Normat **55**:2, 85–89 (2007)

Trianglar med samma omkrets och area

Bengt Ulin

Bengt.Ulin@swebb.se

Inledning

Kan två trianglar av olika form ha såväl samma omkrets som samma area? Och om så kan vi lätt konstruera explicita exempel? Frågeställningen togs upp av Robert W. Prielipp i en artikel i The Mathematics Teacher, 2/1974 i vilken han behandlade olika aspekter av den.

Innan vi börjar kan vi konstatera att svaret på den första frågan måste vara ja baserat på ett allmänt resonemang. Familjen av alla trianglar upp till kongruens är 3-dimensionell, ty en triangel bestäms av längden av sina tre sidor vilka kan vara godtyckligt givna så när som de uppenbara olikheterna. Om vi betraktar trianglar upp till likformighet reducerar vi antalet parametrar till två, ty sådana trianglar är bestämda av sina vinklar, och vinkelsumman i en triangel är som vi alla vet förutbestämd. Om vi fixerar omkretsen av en triangel finns det bara en sådan triangel med given form, så trianglar med given omkrets utgör även de en två-dimensionell familj. Att fixera arean utgör även det ett ytterligare villkor, vilket betyder att trianglar med given omkrets och area bör (ifall det existerar ty en given omkrets ger en övre begränsning på arean, vars maximum inte förvånansvärt antages av den liksidiga triangeln) utgöra en 1-dimensionell skara. I själva verket utgör dessa en nivåkurva till areafunktionen. Den senare funktionen kan göras explicit via Herons formel som lyder

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

där a, b, c är triangelns sidor och $2p = a + b + c$. Dock att explicit parametrisera nivåkurvorna är betydligt svårare vilket föranleder intresset.

I denna artikel tänker vi angripa problemet från en elementär skol-matematisk synvinkel, medan i en efterföljande artikel planerar huvudredaktören att angripa problemet från en 'högre' ståndpunkt, och tala om modulirum för trianglar och theta-funktioner bland annat.

pA-trianglar

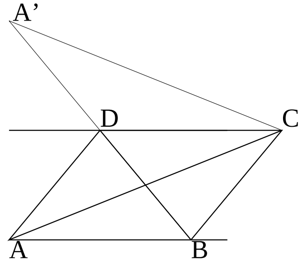
Låt oss nu kalla trianglar med given omkrets (2p) och given area (A) för pA-trianglar. (Notera att $0 \leq A \leq \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.) Prielipp visar följande

1. att om två rätvinkliga pA-trianglar har lika lång hypotenusa, så är de kongruenta
2. att två rätvinkliga pA-trianglar är kongruenta. Beviset bygger på 1)
3. att det finns icke-kongruenta likbenta pA-trianglar.

Med hjälp av viss algebraisk teknik härleder Prielipp heltalsvärden för triangelsidorna. Jag vill här dels ge en enkel härledning av 1) och 2), varav 1) i skärpt form, dels utvidga 3) till en generell behandling av problemet.

Punkt 1) kan med enkla medel skärpas till satsen:

Sats 1. *Om två pA-trianglar har en lika lång sida, så är de kongruenta*



Bevis. Vi fixerar sidan AB i en triangel ABC och låter hörnet C röra sig så att triangelarean hålls fix. Som bekant rör sig då C längs en parallell till sidan AB. Med en idé, som är klassisk från Herons berömda härledning av ljusets (kortaste) väg från en punkt A via en reflekterande linje till en punkt B, visar man att längden AC+CB är monotont växande i fig 1, då C rör sig åt sidan från den punkt D för vilken AD = DB. Härav inses att C vid bibehållen omkrets endast kan inta två symmetriska positioner (sammanfallande för C = D), vilket medför kongruenta trianglar. □

Punkt 2) visas lätt med trigonometri:
Låt c och d, u och v vara hypotenusa resp en spetsig vinkel i två rätvinkliga pA-trianglar. Då gäller följande system av två ekvationer:

$$c(1 + \sin u + \cos u) = d(1 + \sin v + \cos v) = 2p \tag{1}$$

$$c^2 \sin u \cos u = d^2 \sin v \cos v = 2A \tag{2}$$

Kvadrering av (1) och ledvis division ger

$$\frac{(1 + \sin u + \cos u)^2}{\sin u \cos u} = \frac{(1 + \sin v + \cos v)^2}{\sin v \cos v}$$

