Oppgaver

Oppgave 470–472 er fra forskjellige matematikkolympiader, mens oppgave 473 og 474 er fra *The Red Book of Mathematical Problems* av K. S. Williams og K. Hardy.

470. Løs ligningen $\cos^n x - \sin^n x = 1$ for alle naturlige tall n.

471. Vis at $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

472. Vis at hvis a, b og c er positive reelle tall, så er

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

473. Bestem alle funksjoner f som er deriverbare over hele tall-linjen og tilfredsstiller

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

for alle x og y med $xy \neq 1$.

474. La

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \ln 2.$$

Vis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, og finn summen.

475. En stav med lengde lik 1 knekker i 3 deler med uniforme og uavhengige sannsynlighetsfordelinger over stavens lengde for de to knekkpunktene.

(a) Finn sannsynligheten for at de tre delene kan settes sammen til (utgjøre sidene i) en trekant der alle *sidene* er større enn eller lik l ($l < 1/3$).

(b) Finn sannsynligheten for at de tre delene kan settes sammen til en trekant der alle *vinklene* er større enn eller lik $\pi/6$.

(Innsendt av Ivar Skau, Bø i Telemark, NO.)

Løsninger

456. Vis at det eneste av tallene

$$101,\ 10101,\ 1010101,\ 101010101,\ \ldots,$$

som er primtall, er 101. (Innsendt av Gunnar Blom, Lund, SE.)

Løsning: (Etter *Lars Arnér*, Norrköping, SE.) La $s_1 = 101 = 1+100$, $s_2 = 10101 = 1 + 100 + 100^2$, og generelt

$$s_n = 1 + 100 + 100^2 + \cdots + 100^n = \frac{100^{n+1} - 1}{100 - 1} = \frac{(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)}{99}.$$

Hvis $n \geq 2$, så er hver av faktorene i telleren i den siste brøken større enn 99. Etter forkorting får vi derfor s_n skrevet som et produkt av to tall som begge er større enn 1, og det følger at s_n ikke er et primtall.

Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK, har en litt annen angrepsvinkel: La s_n være som over, og sett

$$p_n = 11 \times s_n = 1111\ldots11, \tag{$*$}$$

som består av $2n + 2$ ett-tall. Da har vi også

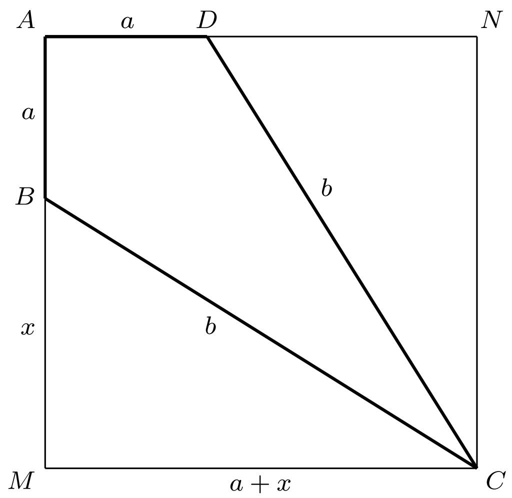
$$p_n = 11\ldots1 \times 100\ldots01, \tag{$**$}$$

der den første faktoren består av $n + 1$ ett-tall, og den andre inneholder n nuller. Hvis s_n er et primtall, så er $(*)$ en primfaktorisering av p_n, og siden begge faktorene i $(**)$ er større enn 1, må den ene faktoren være lik 11 og den andre lik s_n. Det er tilfellet bare når $n = 1$.

Løst av: Lars Arnér, Norrköping, SE; Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Norvald Midttun, Bergen, NO; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Svante Silvén, Karlstad, SE; Jakob I. Try, Søgne, NO; Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO.

457. Gitt en konveks firkant $ABCD$ der vinkelen A er rett, og sidelengdene er $|AB| = |AD| = a$, $|BC| = |CD| = b$, der a og b er naturlige tall og $a < b$. Vis at arealet av firkanten er $F = (a^2 + a\sqrt{2b^2 - a^2}\,)/2$.

