Fibonacciserien i Z_p

Ulf Persson

Chalmers Tekniska Högskola
Matematiska Institutionen
SE–412 96 Göteborg
ulfp@math.chalmers.se

Som i Dan Laksovs artikel tidigare i detta nummer kan man betrakta Fibonnaci serien i en primkropp Z_p eller ekvivalent reducera den vanliga serien över heltalen över godtyckliga primtal p. I sambandet kan det vara naturligt att även utvidga definitionen av F_n att även inbegripa negativa tal. Detta göres på ett entydigt sätt och man finner att $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. En sådan serie reducerat till ett primtal blir uppenbarligen periodisk med perioden $P \leq p^2$, ty det finns endast p^2 olika par (a, b). Eftersom vi betraktar serien indicerad över alla heltal är det lätt att se att det första konsekutiva par som upprepar sig när man startar säg vid $(0, 1)$ är just $(0, 1)$. Vi kan även fråga oss om perioden o för återkomsten av 0 ty även denna kommer att återkomma periodiskt, vilket inte är lika uppenbart. Men säg att nästa återkomst av 0 är av typ $\alpha, 0, \alpha$, vi ser då att nästa del av serien är den föregående multiplicerad med α. Vi erhåller då att $P = ok$ där k är ordningen av α, speciellt att $k|p-1$. Det kan vara underhållande att göra en datorundersökning där vi listar **p**(o) och [k]

2 (3) [1]	**3** (4) [2]	**5** (5) [4]	**7** (8) [2]	**11** (10) [1]	**13** (7) [4]
17 (9) [4]	**19** (18) [1]	**23** (24) [2]	**29** (14) [1]	**31** (30) [1]	**37** (19) [4]
41 (20) [2]	**43** (44) [2]	**47** (16) [2]	**53** (27) [4]	**59** (58) [1]	**61** (15) [4]
67 (68) [2]	**71** (70) [1]	**73** (37) [4]	**79** (78) [1]	**83** (84) [2]	**89** (11) [4]
97 (49) [4]	**101** (50) [1]	**103** (104) [2]	**107** (36) [2]	**109** (27) [4]	**113** (19) [4]
127 (128) [2]	**131** (130) [1]	**137** (69) [4]	**139** (46) [1]	**149** (37) [4]	**151** (50) [1]
157 (79) [4]	**163** (164) [2]	**167** (168) [2]	**173** (87) [4]	**179** (178) [1]	**181** (90) [1]

Vi ser här att värdena på k begränsas till $1, 2, 4$, samt att perioden o antingen delar $p-1$ eller $p+1$ med ett uppenbart undantag $p = 5$. Speciellt är perioden P av storlek p och inte p^2. Är detta bara en tillfällighet, eller kan vi formulera en allmän lag? Utrymmet av en sida tillåter ingen längre utläggning, men vi kan i alla fall göra en ansats. Vi har $F_{o-1} = \alpha$ som ovan. Gående baklänges får vi $F_{o-k} = F_{-k}\alpha$ speciellt $1 = F_{o-(o-1)} = F_{o-1}\alpha = (-1)^o F_{o-1}^2$. Men k är ordningen av $\alpha = F_{o-1}$ så om o är jämn är k antingen $1, 2$ och om o är udda har vi $k = 4$, vilket lätt kan verifieras ovan i tabellen. För att bevisa det andra påståendet påminner vi om den explicita formeln $F_n = A\alpha^n + B\beta^n$ där α, β är rötter till ekvationen $x^2 + x - 1$ och A, B lämpligt valda konstanter[1]. Vidare eftersom $\alpha\beta = -1$ reduceras vi till att betrakta när $\alpha^{2n} + (-1)^{n+1} = 0$. Läsaren inbjudes nu till att ge detaljerna.

[1] $A + B = 0$ och således $A(\alpha - \beta) = 1$ genom att betrakta fallen $n = 0, 1$