Normat **55**:1, 40–43 (2007)

Pythagoreiske tripler

Kent Holing

Statoil forskningssenter
Arkitekt Ebbellsvei 10
NO 7005 Trondheim
KHO@statoil.com

I denne artikkelen ønsker vi å gjøre leseren kjent med noen generaliseringer av resultater for Pythagoreiske tripler fra to tidligere oppgaver i Normat.

La $a > 0, b > 0$ og $c > 0$ være heltall. Vi sier at (a, b, c) er et Pythagoreisk trippel hvis a, b og c er sidelengder i en og samme rettvinklede trekant med $c^2 = a^2 + b^2$.

Pythagoreiske tripler har som vel kjent en lang og fascinerende historie, og har mange pene og interessante egenskaper. For en god oversikt, se klassikeren [1]. Også mange standard lærebøker i tallteori, som [2, kapittel 11], gir gode innføringer i emnet.

1 Generaliseringer av oppgave 443

Teorem 1
La mengden $S = \{c - a, c - b, c + a, c + b\}$ være gitt for et vilkårlig Pythagoreisk trippel (a, b, c). Da kan høyst et element fra S være sidelengde i samme rettvinklede trekant.

Dette er en generalisering av oppgave 443a) der det følger at ikke alle sidelengdene i en rettvinklet trekant kan være fra mengden S. (Oppgave 443 med løsning finnes på side 140 i hefte 3 fra 2005.)

Bevis. For å vise at vi heller ikke kan ha to elementer fra S som sidelengder i samme rettvinklede trekant T, er det nok å vise dette for parene $(c - a, c - b)$, $(c - a, c + b), (c + a, c - b)$ og $(c + a, c + b)$ fra S (dette forutsetter at oppgave 443a) er løst).

Vi kan anta at $a = 2rsd, b = (r^2 - s^2)d$ og $z = (r^2 + s^2)d$ for $r > s \geq 1$ hele tall med $d = gcd(a, b, c)$.

Er begge elementer i S katetlengder i en trekant T er det lett å vise at arealet av T må være et kvadrattall, noe som ikke er mulig [2, side 297].

Dette betyr at en sidelengde fra S må være lengden av hypotenusen hvis det finnes to elementer fra S som er sidelengder i T. Men er det slik, så må vi ha positive heltallsløsninger til ligningen $x^4 - 4y^4 = \pm$ et kvadrattall, som heller ikke er mulig [2, side 299]. $\square$

Så, høyst et element i S kan være sidelengde i en rettvinklet trekant T. Merk at et element s i S er en katetlengde i T hvis og bare hvis $s > 2$, og et element s i S er en hypotenuslengde i T hvis og bare hvis s har minst én primtallsfaktor $p \equiv 1(4)$ (se for eksempel [1, kapittel 6]). Merk at når en slik T eksisterer for en gitt katet- eller hypotenuslengde, så kan det være at T ikke er primitiv (a, b og c relativt primiske). ([3] gir i kapittel 14 en interessant diskusjon relatert til temaet, der også antallet Pythagoreiske trekanter med en gitt side beregnes.)

Resultatet nedenfor er en generalisering av oppgave 443b) hvor det vises at for et Pythagoreisk trippel (a, b, c) kan $c^2 + 4ab$ aldri være et kvadrattall.

Teorem 2
For alle hele tall $m > 0$ finnes det alltid - med ett unntak nær - Pythagoreiske tripler (a, b, c) slik at $c^2 + mab/2 =$ et kvadrattall.

Fermat studerte inngående slike problemer, se [4] .[1]

Bevis. I oppgave 443b) vises det altså at $m = 8$ er et unntak. Vi viser at dette er det eneste unntaket.

For $m > 0$ heltall, definer

$$(*)\quad \begin{aligned} a(m) &= 16m(m^2+64)(3m^2-64) \\ b(m) &= (m-8)(m+8)(m^2-16m-64)(m^2+16m-64) \\ c(m) &= m^6+704m^4-20480m^2+262144. \end{aligned}$$

Vi viser lett at med (*) er både

$$c(m)^2 = a(m)^2 + b(m)^2$$

og

$$c(m)^2 + ma(m)b(m)/2 = (5m^6 - 832m^4 - 4096m^2 + 262144)^2$$

altså et kvadrattall. Videre observerer vi at for alle $m \geq 20$, er $a(m), b(m)$ og $c(m)$ positive heltall.

Det overlates til leseren å fullføre beviset ved å vise at for alle $1 \leq m \leq 19$, bortsett fra $m = 8$, finnes det Pythagoreiske tripler (a, b, c) slik at $c^2 + mab/2$ er et kvadrattall.[2] (Merk at $b(8) = 0$.) □

[1] Jacques de Billy samlet brevvekslingen sin med Fermat om dette temaet i *Doctrinae Analyticae Inventum Novum*, som i 1670 kom som vedlegg i Bachet's utgave av Diophantus. [4] har dette som vedlegg i sin kjente bok om Diophantus. Tilfellet m = 2 er der gjengitt på side 307-308, men merk at den gitte løsningen er feil. (En riktig løsning for m = 2 er (1768, 2415, 2993).) Det nevnes også at tilfellet m = 8 synes å være det eneste unntakstilfellet i teorem 2, uten at det gis noe bevis for påstanden.

