Normat **55**:2, 78–84 (2007)

Fuglesangs skiftnyckel och Möten i rymden

Jan-Erik Björk och Jan Boman

Matematiska institutionen
Stockholms universitet
106 91 Stockholm
jeb@math.su.se & jabo@math.su.se

Det sägs att Christer Fuglesang tappade en skiftnyckel under sin rymdpromenad nyligen. Enligt Keplers första lag kom skiftnyckeln förstås i så fall att hamna i en egen elliptisk satellitbana. Man kan fråga sig hur denna bana ser ut. Exempelvis: hur långt avlägsnar sig skiftnyckeln från rymdskeppet? Kommer skiftnyckelns och rymdskeppets banor att skära varandra efter 90 minuter, så att besättningen riskerar att få den i huvudet under en rymdpromenad?

Låt oss betrakta en kropp som rör sig i ett centralt kraftfält enligt Newtons gravitationslag. Rörelseekvationerna i polära koordinater (r, θ) är då

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\gamma M/r^2 \tag{1}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0, \tag{2}$$

där M är centralkroppens massa och γ är den allmänna gravitationskonstanten. Om vi multiplicerar ekvationen (2) med r så kan vi integrera en gång och få ekvationen

$$r^2\dot{\theta} = L, \tag{3}$$

där integrationskonstanten L brukar kallas för Keplerkonstanten och kan tolkas som kroppens rotationsimpulsmoment relativt origo, om kroppens massa är 1. Ekvationen (3) ger genast Keplers andra lag. Om vi multiplicerar (1) med $\dot{r}$ och använder (3) så kan vi integrera även denna ekvation en gång och få ekvationen

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\gamma M}{r} = E. \tag{4}$$

Integrationskonstanten E kan tolkas som kroppens totala energi, eftersom summan av de två första termerna utgör kroppens kinetiska energi och den tredje termen är den potentiella energin.

Beviset för att lösningarna till (1), (2) är ellips-, parabel- eller hyperbelbanor står i många elementära läroböcker, och ska inte utföras här. En godtycklig bana $r = r(\theta)$ kan skrivas

$$r = \frac{L^2/\gamma M}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

efter en eventuell translation i θ-variabeln. Här är e banans excentricitet. I ellipsfallet, som är det som intresserar oss här, är $0 \leq e < 1$, och r har ett största och ett minsta värde som kan fås ur (4) genom att man sätter $\dot{r} = 0$, vilket ger

$$\frac{L^2}{2r^2} - \frac{\gamma M}{r} = E. \tag{6}$$

Denna ekvation måste alltså i ellipsfallet ha två positiva rötter, vilket svarar mot att $E < 0$.

En cirkulär rörelse på avstånd $r = R$ med hastighet $v = R\dot{\theta}$ satisfierar ekvationerna (1) och (2) om $v^2 = \gamma M/R$. Keplerkonstanten L har i detta fall värdet $L = Rv$, och den totala energin är enligt (4)

$$E = \frac{L^2}{2R^2} - \frac{\gamma M}{R}. \tag{7}$$

Eftersom $\gamma M/R = v^2 = L^2/R^2$, kan vi också skriva $E = -L^2/2R^2 = -\gamma M/2R$, men vi ska se att uttrycket (7) passar oss bättre i fortsättnigen.

Störning av cirkulär bana. Antag nu att rymdskeppet befinner sig i en cirkulär bana och att ett föremål kastas ut i *radiell* riktning med hastighet u relativt rymdskeppet. Eftersom den radiella hastighetskomponenten inte tillför något rotationsimpulsmoment, kommer föremålet att ha samma Keplerkonstant L som rymdskeppet. Föremålet får däremot ett tillskott av kinetisk energi som är lika med $u^2/2$, varigenom dess totala energi blir

$$E = \frac{L^2}{2R^2} - \frac{\gamma M}{R} + \frac{u^2}{2}.$$

Om vi sätter in detta värde på E i (6) och flyttar över några termer, så får vi

$$\frac{L^2}{2}\Big(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\Big) - \gamma M\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big) = \frac{u^2}{2}. \tag{8}$$

Eftersom $L^2 = \gamma MR$ och $v = L/R$ kan detta skrivas

$$\Big(\frac{R^2}{r^2} - 1\Big) - 2\Big(\frac{R}{r} - 1\Big) = \frac{u^2}{v^2}, \qquad \text{eller} \qquad \Big(\frac{R}{r} - 1\Big)^2 = \frac{u^2}{v^2},$$

vilket ger

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{1 \pm u/v}. \tag{9}$$

Om vi inför $h = r - R$, så ger detta $h/(R + h) = \pm u/v$, och således, om $u << v$,

$$h/R \approx \pm u/v.$$

Ellipsbanan kan skrivas på formen (5) eller $r = R/(1 + e\cos\theta)$ efter en eventuell translation i θ-variabeln. Eftersom $r_{\max} = R/(1 - u/v)$, ser vi också att $e = u/v$.