Vis også (uten å bruke teorien for kvadratiske tallkropper!) at det fins uendelig mange måter å velge a og b på slik at F blir heltallig. (Innsendt av Norvald Midttun, Bergen, NO.)



Løsning: (Etter *Lars Arnér*, Norrköping, SE.) Vi legger firkanten $ABCD$ inn i et kvadrat $AMCN$ som vist på figuren. Lar vi $x = |BM| = |DN|$, følger det av Pythagoras' setning at $x^2 + (a+x)^2 = b^2$, og derfor er $x = \frac{1}{2}(-a+c)$, der $c = \sqrt{2b^2 - a^2}$. Arealet av $ABCD$ er lik arealet av kvadratet minus arealet av de to trekantene BMC og DNC, dvs.

$$F = (a+x)^2 - x(a+x) = a(a+x) = a(a+c)/2.$$

Hvis F er et helt tall, så er $c = (2F - a^2)/2$ et rasjonalt tall, og siden $c^2 = 2b^2 - a^2$ er et helt tall, så må c være et helt tall. Dessuten vil c ha samme paritet som a, og derfor vil $x = (c-a)/2$ være et helt tall. Omvendt er det klart at hvis x er et helt tall, så er også $F = a(a+x)$ et helt tall. Fra figuren ser vi at x er et helt tall hvis og bare hvis $(x, a+x, b)$ er et pytagoreisk trippel. Siden det fins uendelig mange pytagoreiske tripler, fins det også uendelig mange valg av a og b som gjør F til et helt tall. (Og siden det fins uendelig mange primitive pytagoreiske tripler, fins det også uendelig mange slike valg hvor a og b ikke har noen felles faktor.)

Løst av: Lars Arnér, Norrköping, SE; Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Svante Silvén, Karlstad, SE; Thomas Strai, Tvedestrand, NO; Karsten Tjugen, Bergen, NO.

458. Vis at for $n \geq 1$ er

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{n} 2^j \binom{n}{j}^2$$

Vis at hvis $n = p^a$ er en primtallspotens, så er

$$\sum_{j=0}^{p^a} \binom{p^a}{j}\binom{p^a+j}{j} \equiv 1 + 2^{p^a} \pmod{p^2}.$$

(Innsendt av Tor Skjelbred, Oslo, NO.)

Løsning: (Oppgavestillerens løsning.) For et polynom $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ setter vi $C_k\{P(x)\} = a_k$, altså koeffisienten for x^k. Da er

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{j} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n+j}{n} = C_n\Big\{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+x)^{n+j}\Big\}\\ &= C_n\Big\{(1+x)^n \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+x)^j\Big\} = C_n\big\{(1+x)^n(2+x)^n\big\}\\ &= C_n\Big\{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\binom{n}{j}x^{n-j}2^j\Big\} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\binom{n}{j}^2.\end{aligned}$$

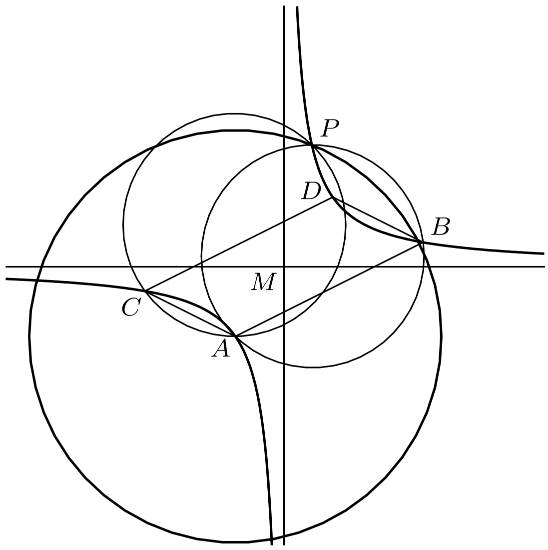
For $n = p^a$ er $\binom{n}{j} = \binom{p^a}{j} \equiv 0 \pmod{p}$ for $0 < j < p^a$, da $(1+x)^{p^a} \equiv 1 + x^{p^a} \pmod{p}$. Derfor er

$$\sum_{j=0}^{p^a} \binom{p^a}{j}\binom{p^a+j}{j} \equiv 1 + 2^{p^a} \pmod{p^2}.$$

