 Normat **55**:1, 90–92 (2007)

# Uppgifter

**487.** Kring ett runt bord sitter 30 barn och spelar kort med en lek innehållande $n$ kort. När spelet börjar har ett av barnen samtliga kort på hand. I varje följande omgång måste varje barn som har minst två kort på hand ge ett kort till var och en av sina två grannar (barnen utför denna procedur simultant). Spelet slutar så snart samtliga barn har högst ett kort på hand. För vilka värden på $n$ har spelet ett slut?

**488.** Ett balanserat mynt kastas $n$ gånger. Låt $N_k$ vara antalet sviter av längd $k$, dvs antalet obrutna följder av $k$ stycken "krona"eller $k$ stycken "klave", för $k \leq n$. Bestäm $\mathrm{E}(N_k)$ och $\mathrm{Var}(N_k)$.

**489.** I triangeln $ABC$ skär bisektriserna till vinklarna $A$ och $B$ varandra i punkten $Q$. Bisektrisen till vinkeln $A$ skär sidan $BC$ i punkten $D$, medan bisektrisen till vinkeln $B$ skär sidan $AC$ i punkten $E$. Vi betecknar $\angle QDE$ med $\alpha$ och $\angle QED$ med $\beta$. Visa att $\cos 2\alpha + \cos 2\beta < 1$ om vinkeln $C$ är större än $60°$.

**490.** Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{\ln^2 n}{\ln k \cdot \ln(n-k)}.$$

**491.** Primtalen $p$ och $q$ är sådana att $m^{3pq} \equiv m \,(\text{modulo}\, 3pq)$ för alla positiva heltal $m$. Bestäm $p$ och $q$.

**492.** Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en följd av positiva reella tal sådana att $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{n}$ för varje $n \geq 1$. Visa att det för alla $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}).$$

**493.** Visa för varje positivt heltal $n$ identiteten

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{[\frac{n-k}{2}]} = \binom{2n+1}{n}.$$

**Anm.** Uppgifterna 487, 490, 492 och 493 är hämtade från skilda matematik-olympiader.

## Insända lösningar Normat 2006:4

**476.** (*Con Amore Problemgruppe*) Vi finder att

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= n\cdot\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n(n-1)\dots1} = (n+1)\cdot\frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{(n-1)\dots1}\\ &= (n+1)\binom{2n}{n-1},\end{aligned}$$

og dermed at

$$(n+1)\binom{2n}{n} - (n+1)\binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n},$$

hvoraf påstandens rigtighed straks fremgår. Min anm. Lösningen beskriver indirekt den kombinatoriska tolkningen av catalanska tal. Låt oss i ett koordinatsystem i planet vandra längs punkter med icke-negativa heltalskoordinater, med start i origo och avslutning i punkten $(2n, 0)$, med regeln att från punkten $(r, s)$ gå till endera av $(r+1, s-1)$ och $(r+1, s+1)$. Antalet sådana vägar är ju $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$. Jag antar att det var den tolkningen förslagsställaren hade i tankarna.

(*Kåre Vedøy*) Utvecklar uttrycket och får

$$\frac{(n+2)(n+3)(n+4)\dots(2n-2)(2n-1)}{3\cdot4\cdot5\dots(n-1)}.$$

Det er nå blitt en faktor mer i telleren enn i nevneren. 3 går opp i hver tredje faktor i telleren, 4 går opp i hver fjerde faktor osv. Dermed vil uttrykket alltid bli et helt tall for alle naturlige tall $n$.
Min anm. Kåre beskriver inte i detalj hur han har tänkt sig fortsättningen.
Också löst av *Ebbe Thue Poulsen*.

**477.** *(Ebbe Thue Poulsen)* (i) Da

$$Q(x) = -\frac{1}{2}F(-1)x(1-x) + F(0)(1-x)(1+x) + \frac{1}{2}F(1)x(1+x)$$

er et andengradspolynom, der opfylder $Q(-1) = F(-1)$, $Q(0) = F(0)$ og $Q(1) = F(1)$ er $F = Q$. Af de givne uligheder følger så, at

$$|F(x)| \le \frac{1}{2}x(1-x) + (1-x)(1+x) + \frac{1}{2}x(1+x) = 1 + x - x^2 \le \frac{5}{4}$$

for $0 \le x \le 1$. Da ulighederna også er opfyldt for $F(-x)$, ser vi, at $|F(x)| \le \frac{5}{4}$ for alle $x \in [-1, 1]$.
(ii) Da

$$L(x) = G(x) + c(1-x^2)$$

er et førstagradspolynomium, der opfylder $L(-1) = G(-1)$ og $L(1) = G(1)$ er

$$G(x) + c(1-x^2) = \frac{1}{2}G(-1)(1-x) + \frac{1}{2}G(1)(1+x).$$

Da $G(-1) = F(-1)$, $G(1) = F(1)$, og $c = F(0)$, er

$$|G(x)| \leq \frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(1+x) + (1-x^2) = 2 - x^2 \leq 2$$

for $|x| \leq 1$. Polynomierna $F(x) = 1 + x - x^2$ og $F(x) = 2x^2 - 1$ viser, at grænserna $\frac{5}{4}$ og 2 ikke kan erstattes af mindre tal.
Också löst av *CAP*

**478.** *(Ebbe Thue Poulsen)* Lad betegnelserna være valgt således, at $B = 2A$. Af sinusrelationen får vi

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{2\sin A\cos A},$$

og dermed

$$2\cos A = \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Af cosinusrelationen får vi derefter

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - \frac{b^2c}{a},$$

der giver

$$(a-c)\big(a(a+c) - b^2\big) = 0. \tag{2}$$

Da $a$, $b$ og $c$ skal være forskellige, kan (2) kun være opfyldt, hvis

$$b^2 = a(a+c) \tag{3}$$

Heraf ses dels, at $b > a$ (det følger også af, at $B > A$), og dels, at enhver primfaktor i $a$ også er divisor i $b$.
Hvis $a$ og $b$ er naboer, er $\gcd(a,b) = 1$, og så er der kun muligheten $a = 1$, der giver talsættet $(a,b,c) = (1,2,3)$, som ganske vist er løsning til (3), men ikke brugbart som sidelængder i en trekant.
Altså er $a$ og $b$ ikke naboer, og så må der gælde $a = c-1$ og $b = c+1$, hvorefter (3) giver

$$(c+1)^2 = (c-1)(2c-1),$$

der har løsningerne $c = 0$ (ubrugelig) og $c = 5$.
Det ses let, at hvis $(a,b,c) = (4,6,5)$, så er $\sin B = \sin 2A$, og altså enten $B = 2A$ eller $B = \pi - 2A$. Den sidste ligning medfører imidlertid $C = A$ i modstrid med, at $c \neq a$.
Också löst af *CAP* och *Kåre Vedøy.*