Approximation i endelig dimensionale rum

Eggert Briem

Eggert Briem
Islands Universitet
Eggert.Briem@aaa.is

Et velkendt resultat af Weierstrass siger at en hvilken som helst reel kontinuert funktion, defineret på et lukket og begrænset interval, kan approximeres ligeligt på intervallet med et polynomium. Dette resultat blev senere generaliseret af Stone. Han indså at det som er væsentligt for Weierstrass's resultat er at polynomier, foruden at adskille punkter og indeholde de konstante funktioner, udgør et vektorrum som er lukket overfor multiplication, er en *algebra* af funktioner.

Den såkaldte Stone-Weierstrass sætning siger at enhver reel kontinuert funktion, defineret på en lukket og begræset delmængde Y af R^n, eller mere generelt på et kompakt Hausdorffrum Y, kan approximeres ligeligt på Y med funktioner fra en algebra A af reelle funktioner på Y som adskiller punkter i Y (hvis y_1 og y_2 er to forskellige punkter i Y så findes der en funktion a i A hvor $a(y_1) \neq a(y_2)$) og indeholder de konstante funktioner. Som et eksempel kan man tage algebraen på intervallet $[0, 1]$ som består af alle polynomier som enten er konstante eller har grad mindst 3.

Stone-Weierstrass sætningen, som den står foroven, gælder ikke for funktioner med komplekse værdier, hvis f.eks. en kontinuert funktion, defineret på den lukkede enhedsskive i den komplekse plan, kan approximeres ligeligt på skiven med polynomier, så må funktionen være analytisk paa den åbne skive. Hvis man derimod yderligere forudsætter at A er lukket overfor kompleks konjugering får man den komplekse udgave af Stone-Weierstrass sætningen.

For lokalkompakte rum Y, såsom lukkede ubegrænsede delmængder af R^n, gælder Stone-Weierstrass sætningen også, forudsat alle involverede funktioner forsvinder i det uendelige på Y.

En algebra A af kontinuerte funktioner er et vektorrum som er lukket m.h.t. sædvanlig multiplikation af funktioner. Som der vil blive gjort rede for senere, gælder der at A er lukket m.h.t multiplikation hvis og kun hvis $a^2 \in A$ for alle $a \in A$. Hvad nu hvis denne betingelse bliver erstattet med $a^n \in A$ for alle $a \in A$, hvor n er et givet naturligt tal? Eller endnu mere generelt med betingelsen, $\varphi \circ a \in A$ for alle $a \in A$, hvor φ er en given funktion defineret i den komplekse plan. Her er den sammensatte funktion $\varphi \circ a$ defineret på sædvanlig vis (se nedenfor). Hvilke funktioner kan man da approximere med funktioner fra A? Kan man opnå eksakt approximering på en given *endelig* delmængde af Y? Og hvis dette ikke er muligt, for hvilke værdier på den endelige delmængde kan man da opnå approximering? Vi vil i det følgende studere spørgsmål af denne og lignende art.

Diskussion og resultater

Artiklen [BCH] indeholder en tilføjelse til Stone–Weierstrass sætningen om approximation af kontinuerte funktioner på et lokalkompakt rum Y med funktioner tilhørende en algebra af kontinuerte funktioner på Y, som er lukket med hensyn til kompleks konjugering, adskiller punkter i Y og ikke forsvinder i noget punkt. Forfatterne viser at på enhver endelig delmængde X af Y kan man opnå eksakt approximering.

En ikke uvæsentlig del af beviset er en hjælpesætning, ([BCH], Lemma 1), som siger at funktioner i A kan antage vilkårligt givne værdier på X. Dette er i virkeligheden et to-punkts ræsonnement. Det er klart tilstrækkeligt at bevise at der for ethvert punkt x i X findes en funktion i A som antager værdien 1 i x og værdien 0 på resten af X. Eftersom A er lukket med hensyn til multiplikation er det tilstrækkeligt at vise, at der til et givet par x, y af punkter i X findes en funktion a i A, således at $a(x) = 1$ og $a(y) = 0$. Lad $U = \{\, (a(x), a(y)) \,:\, a \in A \,\}$, et underrum af $\mathbb{C}^2$. Det er nok at vise at $U = \mathbb{C}^2$. Hvis U er udspændt af en vektor $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, så må der gælde $s \neq 0$ og $t \neq 0$, eftersom A ikke forsvinder i noget punkt. Ligeledes må der gælde at $s \neq t$ eftersom A adskiller punkter. Da nu A er lukket med hensyn til multiplikation er $(s^2, t^2) \in U$, hvilket medfører at $(s^2, t^2) = \alpha(s, t)$ for et komplekst tal α. Men så er $\alpha = s$ og $\alpha = t$, hvilket er umuligt. Derfor må der gælde at U er to-dimensionalt dvs. $U = \mathbb{C}^2$. Vi bemærker at der ikke blev gjort brug af betingelsen at A er lukket med hensyn til kompleks konjugering (se også, [E]).