Løst av: Knut Dale, Bø i Telemark, NO; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.

459. Gitt tre punkter A, B og C i planet og et linjestykke med lengde l. Bestem to like store sirkler, der den ene sirkelen skal gå gjennom A og B og den andre gjennom A og C, og de to sirklene skal skjære hverandre i et punkt i avstand l fra A. (Innsendt av Tor Fidje, Ås, NO.)

Løsning: (Etter *Hans Georg Killingbergtrø*, Leksvik, NO.) La M være midtpunktet på $[BC]$. Om A ligger i M, velges P på midtnormalen på $[BC]$ og i avstand l fra A. Ligger A på BC, men ikke i M, fins ingen løsning hvis $l \leq |AM|$. Er $l > |AM|$, velges P slik at $PM \perp BC$ og $|AP| = l$. Da er vinklene PBA og PCA like store hvis A ligger mellom B og C, og er supplementære ellers. I begge tilfellene har de samme sinusverdi. Sinussetningen sier at diameteren i en trekants omskrevne sirkel er lik en hvilken som helst av sidene dividert med sinus til dens motstående vinkel. Ut fra at trekantene PAB og PAC har $[PA]$ som felles side med samme sinus til motstående vinkel, er deres omskrevne sirkler like store.



I fortsettelsen skal A, B og C *ikke* ligge på linje. Velg punkter D og M slik at $ABDC$ blir et parallellogram med M som midtpunkt. Skal P ligge slik at trekantene ABP og ACP får like store omskrevne sirkler, holder det at $\angle PCA = \angle ABP$ ifølge sinussetningen. Når $\angle PCA$ og $\angle ABP$ varierer symmetrisk, blir det geometriske sted for P en hyperbel gjennom A, B, D og C, med asymptoter gjennom M og parallelt med halveringslinjene for hjørnevinklene i ABDC. (Punktene A, B, D, C og vinkelhalveringslinjenes retninger bestemmer en entydig hyperbel, og velges P fritt på denne, bare ikke i A, B eller C, er det kurant å påvise at $\angle PCA = \angle ABP$.) Da hyperbelen går gjennom A, får vi minst to løsninger her, om l enn skulle være aldri så liten. Om sirkelen med sentrum i A på den ene grenen og radius l tangerer den andre grenen, blir det tre løsninger. Er l enda større, blir det fire løsninger og aldri mer, ettersom to andregradskurver ikke kan ha mer enn 2×2 fellespunkter.

460. Betrakt mengden av alle reelle tallpar (a, b) som er slik at ligningen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

har minst én reell rot. Hva er den minste verdien $a^2 + b^2$ kan ha? (Fra den internasjonale matematikkolympiaden i 1973.)

Løsning: (Etter *Ebbe Thue Poulsen*, Mårslet, DK.) Hvis ligningen i oppgaven har en reell rot x, så er $x \neq 0$ og tallparet (a, b) ligger på den rette linjen med ligningen

$$(x^3 + x)a + x^2 b + (x^4 + 1) = 0.$$

(Dette er altså en linje i ab-planet.) Etter divisjon med x^2 kan vi skrive ligningen for linjen som

$$ya + b + (y^2 - 2) = 0$$

med $y = x + 1/x$, eller på avstandsform

$$\frac{ya + b + (y^2 - 2)}{\sqrt{y^2 + 1}} = 0.$$

Den minste verdien som $\sqrt{a^2 + b^2}$ antar, når (a, b) ligger på denne linjen, er lik avstanden fra $(0, 0)$ til linjen, det vil si

$$\frac{|y^2 - 2|}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

og den minste verdien som $a^2 + b^2$ antar, er altså

$$\frac{(z - 2)^2}{z + 1},$$

der $z = y^2 = (x + 1/x)^2$.

Når x gjennomløper $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, gjennomløper z halvlinjen $[4, \infty)$ (fire ganger), og den minste verdien $a^2 + b^2$ kan ha, er altså minimumsverdien for funksjonen $z \mapsto (z-2)^2/(z+1)$ på halvlinjen. Siden denne funksjonen er voksende på halvlinjen, er minimumsverdien $(4-2)^2)/(4+1) = 4/5$. (Denne verdien oppnås for $a = \pm 4/5$, $b = -2/5$, som gir de reelle løsningene $x = \mp 1$ av den opprinnelige ligningen.)

Løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Erik Hansen, Kalundborg, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Norvald Midttun, Bergen, NO; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Con Amore Problemgruppe, København, DK.

461. La $\mathbb{Q}_+$ være mengden av positive rasjonale tall. Bestem alle funksjoner $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ som er slik at

$$f(1/x) = f(x) \quad \text{og} \quad (x + 1)f(x) = xf(x + 1) \quad \text{for alle } x \text{ i } \mathbb{Q}_+.$$

(Fra Baltic Way 2003.)

Løsning: La f være en funksjon som tilfredsstiller betingelsene i oppgaven. Setter vi $x = 1$, får vi straks $f(2) = 2f(1)$. Videre finner vi $2f(3) = 3f(2)$, som gir $f(3) = 3f(1)$, og ved induksjon får vi $f(n) = nf(1)$ for alle $n = 1, 2, \ldots$. Setter vi $g(x) = f(x)/f(1)$, vil også funksjonen g tilfredsstille betingelsene, og dessuten er $g(1) = 1$.

Vi vil først vise at hvis det fins en slik g, så er verdien av $g(p/q)$ entydig bestemt for alle naturlige tall p og q. Siden $g(q/p) = g(p/q)$, er det nok å betrakte par

(p, q) med $p \geq q$. Vi bruker induksjon med hensyn på $n = \max(p, q)$. For $n = 1$ er $p = q = 1$, og $g(p/q) = g(1) = 1$ er entydig bestemt. Anta så at $g(p/q)$ er entydig bestemt for alle par (p, q) med $\max(p, q) < k$, og betrakt et par med $\max(p, q) = k$. Er $p = q$, får vi også her $g(p/q) = 1$. Hvis $p > q$, så har vi

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p-q}{q} + 1\right) = \frac{p}{p-q}\, g\left(\frac{p-q}{q}\right),$$

og denne verdien er også entydig bestemt, siden $\max(p - q, q) < \max(p, q) = k$.

Det gjenstår å vise at det virkelig fins en slik g. Inspirert av det foregående, definerer vi en funksjon g ved $g(p/q) = pq$, der p og q er innbyrdes primiske naturlige tall. Det er lett å se at g tilfredsstiller betingelsene i oppgaven og at $g(1) = 1$. Alle funksjoner som tilfredsstiller betingelsene er derfor gitt ved $f(p/q) = apq$, når p og q er uten felles faktorer og a er en positiv rasjonal konstant.

Løst av: Pål Grønnås, Stjørdal, NO; Erik Hansen, Kalundborg, DK; Peter Kirkegaard, Gentofte, DK; Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK; Con Amore Problemgruppe, København, DK.

Løsningsforslag sendes Arne Strøm, Økonomisk institutt, Universitetet i Oslo, Postboks 1095 Blindern, NO–0317 Oslo, innen 31. januar 2007. Forslag til nye oppgaver er velkomne når som helst. Vennligst oppgi kilde til oppgaver som ikke er egenproduserte.