Skärningspunkterna med cirkelbanan svarar mot $\theta = \pm\pi/2$ och är utkastpunkten och den diametralt motsatta punkten på cirkeln. Rymdskeppets hastighet är ungefär $7,4$ km/s, och om vi antar exempelvis att skiftnyckeln kastas med $7,4$ m/s, så kommer alltså avvikelsen från cirkulär bana att ges av $h \approx R \cdot 10^{-3} \approx 6,7$ km (banradien R är ungefär lika med jordradien plus 300 km).

Av (9) ser vi också att ekvationen (8) har två positiva r-rötter om $u < v$, och således att föremålets bana blir elliptisk i detta fall och i annat fall hyperbolisk.

Omloppstid. Omloppstiden T för en kropp i ellipsbana kan med hjälp av (3) skrivas

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot\theta} = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta.$$

Med hjälp av uttrycket (5) för banan kan detta skrivas

$$T = \frac{L^3}{\gamma^2 M^2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}.$$

Med residyintegration kan man ganska lätt visa att

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad 0 \le e < 1,$$

vilket ger

$$T = \frac{L^3}{\gamma^2 M^2}\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}. \tag{10}$$

Med beteckningen $T_0 = 2\pi L^3/\gamma^2 M^2$, som är omloppstiden för motsvarande cirkulära bana ($e = 0$), kan detta skrivas

$$T = T_0(1-e^2)^{-3/2}.$$

Av (5) och (10) följer genast Keplers tredje lag i en precis form. Från (5) ser man nämligen att ellipsens storaxel $2a$ kan skrivas

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = (2L^2/\gamma M)/(1-e^2).$$

Om man härur löser ut $1 - e^2$ och sätter in i (10) så får man

$$T = \frac{2\pi\, a^{3/2}}{(\gamma M)^{1/2}}. \tag{11}$$

Formeln visar att Keplers tredje lag — kvadraten på omloppstiden är proportionell mot kuben på medelavståndet — gäller exakt, om medelavståndet definieras som halva storaxeln a.

För skiftnyckeln har vi enligt (9) att $2a = r_{\min} + r_{\max} = 2R/(1 - u^2/v^2)$, varav

$$T = 2\pi\frac{R^{3/2}}{(\gamma M)^{1/2}}(1-u^2/v^2)^{-3/2} = T_0(1-\frac{u^2}{v^2})^{-3/2} \approx T_0(1+\frac{3}{2}\frac{u^2}{v^2}),$$

där vi har använt att $T_0 = 2\pi L^3/\gamma^2 M^2$ och att $L^2 = \gamma MR$. Om $T_0 = 90$ minuter och som förut $u/v = 10^{-3}$ så blir alltså $T - T_0 \approx \frac{3}{2} \cdot 10^{-6} \cdot 90 \cdot 60 \approx 0,008$ sekunder. Eftersom hastigheten för såväl rymdskeppet som skiftnyckeln är ungefär $7,4$ km/s, så finner vi att skiftnyckeln efter ett varv hamnar ungefär 60 meter bakom rymdskeppet.

Låt oss nu anta att ett föremål kastas från rymdskeppet med hastigheten w relativt rymdskeppet i riktning parallellt med dettas rörelseriktning, räknad positiv i rymdskeppets rörelseriktning. Då ändras Keplerkonstanten: dess nya värde blir $L_1 = R(v + w)$, och konstanten E får därmed värdet $E = L_1^2/2R^2 - \gamma M/R$. Ekvationen (6) lyder därmed

$$\frac{L_1^2}{2r^2} - \frac{\gamma M}{r} = \frac{L_1^2}{2R^2} - \frac{\gamma M}{R}.$$

Denna ekvation har förstås lösningen $r = R$. En liknande kalkyl som ovan, varunder används att $\gamma M/R = v^2$, leder lätt till följande ekvation för den andra lösningen

$$\big(1 + \frac{w}{v}\big)^2 \big(\frac{R}{r} + 1\big) = 2. \tag{12}$$

Vi har sett att $r_{\max}$ eller $r_{\min}$ antas i utkastpunkten och att ellipsens storaxel har sin ena ändpunkt här. Det är också klart att ellipsen tangerar cirkeln $r = R$ i denna punkt. Härav följer att ellipsen och cirkeln har utkastpunkten som enda skärningspunkt, om $w \neq 0$. Ekvationen (12) har en ändlig positiv lösning om $-\sqrt{2} - 1 < w/v < \sqrt{2} - 1$, vilket innebär att föremålet förblir i ellipsbana för dessa värden på w och i annat fall övergår i hyperbolisk bana. Om vi sätter $r = R + h$ och antar att $|w| << v$ ger detta