I det ovenstående ræsonnement har vi kun arbejdet med indskrænkningen af A til den endelige mængde X.

Lad $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ være en endelig mængde og lad A være et lineært rum af komplekse funktioner på X. Svarende til A er der et underrum V af $\mathbb{C}^n$ givet ved

$$V = \{\, (a(x_1), a(x_2), \ldots, a(x_n)) \,:\, a \in A \,\}.$$

En funktion φ, defineret i en omegn af 0 in den komplekse plan, siges at *operere* på A hvis $\varphi \circ a \in A$ når $a \in A$ og den sammensatte funktion er defineret, dvs. a afbilder X ind i definitionsmængden for φ. Tilsvarende, φ *opererer* på et underrum U af $\mathbb{C}^n$ hvis $(\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_n)) \in U$ når $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in U$ og sammensætningen er defineret. Vi bruger også udtrykket A eller U er *invariante* med hensyn til φ. En funktion opererer på A hvis og kun hvis den opererer på det tilsvarende underrum V.

De affine funktioner, $\varphi(t) = \alpha t$, opererer på et hvilket som helst A eller U eller, mere generelt, $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, hvis A indeholder de konstante funktioner.

Ligningen $ab = ((a + b)^2 - (a - b)^2)/2$ viser at et lineært rum A er en algebra hvis $a^2 \in A$ når $a \in A$, dvs. hvis funktionen $\varphi(t) = t^2$ opererer på A. Eller, hvilket er jævngyldigt, $\varphi(t) = t^2$ opererer på underrummet V of $\mathbb{C}^n$ som svarer til A. Vi vil i det følgende se på tilfælde hvor andre funktioner opererer.

Lad os kalde en funktion φ defineret i en omegn D of 0 *additiv* hvis $\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$ når s, t og $s + t$ tilhører D. Det er velkendt at en kontinuert *reel* funktion φ, defineret i en omegn af 0 på den reelle akse, er additiv hvis og kun hvis $\varphi(t) = \alpha t$. Derfra slutter man at φ, defineret i en omegn af 0 i den komplekse plan, er additiv hvis og kun hvis $\varphi(t) = \alpha\xi + \beta\eta$ for $t = \xi + i\eta$ i en omegn af 0.

Som vi har set gælder der om en algebra A af funktioner på en endelig mængde X med n elementer, som adskiller punkter i X og som ikke forsvinder i noget punkt i X, at det til A svarende underrum V af $\mathbb{C}^n$ er hele $\mathbb{C}^n$. Her er en generalisering.

Proposition *Lad $n \geq 2$ være et naturligt tal og lad V være et underrum af $\mathbb{C}^n$. Lad os antage at V har en opererende funktion φ, defineret i en omegn af 0 i den komplekse plan, således at $\varphi - \varphi(0)$ ikke er additiv i nogen omegn af 0. Da indeholder V enhver vektor i $\mathbb{C}^n$ som i et vilkårligt par af sine koordinater stemmer overens med en vektor i V.*

Dette resultat kan omskrives til et resultat om lineære rum af funktioner. Lad φ være en funktion defineret i en omegn af 0 i den komplekse plan, og lad λ være et komplekst tal, $\lambda \neq 1$, $|\lambda| \leq 1$. Funktionen φ siges at være λ-*affin* i en omegn af 0 hvis $\varphi(\lambda t) = \lambda\varphi(t)$ for alle t i en omegn af 0.

