udkom efter hans alt for tidlige død i 1894. Stieltjes karakterisering kan formuleres således: *En følge* (s_n) *er en momentfølge for et mål* $\mu \in \mathcal{M}^*$*, som er koncentreret på* $[0,\infty[$*, hvis og kun hvis* $s_0 = 1$ *og der for alle* $n = 0, 1, \ldots$ *gælder*

$$\det(s_{i+j})_{0\le i,j\le n} > 0, \quad \det(s_{i+j+1})_{0\le i,j\le n} > 0.$$

Det er værd at bemærke, at Stieltjes arbejde udkom 25 år før Hamburgers. Hvis man ønsker at læse om Stieltjes korte liv og karriere, og om hvorfor han forlod Holland og emigrerede til Frankrig, kan jeg anbefale [13].

Hausdorffs karakterisering af momentfølgerne for mål på intervallet $[0,1]$ udkom i 1923. Vi henviser til [1] for en formulering af og et bevis for Hausdorffs resultat.

Inspireret af arbejder om matematisk finansiering fandt Durán og forfatteren nogle nye metoder til at konstruere momentfølger udfra eksisterende Hausdorff-momentfølger.

Sætning 6.1 *Lad* (a_n) *være en Hausdorff-momentfølge så* $a_0 = 1$ *og* $a_n > 0$ *for alle* n*. Så er*

$$s_n = \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_n}, \qquad n \ge 0, \tag{26}$$

en Stieltjes-momentfølge, og

$$t_n = \frac{1}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}, \qquad n \ge 0, \tag{27}$$

er en Hausdorff-momentfølge.

Beviserne findes in [8] og [9]. Lad mig nævne, at starter man med Hausdorff-momentfølgen $s_n = 1/(n+1)$, så giver det første resultat, at $s_n = (n+1)!$ er en Stieltjes-momentfølge, hvilket ikke er overraskende, jfr. Laguerrepolynomierne. Det andet resultat giver, at

$$t_n = \left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n+1}\right)^{-1} \tag{28}$$

er en Hausdorff-momentfølge. Idet afsnittene i den harmoniske række kaldes de harmoniske tal $\mathcal{H}_n$, har vi altså at $t_n = 1/\mathcal{H}_{n+1}$ er en Hausdorff-momentfølge. I [9] har vi bestemt det tilhørende sandsynlighedsmål på intervallet $[0,1]$.

Konstruktionen i (27) kan itereres, og udføres iterationen ved, at man starter med følgen $\big(1/(n+1)\big)$, kan man vise, at iterationen konvergerer og man får et fikspunkt, som er en Hausdorff-momentfølge (m_n) karakteriseret ved den rekursive ligning

$$m_0 = 1, \quad (1 + m_1 + \cdots + m_n)m_n = 1. \tag{29}$$

Man finder

$$m_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad m_2 = \frac{\sqrt{22+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{4}, \quad \ldots .$$

I manuskriptet [10] har vi bestemt det tilhørende sandsynlighedsmål μ på intervallet $[0,1]$, og det er mere kompliceret end man umiddelbart skulle tro. Det involverer således en del kompleks analyse. Funktionen

$$F(x) = \int_0^1 t^x \, d\mu(t), \quad -1 < x < \infty$$

viser sig at være entydigt bestemt ved betingelserne

(i) $F(0) = 1$.

(ii) $\log F(x)$ er konveks.

(iii) Der gælder funktionalligningen

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{F(x+1)} - F(x+1), \qquad -1 < x < \infty,$$

hvilket er en formel analogi med Bohr–Mollerups karakterisering af Gammafunktionen.

I [8] gives en række eksempler på konstruktionen (26). Lad mig her blot nævne, at for givet $0 < q < 1$ er $a_n = q^n$ en Hausdorff-momentfølge svarende til sandsynlighedsmålet δ_q, og man finder så at

$$s_n = (q \cdot q^2 \cdots q^n)^{-1} = q^{-\binom{n+1}{2}} \tag{30}$$

er en Stieltjes-momentfølge. Denne følge er faktisk indetermineret—der er uendelig mange forskellige mål i $\mathcal{M}^*$, som har denne momentfølge. Et af dem er tæt forbundet med den logaritmisk normale fordeling i statistik, idet man ved lidt regning kan vise, at

$$\frac{q^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{2\pi \log(1/q)}} \int_0^\infty x^n x^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\tfrac{(\log x)^2}{2\log(1/q)}\right) dx = q^{-\binom{n+1}{2}}.$$

Det diskrete sandsynlighedsmål

$$\frac{1}{c(q)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\binom{k+1}{2}} \delta_{q^k}$$

har også momentfølgen (30). Konstanten $c(q)$ er bestemt ved formlen

$$c(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\binom{k+1}{2}}.$$

Jacobis berømte triple produkt identitet giver værdien for $c(q)$, se [14].