$$h/R \approx 4w/v, \tag{13}$$

och alltså $2a = R + R + h \approx 2R(1 + 2w/v)$. Förändringen av medelavståndet är alltså av första ordningen i w, vilket medför att omloppstidens förändring denna gång blir större än i förra fallet. Närmare bestämt får vi

$$T = 2\pi \frac{R^{3/2}}{(\gamma M)^{1/2}} (1 + 2\frac{w}{v})^{3/2} = T_0 (1 + 2\frac{w}{v})^{3/2} \approx T_0 (1 + 3\frac{w}{v}),$$

om $|w| << v$. Föremålets omloppstid är alltså *större* än rymdskeppets om $w > 0$, det vill säga om föremålet kastas i skeppets rörelseriktning. Om exempelvis $w/v = 10^{-3}$, så blir $T - T_0 \approx 3 \cdot 10^{-3} T_0$, och om $v = 7,4$ km/s innebär detta att föremålet hamnar 120 km bakom rymdskeppet efter ett varv. Om däremot $w < 0$, d.v.s. föremålet kastas bakåt relativt rymdskeppets färdriktning, så är $T < T_0$ och föremålet dyker upp framför rymdskeppet efter ett varv. Avståndet d mellan rymdskeppet och föremålet efter ett varv kan skrivas $d = |(T - T_0)v| = 3T_0|w| = 3 \cdot 90 \cdot 60|w|$ meter, om w är angiven i meter per sekund.

Låt oss ett ögonblick återgå till fallet utkast i radiell riktning. Vi har sett att skiftnyckelns ellipsbana i detta fall skär rymdskeppets cirkulära bana i en punkt på andra sidan jorden, det vill säga efter ett halvt varv. Finns det förutsättningar för en krock i denna punkt? Låt oss beräkna tiden τ för skiftnyckelns färd fram till denna punkt. Antag att utkastet sker med hastighet $u << v$ i riktning bort från jorden. Vi har då

$$\tau = \frac{1}{L}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 d\theta = \frac{1}{Rv}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{R^2}{(1-e\cos\theta)^2}d\theta \approx \frac{R}{v}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2e\cos\theta)d\theta$$
$$= \pi\frac{R}{v} + 4e\frac{R}{v} \approx \pi\frac{R}{v} + 4\frac{Ru}{v^2}.$$

I den sista likheten har vi använt att $e = u/v$. Skiftnyckeln ankommer alltså till den diametralt motsatta punkten *efter* rymdskeppet, och tidsskillnaden är $4Ru/v^2$. När skiftnyckeln når denna punkt har alltså rymdskeppet redan hunnit avlägsna sig med sträckan $4Ru/v$. Om $u = v \cdot 10^{-3} \approx 7,4$ m/s, så är alltså avståndet $4R \cdot 10^{-3} \approx 27$ km.

Finns det någon kastriktning som leder till att skiftnyckeln och rymdskeppet krockar efter ett varv? Ja, om kastriktningen har en vertikal komponent u och en negativ horisontell komponent w med $|w| << u$, så kommer de bägge effekterna att kompensera varandra så att kropparna får samma omloppstid. Ty eftersom $|w| << u << v$ så gäller med god approximation att

$$\frac{T}{T_0} \approx \left(1 + 3\frac{w}{v}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{u^2}{v^2}\right) \approx 1 + 3\frac{w}{v} + \frac{3}{2}\frac{u^2}{v^2}.$$

Villkoret för att $T = T_0$ blir alltså

$$\frac{w}{u} \approx -\frac{u}{2v}. \tag{14}$$

Om exempelvis $u/v = 10^{-3}$ som förut, så får vi alltså $w/u \approx -0,0005$. Alltså, om skiftnyckeln kastas bort från jorden eller mot jorden med hastigheten $7,4$ m/s i en vinkel av $0,03$ grader från vertikalen i riktning bakåt, så kommer skiftnyckeln och rymdskeppet att mötas efter ett varv. Om skiftnyckeln glider i väg med blott hastigheten 1 m/s, så får vi möte efter ett varv om $w/u = -\frac{1}{2}u/v \approx 0,6 \cdot 10^{-4}$, vilket motsvarar en vinkel mot linjen jorden – rymdskeppet på $0,004$ grader. Ett litet vinkelfel skulle här få stor betydelse, ty en vinkel på exempelvis $0,1$ grader motsvarar $|w|/u \approx 1/600$, d.v.s. $|w| \approx 1/600$ m/s, vilket ger $d = 3T_0|w| \approx 30$ meter.

