Uppgifter

482. Låt $x_1, x_2, \dots, x_{2007}$ vara icke-negativa, reella tal sådana att

(i) $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2007} = 2\,,$

(ii) $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{2006} \cdot x_{2007} + x_{2007} \cdot x_1 = 1\,.$
Bestäm det minsta och det största möjliga värdet av

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2007}^2$

483. Låt ABC vara en godtycklig triangel och låt P vara en inre punkt till ABC. Visa att minst av vinklarna PAB, PBC och PCA är mindre eller lika med 30°. *(IMO 1991)*

484. Ett flygbolag har upprättat flyglinjer mellan svenska och norska städer. Från varje svensk stad kan man flyga till exakt en av de norska städerna och från varje norsk stad kan man flyga till exakt en av de svenska städerna, men det är inte nödvändigtvis möjligt att ta flyget tillbaka samma väg. Vidare vet man att det finns minst en svensk stad till vilken man inte kan flyga direkt från någon norsk stad. Visa att man kan hitta en mängd av svenska städer, S, sådan att det till svenska städer som inte tillhör S bara ankommer flyg från just de norska städer som inte tar emot plan från städer tillhörande S.

485. Visa att för varje positivt, reellt tal a det gäller att

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{\frac{1}{a} + x^n} dx = \ln(1+a).$$

486. La fjerdegradsligningen $Q(x) = x^4 + bx^2 + d = 0$ väre gitt med heltallskoeffisienter med Galois-gruppe G, og la $Q(x)$ väre irredusibel.

a) Vis at hvis d er et kvadrattall, så er $G = Z_2 \times Z_2$, og omvendt.

b) Vis at hvis $d < 0$ så er $G = D_4$.

c) Forklar hvorfor vi nå kan anta at $b > 0, d > 0$ og d ikke er et kvadrattall når vi skal bestemme G. Vis da at hvis $\gcd(b,d) = 1$, så er $G = D_4$ også.

d) Når er G en syklisk gruppe?

(insänt av Kent Holing)

Holings kommentar: Jeg hadde i 2003 en elementär artikkel i Normat om hvordan en kan bestemme Galois-gruppen til irredusible fjerdegradsligninger, som jeg tror kan väre nyttig bakgrunnsstoff (og lett tilgjengelig for leserne) for å löse oppgaven ovenfor. Artikkelen er *När har fjerdegradsligningen konstruerbare rötter?* (side 15 i hefte 1, Normat 2003 med et tillegg i hefte 2 side 80).

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING

Finaltävling i Luleå den 25 november 2006

1. Antag att de positiva heltalen a och b har 99 respektive 101 olika positiva delare (1 och talet självt inräknade). Kan produkten ab ha 150 olika positiva delare?

2. I triangeln ABC skär bisektriserna varandra i punkten P. Låt A', B' och C' vara de vinkelräta projektionerna av P på sidorna BC, AC och AB respektive. Visa att vinkeln $B'A'C'$ är spetsig.

3. Ett tredjegradspolynom f har tre olika reella nollställen a, b och c. Koefficienten för x^3 är positiv. Visa att
$$f'(a) + f'(b) + f'(c) > 0.$$

4. Saskia och hennes systrar har fått ett stort antal pärlor som gåva. Pärlorna är vita, svarta och röda i varierande antal. De vita är värda 5 dukater, de svarta 7 dukater och de röda 12 dukater stycket. Totala värdet av pärlorna är 2107 dukater. Saskia och hennes systrar delar upp pärlorna så att alla får lika många och till samma värde, men färgfördelningen varierar mellan andelarna. Intressant nog är värdet av varje andel, uttryckt i antalet dukater, lika med antalet pärlor som systrarna totalt ska dela på. Saskia är speciellt förtjust i de röda pärlorna och ser till att hennes andel innehåller maximalt antal av dessa. Hur många vita, svarta och röda pärlor får Saskia?

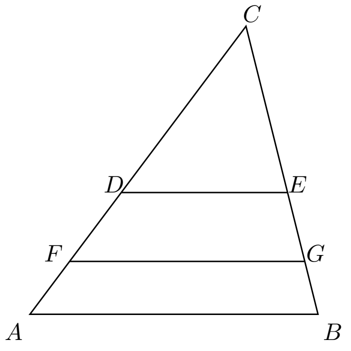
5. En rektangel delas in i m gånger n rutor. I varje ruta sätter man ett kryss eller en ring. Låt $f(m,n)$ vara antalet sådana arrangemang som innehåller en rad eller kolumn med enbart ringar. Låt $g(m,n)$ vara antalet arrangemang som innehåller antingen en rad med enbart ringar eller en kolumn med enbart kryss. Vilket tal är störst, $f(m,n)$ eller $g(m,n)$?

6. Bestäm alla positiva heltal a, b, c sådana att
$$a^{(b^c)} = (b^a)^c .$$

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING

Kvalificeringstävling den 3 oktober 2006

1. Linjerna DE och FG är båda parallella med linjen AB. De tre områdena CDE, $DFGE$ och $FABG$ har lika stora areor.



   Bestäm förhållandet $\frac{CD}{FA}$.

2. Bestäm $x^2 + y^2 + z^2$ om x, y, z är heltal som uppfyller

$$\begin{cases} x + y + z & = 60 \\ (x - 4y)^2 + (y - 2z)^2 & = 2 \end{cases}$$

3. Heltalet x uppfyller ekvationen $x^2 = a + x$. Här är a ett heltal större än 2006. Bestäm det minsta möjliga värdet på a samt lös ekvationen för detta värde.

4. De tre räta linjerna l, m, n är parallella. Avståndet mellan l och m är 4, avståndet mellan m och n är 3 och m ligger mellan l och n. En kvadrat, som ligger i området mellan l och n, har tre av sina hörn på var sin linje. Finn kvadratens sidlängd.

5. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x + \sqrt{1 - x}} \\ x &= \sqrt{y - \sqrt{1 + y}} \end{aligned}$$

   saknar reella lösningar.

6. På ett bräde med m rader och n kolumner målar man varje ruta svart eller vit. Detta görs så att de m raderna innehåller olika antal (alla positiva) svarta rutor, medan antalet svarta rutor i var och en av de n kolumnerna är konstant. För vilka m och n är detta möjligt?