Utnyttjande av den trigonometriska ettan i täljarna leder till ekvationen

$$\frac{1 + \sin u + \cos u}{\sin u \cos u} = \frac{1 + \sin v + \cos v}{\sin v \cos v}$$

dvs

$$\frac{2p/c}{2A/c^2} = \frac{2p/d}{2A/d^2}$$

varav följer c = d. Av sats 1 följer nu att trianglarna är kongruenta.

pA-tvillingar

Som inledning till ett generellare studium kan vi först notera att den liksidiga triangeln erbjuder maximal triangelarea vid given omkrets. Eftersom den liksidiga triangeln har area $a^2\sqrt{3}$, då dess sida är 2a och halva omkretsen således p = 3a uppfyller alla trianglar olikheter

$$A \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} \tag{3}$$

varvid likhet gäller endast för den liksidiga triangeln.[1] Denna är alltså unik som triangel med area och perimeter p som satisfierar ekvationen

$$A = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$$

Om däremot olikhet råder i (3) kan man räkna med att triangeln inte är unik, d.v.s. endast för liksidiga trianglar degenererar nivåkurvan till en punkt.

Vi kommer i fortsättningen att utnyttja följande enkla baskunskap:

Hjälpsats. *Om en sida AB i en triangel ABC förenar brännpunkterna i en ellips med en storaxel av given längd $|AC| + |CB|$, så blir triangelarean maximal när C sammanfaller med en ändpunkt till ellipsens lillaxel*

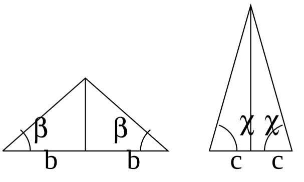
Ellipsen är nämligen per definition den kurva som C beskriver, då summan $|AC| + |CB|$ är konstant (A och B fixa). Utsagan följer nu direkt av att triangelarean är hälften av $h|AB|$, där h är höjden från C mot ellipsens storaxel, som ju innehåller sidan AB.

Låt oss nu märmast betrakta likbenta, icke liksidiga trianglar och kalla två sådana trianglar för tvillingar om de har samma p- och A-värden. Vi bevisar:

Sats 2. *Varje likbent, icke-liksidig triangel har en pA-tvilling*

Bevis. I fig 2 är 2b och β bas resp basvinkel i en given triangel samt 2c och γ motsvarande element i en sökt pA-tvilling.

Vi erhåller ekvationssystemet



$$b^2 \tan^2 \beta \quad = \quad c^2 \tan^2 \gamma (= A^2) \tag{4}$$

$$b(1 + \frac{1}{\cos \beta}) \quad = \quad c(1 + \frac{1}{\cos \gamma})(= p) \tag{5}$$

Kvadrering av (5) och utnyttjande av (4) leder till ekvationen

$$\frac{(1 + \cos \beta)^2}{\sin \beta \cos \beta} = \frac{(1 + \cos \gamma)^2}{\sin \gamma \cos \gamma} \tag{6}$$

[1] Det är elementärt att bevisa att av alla likbenta trianglar med given omkrets 2p har den liksidiga triangeln den största arean A. Man kan t ex låta bas och sida vara x resp $p - x$ och maximera $A = x\sqrt{p^2 - 2px}$ där rotuttrycket enligt Pythagoras sats är höjden mot basen. Maximum erhålls för x = p/3, vilket innebär liksidig triangel. I allmänhet kan man med fördel använda sig av Herons formel.

Vi ska se att (6) satisfieras av ett värde γ skilt från β genom att studera funktionen

$$F(x) = \frac{(1+\cos x)^2}{\sin x \cos x}(0 < x < \frac{\pi}{2})$$

Efter derivering kan man hyfsa derivatan till

$$F'(x) = 2\frac{u+1}{u(1-u)}(u - \frac{1}{2})$$

där $u = \cos x$. Notera att $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, varav vi sluter att i intervallet $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ är $F(x)$ strikt avtagande, medan däremot i intervallet $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ strikt växande. Vidare växer $F(x)$ obegränsat dels då x avtar mot 0, dels då x växer mot $\frac{\pi}{2}$. Därav följer att varje ekvation $F(x) = C$ för $C > \sqrt{27}$ uppfylls av två x-värden β och γ , det ena mindre än $\frac{\pi}{3}$, det andra större än $\frac{\pi}{3}$, vilket motsvarar två likbenta, icke-liksidiga trianglar av olika form. □

Ett numeriskt exempel kommer att ingå i nästa avsnitt.

