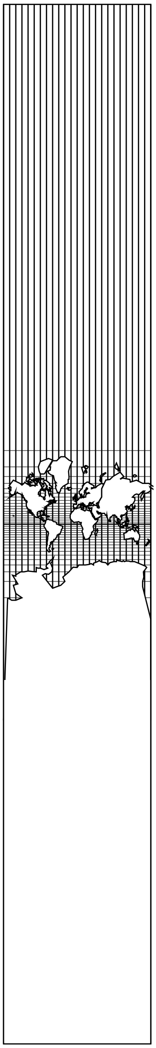
Mercatorprojektionen

Ulf Persson

Chalmers Tekniska Högskola
Matematiska Institutionen
SE–412 96 Göteborg
ulfp@math.chalmers.se



Mercatorprojektionen är väl den kartprojektion som de flesta är bekanta med. I sin naturliga version, avbildar den jordens gradnät av longituder och latituder på räta linjer sinsemellan vinkelräta. Alla latituder är av samma längd, nämligen ekvatorns, detta betyder att skalan inte är konstant[1]. Det finns många kartprojektioner som har denna egenskap,de brukar refereras till som de cylindriska. Matematiskt ger de en 1:1 avbildning av jorden minus polerna in i en öppen rektangel i planet. Vi kan ange dem alla med en enkel formel $(\theta, \psi) \mapsto (\theta, R(\psi))$ Där θ, ψ anger latitud och longitud respektive, och R är en monoton funktion. Mercator projektionen skiljer sig härvidlag från de övriga i och med att den är konform, d.v.s. den bevarar vinklar, eller ekvivalent skalan i varje punkt är oberoende av riktning. Sådana kartor är speciellt intressanta för sjöfart.

Det är nu lätt att inse att skalan längs latituderna förstoras ju närmare polerna vi kommer, och skalningsfaktorn utgöres av $\frac{1}{\cos\psi}$. För att få samma skalningsfaktor i longitudled måste vi nu lösa ekvationen

$$R'(\psi) = \frac{1}{\cos\psi}$$

Detta är knappast helt trivialt och gjorde som bekant första gången av holländaren Mercator på 1500-talet. I vilken mening han integrerade denna funktion är inte helt klart. Faktum är dock att den något förvånande har en explicit lösning, nämligen

$$R(\psi) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi})$$

vilket är betydligt lättare att verifiera än att komma på.

Ur denna ser vi att jorden avbildas på en oändlig strimla, med de bägge polerna oändligt långt borta. Dock den gängse presentationen av världskartan är trunkerad. Den bild vi ser på vänster sida brukar aldrig återfinnas i någon atlas. Om vi låter skalan vid ekvatorn vara $1 : 2 \times 10^9$, d.v.s. strimlan är 2 cm bred, hur högt skall vi gå innan skalan blir 1:1? Något förvånande inte så speciellt högt. I bilden är faktiskt skalan 1:1 vid rektangelns topp och botten, så den oändliga rektangeln avbildar hela jorden sånär som på två små femtioöringar vid polerna!

Matematiskt är det hela elementärt. Låt $\psi = \frac{\pi}{2} - \zeta$. Eftersom $2 \times 10^9 = \frac{1}{\cos\psi} = \frac{1}{\sin\zeta} \sim \frac{1}{\zeta}$ erhåller vi $\zeta \sim \frac{1}{2}10^{-9}$ varvid vi finner att

$$R(\psi) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi}) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+\cos\zeta}{1-\cos\zeta}) \sim \frac{1}{2}\ln(\frac{2}{\frac{\zeta^2}{2}}) \sim \frac{1}{2}(2\ln(4) + 18\ln(10)) \sim 22.11..$$

Höjden på rektangeln blir således $\frac{1}{2\pi}44.22 \sim 7.04$ gånger basen.

[1]som bekant kan ingen avbildning från sfären till planet ha konstant skala oavsett hur liten region vi tar. Detta är innebörden i en icke trivial gaussisk krökning