[2] Vi fant lett og raskt alle slike eksempler ved hjelp av *Mathematica*™. Siden både a og b er negative og $c > 0$ for $1 \leq m \leq 4$, trenger vi bare å undersøke tilfellene $5 \leq m \leq 19$.

2 Generaliseringer av oppgave 480

Vi starter med følgende resultat fra [5] som er en presisering av oppgave 480 på side 184 i hefte 4 fra 2006. Dette er et relativt vanskelig problem fra den internasjonale matematiske olympiaden i 1988. Løsningen av oppgaven finnes i [5], og gjengis derfor ikke her.

Teorem 3
For $x > 0$ og $y > 0$ hele tall gjelder at hvis $1 + xy$ går opp i $x^2 + y^2$, så er $(x^2 + y^2)/(1 + xy) = gcd(x, y)^2$.

Fra dette følger direkte

Observasjon 1 For a og b to relativt primiske positive tall og $ab > 1$ kan ikke $1 + ab$ gå opp i $a^2 + b^2$. (Merk at $a^2 + b^2$ trenger ikke å være et kvadrattall.)

Bevis. La a og b være som i observasjonen, og anta at $1 + ab$ går opp i $a^2 + b^2$. Da har vi fra teorem 3 at ligningen $a^2 - ab + b^2 = 1$ har ikke-trivielle løsninger, men det er lett å se at det ikke er mulig. □

Merk at hvis a og b ikke er relativt primiske tall, så er observasjonen ikke riktig.[3]

Observasjon 2 For (a, b, c) et Pythagoreisk trippel vil aldri $1 + ab$ gå opp i c^2.

Bevis. La oss nå anta at (a, b, c) er et Pythagoreisk trippel med $d = gcd(a, b, c)$. (Vi har altså $d \geq 1$ og $c^2 = a^2 + b^2 =$ et kvadrattall.)

Merk at for $d = 1$ har vi vist observasjonen allerede ved hjelp av observasjon 1 ovenfor, men beviset nedenfor dekker alle tilfeller ($d \geq 1$). Vi setter videre $a = xd, b = yd$ og $c = zd$ med $gcd(x, y, z) = 1$, og vi har at $z^2 = x^2 + y^2 = 1 + d^2xy$ hvis $1 + ab$ går opp i $c^2 = a^2 + b^2$.

Anta at det er x som er jamn av x og y slik at vi kan anta at $x = 2rs, y = r^2 - s^2$ og $z = r^2 + s^2$ for heltall $r > s \geq 1$.

Det ovenfor viser at vi må ha at $x^2 - d^2xy + y^2 = 1$, som omskrevet blir

$$(**) \quad r^4 - 2d^2r^3s + 2r^2s^2 + 2d^2rs^3 + s^4 = 1$$

Borka Jadrijević har for f et vilkårlig heltall vist i [6], at den Diofantiske ligningen

$$X^4 - 2f^2X^3Y + 2X^2Y^2 + 2f^2XY^3 + Y^4 = 1$$

har $(\pm 1, 0)$ og $(0, \pm 1)$ som eneste heltallsløsninger (X, Y).

Ved å velge $f = d$ får vi til slutt en selvmotsigelse da ligning (**) gir den ikke-trivielle løsningen $X = r$ og $Y = s$ til den siste ligningen. □

[3] Hvis $d > 1$ så er det enkelt å finne heltall a og b med $d = gcd(a, b, c)$, og hvor $1 + ab$ går opp i $a^2 + b^2$ hvis $a^2 + b^2$ ikke er et kvadrattall (nødvendigvis pga observasjon 2). Slike eksempler gis ved $a = n$ og $b = n^3$ for $n > 0$ heltall hvor $1 + ab$ alltid går opp i $a^2 + b^2$, som imidlertid aldri er et kvadrattall.

3 Sluttord

Vi har ikke greid å finne resultatene i artikkelen i litteraturen om Pythagoreiske tripler, men se fotnote 1 for teorem 2. Uansett om resultatene er kjent eller ikke, så synes vi at de fortjener å bli bedre kjent.

Observasjon 2 ble gitt som en oppgave av undertegnede mens tilfellet med $d > 1$ var uavklart. (se [7]).

Helt til slutt ønsker vi å takke Dave Rusin, som fant triplene (*) ovenfor (privat korrespondanse), ved bruk av den elliptiske kurven

$$Y^2 = (X - 2)(X - m + 2)(X + m - 2).$$

Vi går imidlertid ikke nærmere inn på hvordan dette ble gjort.

Referanser

[1] Wacław Sierpiński: Pythagorean Triples, Dover 2003 (opprinnelig 1962).

[2] David M. Burton: Elementary Number Theory, Second Edition, Brown Publishers, 1989.

[3] Albert H. Beiler: Recreations in the Theory of Numbers. The Queen of Mathematics Entertains, Second Edition, Dover, 1966.

[4] Sir Thomas Heath: Diophantus of Alexandria, Second Edition, Dover, 1964 (opprinnelig 1910).

[5] Marcin E. Kuczma: International Mathematical Olympiads 1986-1999, The Mathematical Association of America, Problem Books, 2003 (problem 6, 1988, side 40-43).

[6] Borka Jadrijević: On two-parametric family of quartic Thue equations, Journal de Theorie des nombres de Bordeaux, 17 (2005), 171-177.

[7] Problem 11154, The American Mathematical Monthly, vol 112 (2005) s. 267.