Korollar. *Lad A være et lineært rum af funktioner på en endelig mængde X. Lad os antage der findes en opererende funktion for A, defineret i en omegn af 0 i den komplekse plan, således at $\varphi - \varphi(0)$ ikke er additiv i nogen omegn af 0. Da indeholder A enhver funktion på X som i et vilkårligt par af punkter i X stemmer overens med en funktion i A.*

Hvis tillige φ ikke er λ-affin i nogen omegn af 0 og hvis A adskiller punkter i X og ikke forsvinder i noget punkt i X, da vil A indeholde enhver funktion på X.

Bevis for propositionen. Beviset foregår per induktion efter n. For $n = 2$ er der ingenting at bevise. Lad påstanden være sand for et $n \geq 2$ og lad V være et underrum af $\mathbb{C}^n$ med en opererende funktion som i propositionen. Lad os først antage der er et par i, j, hvor $1 \leq i, j \leq n+1$, og $\alpha \in \mathbb{C}$ således at $t_i = \alpha t_j$ når $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in V$. Vi kan antage at $|\alpha| \leq 1$. Lad

$$U = \{ (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{n+1}) \,:\, (t_1, \ldots, t_{i-1}, \alpha t_j, t_{i+1}, \ldots, t_{n+1}) \in V \}.$$

U er et underrum af $\mathbb{C}^n$ og eftersom $|\alpha| \leq 1$ gælder der at φ opererer på U. Antag at $(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1})$ på hvilke som helst to af sine koordinater stemmer overens med en vektor i V. Da er $s_i = \alpha s_j$ og på hvilke som helst to af sine koordinater stemmer vektoren $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_{n+1})$ overens med en vektor i U og er derfor i U ifølge induktionsantagelsen. Vi slutter at $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \ldots, s_{n+1}) \in V$ for et $s \in \mathbb{C}$. Deraf følger $s = \alpha s_j = s_i$ således at $(s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) \in V$ og V har derfor de ønskede egenskaber.

Lad os nu antage at der ikke findes noget par i, j som foroven. Da vil der for ethvert par i, j gælde at det lineære rum $U_{i,j}$ har dimension to, hvor

$$U_{i,j} = \{ (t_i, t_j) \,:\, t_i = s_i \text{ and } t_j = s_j \text{ hvor } (s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}) \in V \}.$$

Lad

$$U = \{ (t_1, t_2, \ldots, t_n) \,:\, (t_1, \ldots, t_n, t) \in V \text{ for et } t \in \mathbf{C} \}.$$

For at kunne bruge induktionshypotesen på U må vi vise at en funktion med de samme egenskaber som φ opererer på U. Lad os bevise at restriktionen af φ til en mindre omegn af 0 er en sådan funktion. Hvis $(0, \ldots, 0, 1) \in V$ vil φ operere på U. Ellers så findes der i det mindste een lineær relation blandt dem som definerer V hvor t_{n+1} indgår, og derfor er der et positivt tal L således at $|t_{n+1}| \leq L \max_{1\leq i\leq n} |t_i|$ hvis $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in V$. Dette viser at restriktionen af φ til en eventuelt mindre omegn af 0 opererer på U. Eftersom $U_{i,j}$ er to-dimensionelt for ethvert par i, j, vil enhver vektor i $\mathbb{C}^n$ på et vilkårligt par af sine koordinater stemme overens med en vektor i U således at $U = \mathbb{C}^n$ ifølge induktionsantagelsen. Specielt gælder der $\dim V \geq n$. Hvis dimensionen af V er lig n findes der tal $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, ikke alle lig 0, således at $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in V$ hvis og kun hvis $\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \cdots + \alpha_{n+1} t_{n+1} = 0$ og, eftersom $U = \mathbb{C}^n$, gælder der at $\alpha_{n+1} \neq 0$. Der findes også i det mindste et par i, j, $1 \leq i, j \leq n$, hvor α_i and α_j begge er forskellige fra 0. Ellers ville der gælde for et $i \leq n$, at $t_{n+1} = \beta t_i$ når $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in V$, et tilfælde som vi allerede har set på. Vi slutter at $(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \in V$ hvis $t_k = 0$ for $k \notin \{i, j, n+1\}$ og $\alpha_i t_i + \alpha_j t_j + \alpha_{n+1} t_{n+1} = 0$ eller, hvilket er jævngyldigt, $t_{n+1} = \beta_i t_i + \beta_j t_j$, hvor $\beta_i = -\alpha_i/\alpha_{n+1}$ og $\beta_j = -\alpha_j/\alpha_{n+1}$. Ved at ombytte φ med $\varphi - \varphi(0)$ kan vi antage at $\varphi(0) = 0$. Da får vi