I arbejdet [20] har Richardson observeret, at matricen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{F_1} & \frac{1}{F_2} & \cdots & \frac{1}{F_{n+1}} \\ \frac{1}{F_2} & \frac{1}{F_3} & \cdots & \frac{1}{F_{n+2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{F_{n+1}} & \frac{1}{F_{n+2}} & \cdots & \frac{1}{F_{2n+1}} \end{pmatrix}, \tag{31}$$

som indeholder reciprokke Fibonaccital, har en invers matrix med heltallige indgange. I analogi med (1) kalder Richardson (31) for Filbertmatricen. Fibonaccitallene er givet som $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1, \ldots$, idet de følgende er fastlagt ved rekursionsformlen

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Vi henviser til [19] for udførlig information om Fibonaccitallene. Richardson angiver en formel for indgangene i den inverse matrix, og beviset for formlen udføres med computeralgebra. Formlen er iøvrigt helt analog med Chois formel (18), men binomialkoefficienterne erstattes af, hvad man kalder fibonomialkoefficienter

$$\binom{n}{k}_{\mathbb{F}} := \frac{F_n F_{n-1} \cdots F_{n-k+1}}{F_1 F_2 \cdots F_k}, \qquad 0 \leq k \leq n,$$

idet tomme produkter sættes til 1. Der gælder følgende variant af Pascals trekant

$$\binom{n}{k}_{\mathbb{F}} = F_{k-1}\binom{n-1}{k}_{\mathbb{F}} + F_{n-k+1}\binom{n-1}{k-1}_{\mathbb{F}}, \qquad n > k \geq 1,$$

som viser, at fibonomialkoefficienterne er hele tal. Fibonomialkoefficienterne omtales i [18].

Det fik mig til at tænke på, om ovenstående matrix faktisk er en Hankelmatrix hørende til et momentproblem, og om man kan bestemme de tilhørende ortogonale polynomier og opnå Richardsons resultat ved hjælp af Sætning 3.3. Det viser sig at være tilfældet, og de ortogonale polynomier er et specialtilfælde af de såkaldte "Little q-Jacobi polynomials", som tilhører q-versionen af Askey skemaet, men det vil føre for vidt at gå i detaljer med det i nærværende arbejde. Læseren henvises til manuskriptet [7]. Det skal dog nævnes, at matricen (31) ikke er positivt definit for alle n. Det viser sig, at matricerne

$$\left(1/F_{\alpha+i+j}\right)_{0 \leq i,j \leq n} \tag{32}$$

er ikke-singulære uanset $\alpha = 1, 2, \ldots$, og de inverse matricer har heltallige elementer. Matricerne (32) er kun positivt definite for alle n, når α er et lige tal, og i dette tilfælde er talfølgen $(F_\alpha / F_{\alpha+n})$ en momentfølge for sandsynlighedsmålet

$$\mu_\alpha = (1 - q^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha k} \delta_{q^k/\phi}, \tag{33}$$

hvor

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad q = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}. \tag{34}$$

Tallet ϕ kaldes det gyldne snit.

Hvis derimod α er ulige, er $(F_\alpha/F_{\alpha+n})$ ikke en momentfølge i den forstand vi har diskuteret det her, men den er dog stadig momentfølge for udtrykket (33), som i dette tilfælde er et reelt mål med total masse 1.

Litteratur

[1] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965.

[2] W. A. Al-Salam, *Characterization theorems for orthogonal polynomials*, 1–24. In: Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. Ed. P. Nevai and M.E.H. Ismail. Nato ASI Series C, Volume **294**. Kluwer, Dordrecht 1990.

[3] S. Altmann, E.L. Ortiz, Editors, *Mathematics and social utopias in France. Olinde Rodrigues and His Times.* History of Mathematics **28**, American Mathematical Society 2005.

[4] R. Askey, *Ramanujan's extension of the gamma and beta functions*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 346–359.

[5] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[6] C. Berg, *Indeterminate moment problems and the theory of entire functions*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 27–55.

[7] C. Berg, *Fibonacci numbers and orthogonal polynomials.* Udkommer i J. Comput. Appl. Math.

[8] C. Berg, A. J. Durán, *A transformation from Hausdorff to Stieltjes moment sequences*, Ark. Mat. **42** (2004), 239–257.

[9] C. Berg, A. J. Durán, *Some transformations for Hausdorff moment sequences and harmonic numbers*, Canad. J. Math. **57** (2005), 941–960.

[10] C. Berg, A. J. Durán, *The fix-point for a transformation of Hausdorff moment sequences and iteration of a rational function.* Manuskript.

[11] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1978.

[12] Man-Duen Choi, *Tricks or Treats with the Hilbert Matrix*, Amer. Math. Monthly **90** (1983), 301–312.

[13] G. van Dijk, *Thomas Joannes Stieltjes: Honorary Doctor of Leiden University*, The Mathematical Intelligencer **16** no.1 (1994), Springer Verlag, New York.

[14] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge 1990, second edition 2004.

[15] D. Hilbert, *Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms*, Acta Math. **18** (1894), 155–159. (367–370 in "Gesammelte Abhandlungen II", Berlin 1933.)

[16] M. E. H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, Cambridge University Press, Cambridge 2005.

[17] S. Kaijser, *Några "nya" ortogonala polynom*, Normat **47** (1999), 156–165.

[18] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming.* Vol. 1, 2nd Ed., Addison-Wesley, 1973

[19] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers With Applications*, John Wiley, New York, 2001.

[20] T. M. Richardson, *The Filbert matrix*, Fibonacci Quart. **39** no. 3 (2001), 268–275.

[21] T. J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **8** (1894), 1–122, **9** (1895), 5–47.

[22] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, fourth edition. American Mathematical Society, Providence, 1975.

2000 *Mathematics Subject Classification*: primary 33C45; secondary 42C05.
Keywords: Orthogonal polynomials, Legendre polynomials.
Portrettene er hentet fra www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians