Normat **55**:1, 8–14 (2007)

Noen aritmetiske relasjoner i Leibniz talltrekant.

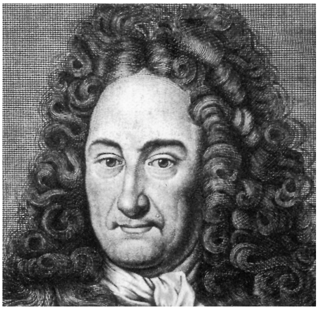
Ragnar Solvang

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling
Universitetet i Oslo
Postboks 1099
Blindern
NO-0316 OSLO
ragnar.solvang@ils.uio.no

Innledning

En rekke såkalte talltrekanter er kjent fra matematikken. Den meste kjente er trolig Pascals talltrekant hvor alle elementene eller leddene er binomialkoeffisienter.

Langt mindre kjent er Leibniz' talltrekant hvor alle leddene har binomialkoeffisienter i nevnerne. Men denne og andre talltrekanter som Leibniz studerte var med og dannet bakgrunn og inspirasjon da han utviklet sin geniale notasjon for integral- og differensialregningen. Leibniz' talltrekant har mange interessante egenskaper.



Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646–1716.

Akkurat som man i Pascals talltrekant har funnet interessante summer (for eksempel summen av leddene i hver horisontalrad) og tallfølger (for eksempel fibonaccitallene) skal vi i denne artikkelen se litt på summer av leddene i horisontalradene og i vertikalradene i Leibniz' talltrekant.

Oppbyggingen av Leibniz' talltrekant

Men først litt om oppbyggingen av Leibniz' talltrekant. Den likner en del på Pascals talltrekant ved at hvert element inneholder den inverse binomialkoeffisient multiplisert med $(n+1)$. Lar vi $L(m,p)$ betegne det p-te element i den m-te horisontalrad, så skal vi ha at

$$L(m,p) = \frac{1}{(m+1)\binom{m}{p}} \tag{1}$$

der $m > 0$ (som for binomialkoeffisientene) og dessuten at $0 < p < m$. Dette gir oss en talltrekant som begynner slik:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \frac{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

For ordens skyld minner vi om at spissen på trekanten som utgjøres av elementet $\frac{1}{1}$, er 0-te, nullte horisontalrad i vår fremstilling. Man verifiserer lett at hvert ledd i Leibniz' talltrekant er lik summen av tallene like til venstre og like til høyre i raden like under. Dette betyr at vi har at

$$L(m,p) = L(m+1,p) + L(m+1,p+1) \tag{2}$$

La oss med $S(m)$ betegne summen av leddene i m-te horisontalrad. I følge talltrekanten er $S(0) = 1$.

Vi skal bruke (2) til å utlede en sammenheng mellom $S(n+1)$ og $S(n)$. Vi har at

$$\begin{aligned}
S(m) = \sum_{p=0}^{m} L(m,p) &= \sum_{p=0}^{m} L(m+1,p) + \sum_{p=0}^{m} L(m+1,p+1) \\
&= L(m+1,0) + L(m+1,1) + \ldots + L(m+1,m) \\
&\quad + L(m+1,1) + \ldots + L(m+1,m) + L(m+1,m+1) \\
&= 2S(m+1) - L(m+1,0) - L(m+1,m+1)
\end{aligned}$$

Av definisjonen i 1 finer vi at $L(m+1,0) = \frac{1}{m+2}$ og $L(m+1,m+1) = \frac{1}{m+2}$. Altså har vi at

$$S(m+1) = \frac{1}{2}S(m) + \frac{1}{m+2}\,.$$

Det vil si at vi har fått følgende sammenheng mellom summen av leddene i to på hverandre følgende horisontalrader:

$$S(m) = \frac{1}{2}S(m-1) + \frac{1}{m+1}\,, \qquad S(0) = 1 \tag{3}$$

Av denne relasjonen kan man greit bestemme verdien av $S(n)$. Vi får resultatet

$$S(m) = \sum_{p=1}^{m+1} \frac{2^{p-m-1}}{p}$$

som kan sees på som en omforming av den summen vi begynte med.

Summer og integraler

Vi skal nå se på summen av leddene på vertiklradene og vi begynner med «midtstolpen», altså den som består av leddene

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \dots, \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \cdots \tag{4}$$

Vi kaller summen av disse leddene for V_1. Vi får

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{\binom{2n}{n}} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{\binom{2n}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n+1)!} \end{aligned} \tag{5}$$

At denne rekken konvergerer vises enkelt ved forholdskriteriet. For å komme videre får vi bruk for Eulers betafunksjon:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t \tag{6}$$

I vår sammenheng er både p og q naturlige tall større eller lik 1. Da kan integralet ovenfor bestemmes ved delvis integrasjonet passende antall ganger og vi får at

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{7}$$

der $\Gamma(n) = (n-1)!$ Av 5 og 7 får vi

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n(1-t)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n(1-t)^n\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1-t(1-t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{4\mathrm{d}t}{4-4t+4t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{4\mathrm{d}t}{3-(2t-1)^2} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Integrasjonsintervallet ligger innenfor rekkens konvergensområde. Ved substitusjonen $\frac{2t-1}{\sqrt{3}} = x$, får vi etter litt regning at

$$V_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \tag{9}$$

På liknende måte kan vi bestemme de andre vertikalsummene i Leibniz' talltrekant. Men før vi gjør dette, vil vi bemerke at hele Leibniz' talltrekant er symmetrisk om «midtstolpen» og det betyr at vi kan nøye oss med å studere vertikalradene til venstre for midtstolpen. Summen av leddene i hver av disse vertikalradene betegnes med $V_2, V_3, V_4, \ldots, V_n, \ldots$. Vi skal nå bestemme V_2. Denne kan vi bestemme direkte ut fra Leibniz' talltrekant. Vi gjentar nedenfor talltrekanten og viser med piler hvordan hvert ledd på midtstolpen dannes av leddene i den nærmeste vertikalrad på hver side:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \nearrow & & \nwarrow & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 & & & \nearrow & & \nwarrow & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Da ser vi umiddelbart at

$$V_1 = 2V_2 \qquad \text{dvs.} \qquad V_2 = \frac{1}{2} V_1 \tag{10}$$

Vi kan også finne dette direkte ut fra rekken for V_2. Vi får at

$$\begin{aligned}
V_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)\binom{2n+1}{n}} == \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n! \cdot n!}{(2n+2)(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} V_1
\end{aligned}$$

Altså har vi at

$$V_2 = \frac{1}{2} V_1$$

Vi skal så bestemme V_3. Denne kan vi bestemme direkte ut fra Leibniz' talltrekant og V_1 og V_2:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & & \nearrow \quad \nwarrow & & & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
 & & & \nearrow \quad \nwarrow & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Vi har med piler antydet hvordan leddene i V_2 kan uttrykkes ved leddene umiddelbart nedenfor til høyre og til venstre, dvs. på første og tredje vertikalrad. Vi antyder tankegangen ved å skrive opp noen av de første leddene:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \cdots = \big(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\big) + \big(\frac{1}{20} + \frac{1}{30}\big) + \cdots \\
&= \big(\frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \cdots\big) + \big(\frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \cdots\big) = V_3 + V_1 - 1
\end{aligned}
$$

Dette betyr at vi får:

$$V_3 = V_2 - V_1 + 1 \tag{11}$$

Da $V_2 = \frac{1}{2}V_1$ får vi

$$V_3 = 1 - \frac{1}{2}V_1 \tag{12}$$

Relasjonen i 11 kan lett generaliseres. Det kan gjøres ved samme resonnement som det vi førte ovenfor for å bestemme V_3, nemmeligen

$$V_p = V_{p+1} + V_{p-1} - \frac{1}{p-1} \tag{13}$$

Vi skal velge en annen vei her, fordi vi da kan få bestemt et eksplisitt uttrykk for V_p. Vi skal altså finne summen

$$
\begin{aligned}
V_p &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\binom{p-1}{0}} + \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{\binom{p+1}{1}} + \frac{1}{p+4} \cdot \frac{1}{\binom{p+3}{2}} + \cdots \\
&\qquad + \frac{1}{p+2n} \cdot \frac{1}{\binom{p+2n-1}{n}} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+2n)} \cdot \frac{1}{\binom{p+2n-1}{n}}
\end{aligned}
$$

Konvergens vises ved forholdskriteriet. Vi omformer det generelle leddet i summen:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(p+2n)} \cdot \frac{1}{\binom{p+2n-1}{n}} &= \frac{1}{(p+2n)} \cdot \frac{(p+n-1)!n!}{(p+2n-1)!} \\
&= \frac{\Gamma(p+n) \cdot \Gamma(n+1)}{\Gamma(p+2n+1)} = \int_0^1 t^n(1-t)^{p+n-1}dt
\end{aligned}
$$

Dette innsatt i summen for V_p ovenfor, gir:

$$\begin{aligned} V_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n (1-t)^{p+n-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n (1-t)^{p+n-1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{1-t(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{1-t+t^2} dt \end{aligned}$$

Substituerer vi $1-t \to t$, får vi

$$V_p = \int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1-t+t^2} dt \tag{14}$$

Dermed er summen av den p-te vertikalrad bestemt ved et bestemt integral. La oss nå bruke dette integralet i følgende uttrykk:

$$\begin{aligned} V_p - V_{p-1} + V_{p-2} &= \int_0^1 \frac{t^{p-1}dt}{1-t+t^2} - \int_0^1 \frac{t^{p-2}dt}{1-t+t^2} + \int_0^1 \frac{t^{p-3}dt}{1-t+t^2} \\ &= \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{p-2} + t^{p-3}}{1-t+t^2} dt = \int_0^1 t^{p-3} dt = \frac{1}{p-2} \end{aligned}$$

Altså har vi at

$$V_p - V_{p-1} + V_{p-2} = \frac{1}{p-2} \tag{15}$$

Eller

$$V_p = V_{p-1} - V_{p-2} + \frac{1}{p-2}\,, \quad V_2 = \frac{1}{2} V_1 \quad \text{og} \quad V_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \tag{16}$$

Som er den relasjonen vi skulle frem til (13). For $p = 3$, får vi resultatet i (11).

Vi har ovenfor bestemt V-summene som bestemte integraler. Men kan vi si noe om de numeriske verdiene til disse summene? Av (16) kan vi se at alle V_p, $p \geq 3$, kan uttrykkes ved verdien av V_1. Regner vi ut noen verdier av V_p, for eksempel $p = 4, 5$ og 6, ser vi at alle resultatene er av formen

$$V_p = f(p) + \alpha(p) V_1 \tag{17}$$

Her er

$$\begin{aligned} &V_1 = f(1) + \alpha(1) V_1 \qquad \text{dvs. at } f(1) = 0 \text{ og } \alpha(1) = 1 \\ &V_2 = f(2)\alpha(2) V_1 = \frac{1}{2} V_1, \qquad \text{dvs. at } f(2) = 0 \text{ og } \alpha(2) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Setter vi (17) inn i (16) får vi:

$$\begin{aligned} V_p &= V_{p-1} - V_{p-2} + \frac{1}{p-2} \\ &= \big(f(p-1) - f(p-2) + \frac{1}{p-2}\big) + (\alpha(p-1) - \alpha(p-2)) V_1 = f(p) + \alpha(p) V_1 \end{aligned}$$

Dermed har vi fått at de to funksjonene f og α er bestemt av differenslikningene

$$f(p) = f(p-1) - f(p-2) + \frac{1}{p-2}, \qquad p \geq 3, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0 \tag{18}$$

$$\alpha(p) = \alpha(p-1) - \alpha(p-2), \qquad p \geq 3, \quad \alpha(1) = 1, \quad \alpha(2) = \frac{1}{2} \tag{19}$$

Her legger vi merke til at differenslikningen i (18) er den sammen som i (16) men med andre startverdier. Videre vil alle $f(p)$ bestå av addisjoner/subtraksjoner av stambrøker.

Differenslikningen i (19) er homogen og kan løses med de oppgitte startverdiene etter vanlig teori for slike likninger. Vi skal imidlertid slå inn på en annen vei for å få frem en interessant egenskap ved α-funksjonen. Vi har nemlig at

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= \alpha(p-1) - \alpha(p-2) \\ \alpha(p-1) &= \alpha(p-2) - \alpha(p-3) \end{aligned}$$

Summerer vi disse to likningene, får vi

$$\alpha(p) = -\alpha(p-3)$$

Herav får vi umiddelbart at

$$\alpha(p) = \alpha(p-6) \tag{20}$$

Som viser at α-funksjonen er periodisk med periode 6. Dette kan også vises ved å løse differenslikningen i (19), men det «koster» en del regnearbeid. Differenslikningen i (19) gir oss mulighet til å stille opp i en tabell de seks mulige verdien for $\alpha(p)$. Vi får tabellen

P	1	2	3	4	5	6	7	....
$\alpha(p)$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		