$$\varphi(\beta_i t_i + \beta_j t_j) = \beta_i \varphi(t_i) + \beta_j \varphi(t_j)$$

for t_i og t_j i en omegn af 0. Specielt gælder $\varphi(\beta_i t_i) = \beta_i \varphi(t_i)$ og $\varphi(\beta_j t_j) = \beta_j \varphi(t_j)$, hvoraf det følger at

$$\varphi(s + t) = \varphi(s) + \varphi(t)$$

for s og t i en omegn af 0, i modstrid med antagelserne om φ. Vi slutter at $V = \mathbb{C}^{n+1}$ og at V dermed har de fornødne egenskaber. Vi har vist at propositionens påstand holder for $n + 1$ hvis den holder for n. Eftersom den holder for $n = 2$, holder den for alle naturlige tal $n \geq 2$.

Bevis for korollaret Den første påstand følger umiddelbart af definitionen. Hvad angår den anden påstand så må vi bevise at det lineære rum

$$W = \{\, (a(x_i), a(x_j)) \,:\, a \in A \,\}$$

har dimension to. Lad os antage at W er udspændt af een vektor $(a_0(x_i), a_0(x_j))$. Betingelserne på A medfører at $a_0(x_i) \neq a_0(x_j)$ og at ingen af størrelserne er lig 0. Deraf følger at $a(x_i) = \gamma a(x_j)$ for alle $a \in A$, hvor $\gamma = a_0(x_i)/a_0(x_j)$. Ved ombytning af x_i and x_j, om nødvendigt, kan vi antage at $|\gamma| \leq 1$. For $s \in \mathbb{C}$, hvor $|s|$ er lille fås $\varphi \circ (sa_0) \in A$ og derfor gælder der at $\varphi(sa_0(x_i) = \gamma\varphi(sa_0(x_j))$. Ved at indsætte $\gamma a_0(x_j)$ i stedet for $a_0(x_i)$ får vi at $\varphi(\gamma t) = \gamma\varphi(t)$ for t i en omegn af 0, i modstrid med antagelserne om φ. Deraf følger at W har dimension to, hvilket medfører at enhver funktion på X, på et vilkårligt par af punkter i X, stemmer overens med en funktion í A og tilhører dermed A ifølge den første påstand.

Bemærkning Det er ikke tilstrækkeligt i propositionen at antage at φ ikke er affin i nogen omegn af 0. Funktionen $\varphi(\xi + i\eta) = \xi + \eta$, som er additiv og som ikke er affin i nogen omegn af 0, opererer på underrummet V af $\mathbb{C}^3$ givet ved

$$V = \{\, (t_1, t_2, t_3) \,:\, t_1 = t_2 + t_3 \,\}.$$

Åbenbart så stemmer enhver vektor $\mathbb{C}^3$ på et vilkårligt par af sine koordinater overens med en vektor i V.

Propositionen holder ikke hvis X er en uendelig mængde, ikke engang selvom X er tællelig. Som et modeksempel kan vi tage algebraen A af alle polynomier i z and $\bar{z}$. Enhver kontinuert funktion på den lukkede enhedsskive i den komplekse plan kan approximeres ligeligt med elementer fra A. Men hvis f. eks. $X = \{\, 1/n \,:\, n \in \mathbb{N} \,\}$ og f er en kontinuert funktion på enhedsskiven som opfylder $f(1/n) = 1/n$ hvis n er lige og $f(1/n) = 0$ hvis n er ulige, så findes der ikke noget element i A som stemmer overens med f på X, eftersom ethvert polynomium som er ikke null-polynomiet kun har endelig mange nullpunkter.

I [B] kan man læse videre om generaliseringer af Stone–Weierstrass sætningen og opererende funktioner.

Litteratur

[BCH] S. Boel, T.M. Carlsen and N.R. Hansen, A useful strengthening of the Stone–Weierstrass theorem, Amer. Math. Monthly, **108**:642–643 (2001)

[B] E. Briem, Stone-Weierstrass sætningen og funktioner som opererer på rum af kontinuerte funktioner, Normat **49**:1, 21–30 (2001)

[E] J. R. Stefansson, Editors Endnotes, Amer. Math. Monthly, **109**:775–776 (2002)