Exakt villkor för att $T = T_0$. Vi har sett att en satellits omloppstid är bestämd av ellipsbanans storaxel genom formel (11). Omloppstiden kan också uttryckas med hjälp av den totala energin E, eftersom det finns ett samband mellan a och E. Genom att multiplicera ekvation (6) med r^2 och använda sambandet mellan rötter och koefficienter finner man nämligen att $2a = r_{\max} + r_{\min} = -\gamma M/E$ och således enligt (11)

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\gamma M}{|E|^{3/2}}. \tag{15}$$

Härav följer att en satellits omloppstid är bestämd av dess fart (d.v.s. hastighetens belopp) vid givet avstånd från jorden. Ty om satellitens fart är v_1 i en punkt på avståndet R från jorden, så är dess totala energi

$$E = \frac{v_1^2}{2} - \frac{\gamma M}{R}, \tag{16}$$

och därmed kan T bestämmas uttryckt i v_1 och R enligt (15) och (16). Om rymdskeppet som förut rör sig i cirkulär bana med fart v och skiftnyckeln utkastas med en hastighet som har både en radiell komponent u och en tangentiell komponent w (relativt rymdskeppet), så får skiftnyckeln i kastögonblicket farten $u^2 + (v + w)^2$. Villkoret för att $T = T_0$ blir därmed att

$$v^2 = u^2 + (v + w)^2.$$

Om vi antar att u och w är mycket mindre än v, får vi tillbaka villkoret (14).

Mer generellt, om två satelliter, till exempel rymdskeppet och skiftnyckeln, har fart v_0 respektive v_1 i en punkt på avståndet R från jorden och deras omloppstider betecknas T_0 respektive T_1, så gäller enligt (15) och (16)

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{2v^2 - v_0^2}{2v^2 - v_1^2}\right)^{3/2},$$

där $v = \sqrt{\gamma M/R}$ som förut betecknar farten hos en satellit i cirkulär bana med radie R. Notera att denna formel gäller även om de bägge satelliternas banor ligger i olika plan.

Man skulle kunna fråga sig vilken inverkan andra himlakroppars gravitation har på skiftnyckelns och rymdskeppets banor, exempelvis solen eller månen. Låt oss tänka efter. Solens och jordens massor har kvoten $M_S/M_J = 330000$. Rymdskeppets avstånd till jordens medelpunkt är 6700 km, och solens avstånd till jorden/rymdskeppet är $150 \cdot 10^6$ km. Kvoten g_S/g_J mellan solens och jordens gravitationskrafter på rymdskeppet/skiftnyckeln är därmed $(M_S/M_J)(R_S/R_J)^{-2} \approx 0,66 \cdot 10^{-3}$. Eftersom $g_J \approx 10$ m/s^2 så ger detta $g_S \approx 0,0066$ m/s^2. Denna gravitationkraft är inte försumbar, ty fritt fall under 90 minuter under inverkan av g_S ger en fallsträcka på $0,0066 \cdot (90 \cdot 60)^2/2$ meter ≈ 100 km. Men jorden själv är utsatt för samma gravitation från solen, så jorden "faller" under samma tid lika lång sträcka mot solen. I första approximation kan man därför säga att en jordsatellits bana *relativt jorden* inte påverkas av solens gravitation. Emellertid finns en liten påverkan som beror på att satellitens avstånd till solen inte är alldeles konstant och att gravitationen är starkare när satelliten är närmare solen. Om vi för enkelhets skull antar att satellitens banplan är parallellt med linjen jorden − solen, så medför denna effekt att banan blir en aning utdragen längs linjen jorden − solen, och storleken av denna effekt är omvänt proportionell mot *tredjepotensen* av avståndet till solen. Månens gravitation vid jorden är mycket mindre än solens, ty med uppenbara beteckningar har vi $g_M/g_J = (M_M/M_J)(R_M/R_J)^{-2} \approx 4 \cdot 10^{-6}$. Å andra sidan är $(M_M/M_J)(R_J/R_M)^3 \approx 67 \cdot 10^{-9}$ medan $(M_S/M_J)(R_J/R_S)^3 \approx 30 \cdot 10^{-9}$, d.v.s. den effekt som beror på gravitationskraftens r-derivata är mer än dubbelt så stor för månen som för solen. Detta är också anledningen till att månens inverkan på tidvattnet är större än solens.

Frågan om solens och månens inverkan på satellitbanorna efter ett stort antal varv kräver helt andra metoder och ska inte diskuteras här.

En slutsats av allt detta är att det är mycket osannolikt att skiftnyckeln efter ett varv passerar på rymdpromenadavstånd från Discovery.

Referenser

[G] Gårding, Lars: *Encounter with mathematics,* Springer-Verlag 1977.

[Go] Goldstein, Herbert: *Classical Mechanics,* 2:a uppl., Addison-Wesley 1980.