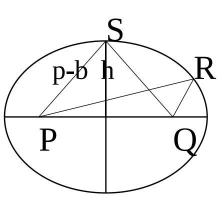
Följande sats bör vara föga oväntad men jag föredrar ändå att ge ett argument.

Sats 3. *Ingen icke-liksidig pA-triangel är unik*

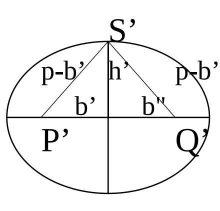
Notera att utsagan är redan bevisad för likbenta trianglar.

Bevis. Vi låter nu PQR vara en triangel med 3 olika långa sidor, omkrets $2p$ och area A och söker en annorlunda formad triangel med samma p- och A-värden . Vi fixerar sidan PQ med längd $2b$ som bas och låter P och Q utgöra bränn-punkter i en ellips E med storaxellängd $2p - 2b$. Denna längd är alltså lika med den sammanlagda längden hos triangelsidorna PR och RQ. Hörnet R ligger därför på E.

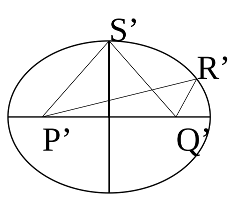
Vi låter nu R löpa längs E till en ändpunkt S av ellipsens lillaxel (fig 3a). Triangelns omkrets hålls därvid konstant men arean ökar till ett större värde B, eftersom triangeln erhåller en längre höjd, säg h, mot basen PQ. Om den erhållna likbenta triangeln skulle vara liksidig (vilket inträffar om ellipsen har excentricitet $\frac{1}{2}$, väljer vi en annan triangel-sida som bas. Enligt sats 1 har triangeln PQS en pB-tvilling $P'Q'S'$. Dess bas $2b'$ är enligt avsnitt III. skild från $2b$. Vi låter höjden mot basen vara h' och placerar P' och Q' som brännpunkter i en ny ellips E' med storaxellängd $2p - 2b'$. S' blir då ändpunkt till en lillaxel med längd $2h'$, eftersom triangeln $P'Q'S'$ har höjd h' (fig 3b). När vi nu flyttar S' längs E', bibehålls triangelns perimeter p. Vi låter S' inta ett sådant läge R' att triangelarean reduceras till A (fig 3c). Vi har då erhållit en ny triangel $P'Q'R'$ med samma p- och A-värden



3a



3b



3c

som triangeln PQR, men vars form är en annan, eftersom $b' \neq b$. Därmed är satsen bevisad. □

Numeriska exempel

Om man nöjer sig med enstaka numeriska exempel på pA-tvillingar kan man med fördel använda Herons formel för arean. Om tre numeriska värden på sidorna a, b och c är givna, kan tre andra sökta sidor r, s och t erhållas genom ansatsen $p-r=\alpha(p-a), p-s=\beta(p-b), p-t=\gamma(p-c) \quad (*)$ där α, β, γ är parametrar som uppfyller likheten $\alpha\beta\gamma = 1$. De två trianglarna har då enligt Heron samma area. Addition av likheterna i (*) och utnyttjande av omkretsvillkoret $a+b+c = r+s+t = 2p$ leder efter hyfsning till följande ekvationssystem för parametrarna:

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha a+\beta b+\gamma c) &= p \\
\alpha\beta\gamma &= 1
\end{aligned} \tag{7}
$$

Man kan utan större möda finna exempel på tripler a, b, c och α, β, γ som åstadkommer detta.

Om man vill skaffa sig likbenta pA-tvillingar med heltalsvärden på sidorna kan man utgå från en triangel med bas $2a$ och motstående höjd $2h$ och tillordna den en likbent tvilling med bas $4a$ och höjd h. Då har trianglarna samma area $2ah$. Lika stora omkretsar ger ekvationen

$$a + \sqrt{s^2 + 4h^2} = 2a + \sqrt{4a^2 + h^2}$$

Med $x = h^2/a^2$ erhåller vi ekvationen

$$\sqrt{1+4x} = 1 + \sqrt{4+x}$$

Dess användbara lösning är $x = 28/9$, varav $h/a = 2\sqrt{7}/3$. Valet $a = 3, h = 2\sqrt{7}$ ger ett par pA-trianglar med heltalsvärden på sidorna, nämligen $6, 11, 11$ och $12, 8, 8$.